Metodi Matematici per la Fisica

Terzo appello estivo - 5 settembre 2025

Si risolvano cortesemente i seguenti problemi, sapendo che il punteggio assegnato a ciascuna procedura di risoluzione può variare tra lo zero e il massimo indicato ed è stabilito valutando:

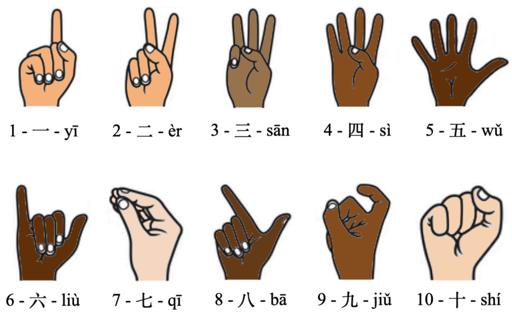
1. la correttezza del risultato ottenuto e della procedura utilizzata;
2. la completezza dei passaggi riportati;
3. il livello di esemplificazione con cui sono espressi i risultati (ad esempio un risultato numerico reale non deve contenere l'unità immaginaria);
4. la correttezza del formalismo utilizzato;
5. la chiarezza dell'esposizione e la leggibilità del testo;
6. la bellezza e l'armonia del tutto.

Primo problema (punteggio massimo: 6/30)

Si calcoli l'integrale

$$= \int_0^1 \ln\left(\ln(s)\right) ds\,.$$

Curiosità. Il gesto  è quello comunemente utilizzato nella Repubblica Popolare Cinese per indicare il numero sei. L'immagine a destra riporta i gesti per i numeri dall'uno al dieci, com il numero arabo corrispondente, il simbolo cinese e la pronuncia *pinyin*. È interessante notare che, mentre i numeri dall'uno al cinque si indicano con gesti simili a quelli utilizzati in Italia, ad eccezione del tre, che si fa con il pollice chiuso; quelli dal sei al dieci hanno gesti diversi che si fanno con una sola mano.



Utilità. Potrebbe essere utile la derivata prima dell funzione gamma di Eulero in 1, ovvero: $\Gamma'(1) = -\gamma$, dove γ è la costante di Eulero-Mascheroni e vale $\gamma \simeq 0,5772$.

Soluzione del primo problema

Per s che varia nell'intervallo d'integrazione $[0,1]$ la funzione logaritmo è minore o uguale a zero, facciamo quindi la sostituzione $t = -\ln(s)$, da cui: $s = e^{-t}$ e $ds = -e^{-t}dt$, si ha

$$= -\int_\infty^0 \ln(-t)e^{-t}dt = \int_0^\infty \left(\ln(t) + i\pi\right)e^{-t}dt = \int_0^\infty \ln(t)e^{-t}dt + i\pi\left(-e^{-t}\right)\Big|_0^\infty = \int_0^\infty \ln(t)e^{-t}dt + i\pi\,.$$

Consideriamo la rappresentazione della funzione gamma di Eulero in forma di integrale di Eulero di secondo tipo

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-u}u^{z-1}du\,,$$

che ha il semipiano della parti reali positive, $D = \{z : \mathrm{Re}(z) > 0\}$, come dominio di convergenza. In ogni insieme chiuso contenuto in D la convergenza dell'integrale è uniforme, quindi, in tali insiemi, la derivata dell'integrale coincide con l'integrale della derivata, cioè

$$\Gamma'(z) = \frac{d}{dz}\int_0^\infty e^{-u}u^{z-1}du = \int_0^\infty du\, e^{-u}u^{-1}\frac{d}{dz}u^z = \int_0^\infty du\, e^{-u}u^{-1}\frac{d}{dz}e^{z\ln(u)} = \int_0^\infty du\, e^{-u}u^{-1}\ln(u)e^{z\ln(u)}\,,$$

da cui

$$\Gamma'(z) = \int_0^\infty e^{-u} \ln(u) e^{z-1} du \,.$$

Valutando la derivata prima in $z = 1$, si ha

$$-\gamma = \Gamma'(1) = \lim_{z\to 1} \int_0^\infty e^{-u} \ln(u) e^{z-1} du = \int_0^\infty \lim_{z\to 1} e^{-u} \ln(u) e^{z-1} du = \int_0^\infty e^{-u} \ln(u) du \,.$$

L'integrale ottenuto è quello che compare nell'espressione di 🤟🏾, ne consegue che il risultato finale è

$$🤟🏾 = \int_0^\infty e^{-t} \ln(t) dt + i\pi = -\gamma + i\pi \,.$$

SECONDO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

Data la funzione meromorfa

$$f(z) = \frac{1}{\sum_{j=0}^{N} p_j z^j} \,,$$

dove $\{p_j\}_{j=0}^{N}$ è l'insieme dei coefficienti del polinomio di grado $N \in \mathbb{N}$ a denominatore, con $p_0 \neq 0$, $p_N \neq 0$ e $N > 1$, si dimostri che i coefficienti della sua serie di Laurent centrata nell'origine

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k z^k \,,$$

convergente in un intorno della stessa origine, verificano la relazione

$$\sum_{j=0}^{N} p_j C_{k-j} = p_0 C_k + p_1 C_{k-1} + \ldots + p_N C_{k-N} = 0 \,, \qquad \forall\, k \in \mathbb{N} \backslash \{1, 2, \ldots, N-1\} \,.$$

SOLUZIONE DEL SECONDO PROBLEMA

La funzione è meromorfa, essendo l'inverso di un polinomio. Le singolarità sono polari e i poli coincidono in posizione e grado con gli zeri del polinomio di grado N

$$\sum_{j=0}^{N} p_j z^j \,.$$

Poiché, il termine noto p_0 è non nullo, l'origine non è uno zero del polinomio e quindi non è un polo della funzione $f(z)$. Ne consegue che la funzione ammette lo sviluppo in serie di Taylor centrata nell'origine e che la serie converge uniformemente in ogni insieme chiuso contenuto nel disco D_r centrato nell'origine di raggio r pari al minore dei moduli degli zeri del polinomio, raggio che, per quanto già affermato, è strettamente maggiore di zero. Indicando con $\{z_l\}_{l=1}^{N}$ l'insieme degli zeri del polinomio e quello dei poli della funzione $f(z)$ e ricordando che $0 \notin \{z_l\}_{l=1}^{N}$, si hanno

$$r = \min_{l\in\{1,2,\ldots,N\}} \{|z_l|\} > 0 \,, \qquad D_r = \{z : |z| < r\} \,.$$

La serie di Laurent si riduce a quella di Taylor, come suggerito dal problema poniamo

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k z^k \,,$$

che converge $\forall\, z \in D_r$. Il k-esimo coefficiente è dato dalla formula integrale

$$C_k = \frac{1}{2i\pi}\oint_\gamma \frac{f(z)}{z^{k+1}}dz = \frac{1}{2i\pi}\oint_\gamma \frac{dz}{z^{k+1}\sum_{j=0}^N p_j z^j}\,, \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}\cup\{0\}\,,$$

dove γ è una curva chiusa, tale che, $\gamma \subset D_r$ e $n(0,\gamma) = 1$, ovvero avvolge l'origine una sola volta.
Consideriamo un valore $k \geq N$ e le espressioni integrali dei termini della somma

$$\sum_{j=0}^N p_j C_{k-j} = p_0 C_k + p_1 C_{k-1} + \ldots + p_N C_{k-N}\,,$$

si hanno

$$\begin{aligned}
p_0 C_k &= \frac{1}{2i\pi}\oint_\gamma \frac{p_0}{z^{k+1}\sum_{j=0}^N p_j z^j}dz\,,\\
p_1 C_{k-1} &= \frac{1}{2i\pi}\oint_\gamma \frac{p_1}{z^{k}\sum_{j=0}^N p_j z^j}dz = \frac{1}{2i\pi}\oint_\gamma \frac{p_1 z}{z^{k+1}\sum_{j=0}^N p_j z^j}dz\,,\\
p_2 C_{k-2} &= \frac{1}{2i\pi}\oint_\gamma \frac{p_2}{z^{k-1}\sum_{j=0}^N p_j z^j}dz = \frac{1}{2i\pi}\oint_\gamma \frac{p_2 z^2}{z^{k+1}\sum_{j=0}^N p_j z^j}dz\,,\\
&\vdots\\
p_N C_{k-N} &= \frac{1}{2i\pi}\oint_\gamma \frac{p_N}{z^{k-N+1}\sum_{j=0}^N p_j z^j}dz = \frac{1}{2i\pi}\oint_\gamma \frac{p_N z^N}{z^{k+1}\sum_{j=0}^N p_j z^j}dz\,.
\end{aligned}$$

Sommiamo membro a membro, il membro di sinistra è la somma data dal problema, ovvero

$$\sum_{j=0}^N p_j C_{k-j} = p_0 C_k + p_1 C_{k-1} + \ldots + p_N C_{k-N} = \frac{1}{2i\pi}\oint_\gamma \frac{p_0 + p_1 z + p_2 z^2 + \ldots p_N z^N}{z^{k+1}\sum_{j=0}^N p_j z^j}dz = \frac{1}{2i\pi}\oint_\gamma \frac{dz}{z^{k+1}} = \delta_{k0}\,.$$

L'ultima identità deriva dal fatto che l'unico valore di $k \in \mathbb{Z}$ per il quale l'integrale è non nullo è $k = 0$, infatti, in questo caso l'integrale con il coefficiente $1/(2i\pi)$ coincide con il numero di avvolgimenti della curva chiusa γ attorno all'origine, che è uno per definizione. Poiché, i valori di $k \in \mathbb{N}$ che stiamo considerando sono maggiori o uguali a N che è strettamente maggiore di uno, si ha $k \geq N > 1$, quindi $\delta_{k0} = 0$, cioè, come era richiesto di dimostrare,

$$\sum_{j=0}^N p_j C_{k-j} = p_0 C_k + p_1 C_{k-1} + \ldots + p_N C_{k-N} = 0\,, \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}\backslash\{1, 2, \ldots, N-1\}\,.$$

TERZO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

Si calcoli l'integrale

$$= \int_0^{2\pi}\sqrt{\frac{\mathrm{sen}(a)}{\cos(a)+1}}\,da\,.$$

Curiosità. Nella Repubblica Popolare Cinese Il gesto  indica il numero dieci. Si veda la descrizione in calce al primo problema.

SOLUZIONE DEL TERZO PROBLEMA

Riscriviamo la funzione integranda usando le formule di bisezione delle funzioni seno, $\mathrm{sen}(2) = 2\,\mathrm{sen}(a/2)\cos(a/2)$ e coseno, $\cos(a) = 2\cos^2(a/2) - 1$, si ha

$$\sqrt{\frac{\mathrm{sen}(a)}{\cos(a)+1}} = \sqrt{\frac{2\,\mathrm{sen}(a/2)\cos(a/2)}{2\cos^2(a)}} = \sqrt{\tan\left(\frac{a}{2}\right)}.$$

Facciamo, inoltre la sostituzione $b = a/2$, l'integrale diventa

$$= 2\int_0^{\pi} \sqrt{\tan(b)}\, db\,.$$

La funzione tangente nell'intervallo $[0,\pi]$ è dispari rispetto a $\pi/2$, per cui, suddividendo l'intervallo d'integrazione nell'unione $[0,\pi] = [0,\pi/2] \cup [\pi/2,\pi]$ e facendo la sostituzione $c = -b+\pi$ nel secondo integrale, si ottiene

$$\begin{aligned}
&= 2\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan(b)}\, db + 2\int_{\pi/2}^{\pi} \sqrt{\tan(b)}\, db = 2\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan(b)}\, db - 2\int_{\pi/2}^{0} \sqrt{\tan(-c+\pi)}\, dc \\
&= 2\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan(b)}\, db + 2\int_0^{\pi/2} \sqrt{-\tan(c)}\, dc \\
&= 2(1+i)\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan(b)}\, db\,.
\end{aligned}$$

Infine, calcoliamo l'integrale della radice quadrata della funzione tangente facendo la sostituzione $t = \tan(b)$, da cui: $b = \arctan(t)$ e $db = dt/(t^2+1)$, che dà

$$= 2(1+i)\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{t}}{t^2+1} dt$$

e usando la formula di risoluzione degli integrali di funzioni polidrome

$$\int_0^{\infty} x^{\alpha} R(x) dx = -\frac{\pi e^{-i\pi\alpha}}{\mathrm{sen}(\pi\alpha)} \sum_{k=1}^{N} \mathrm{Res}\left[z^{\alpha} R(z), z_k\right],$$

con $\alpha \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$ e dove $R(x)$ è una funzione razionale, cioè un rapporto di polinomi, che ha come poli i punti dell'insieme $\{z_k\}_{k=1}^{N}$, che ha intersezione vuota con il semiasse reale positivo.
Nel caso del problema, si hanno: $\alpha = 1/2$, $R(t) = 1/(t^2+1)$ e $\{z_k\}_{k=1}^{N} = \{-i, i\}$, quindi

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{t}}{t^2+1} dt &= -\frac{\pi e^{-i\pi/2}}{\mathrm{sen}\,(\pi/2)} \left(\mathrm{Res}\left[\frac{\sqrt{t}}{t^2+1}, -i\right] + \mathrm{Res}\left[\frac{\sqrt{t}}{t^2+1}, i\right]\right) = -\pi e^{-i\pi/2}\left(\frac{\sqrt{-i}}{-2i} + \frac{\sqrt{i}}{2i}\right) \\
&= -\pi e^{-i\pi/2}\left(\frac{-\sqrt{e^{3i\pi/2}} + \sqrt{e^{i\pi/2}}}{2i}\right) = -\pi e^{-i\pi/2}\left(\frac{-e^{3i\pi/4} + e^{i\pi/4}}{2i}\right) \\
&= -\pi e^{-i\pi/2} e^{i\pi/2}\left(\frac{-e^{i\pi/4} + e^{-i\pi/4}}{2i}\right) = -\pi\left(-\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \\
&= \frac{\pi}{\sqrt{2}}\,.
\end{aligned}$$

In definitiva l'integrale cercato è

$$= \sqrt{2}\pi\,(1+i)\,.$$

Soluzione del terzo problema - Seconda possibilità

Per risolvere l'integrale

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan(b)}\, db$$

si può altresì usare la funzione beta di Eulero. Infatti la rappresentazione della funzione beta di Eulero in forma di integrale di Eulero di primo tipo è

$$\beta(z,u) = \int_0^1 t^{z-1}\,(1-t)^{u-1}\, dt\,,$$

con $\operatorname{Re}(z) > 0$ e $\operatorname{Re}(u) > 0$. In queste condizioni si ha

$$\beta(z,u) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(u)}{\Gamma(z+u)}\,.$$

Facendo la sostituzione $t = \cos^2(b)$, da cui $dt = -2\,\mathrm{sen}(b)\cos(b)\,db$, si ha

$$\beta(z,u) = 2\int_0^{\pi/2} \cos^{2z-1}(b)\,\mathrm{sen}^{2u-1}(b)\,db\,.$$

L'integrale cercato è

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan(b)}\,db = \int_0^{\pi/2} \cos^{-1/2}(b)\,\mathrm{sen}^{1/2}(b)\,db = \frac{1}{2}\beta\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{2}\frac{\Gamma(1/4)\Gamma(3/4)}{\Gamma(1)}$$
$$= \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{4}\right),$$

usando la formula di riflessione

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\mathrm{sen}(\pi z)}\,, \qquad \forall\, z \notin \mathbb{Z}\,,$$

per $z = 1/4$, l'integrale precedente vale

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan(b)}\,db = \frac{1}{2}\frac{\pi}{\mathrm{sen}(\pi/4)} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\,,$$

che, sostituito nell'espressione per , dà

$$= 2(1+i)\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan(b)}\,db = 2(1+1)\frac{\pi}{\sqrt{2}}\,,$$

cioè

$$= \sqrt{2}\pi(1+i)\,.$$

QUARTO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

L'operatore  è definito nello spazio di Hilbert a 5 dimensioni E_5 e, rispetto alla base ortonormale $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^{5} \subset E_5$, è rappresentato dalla matrice

 $\overset{e}{\hookleftarrow}$ 

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -i \\ 0 & 0 & 0 & i & -1 \end{pmatrix}.$$

Dopo aver classificato l'operatore, si ottengono gli autovalori e i vettori che rappresentano gli autovettori rispetto alla base data.

Curiosità. Nella Repubblica Popolare Cinese Il gesto  indica il numero sette. Si veda la descrizione in calce al primo problema.

Soluzione del quarto problema

La matrice che rappresenta l'operatore è diagonale a blocchi, infatti può essere posta nella forma

$$ = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix},$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = i\,, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & -1 \end{pmatrix},$$

ovvero, il primo e il terzo blocco, A e C, sono matrici 2×2, mentre il blocco centrale, B, è uno scalare, l'unità immaginata i.
Mentre il primo e il terzo blocco sono hermitiani, il secondo è anti-hermitiano, quindi la matrice completa non è hermitiana e tale non è l'operatore. Si verifica, però, che la matrice e quindi l'operatore sono normali. Calcoliamo il commutatore della matrice con la sua aggiunta, usando la notazione a blocchi si ha

$$\begin{aligned}
\left[\ ,\ ^{\dagger}\right] &= \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^{\dagger} & 0 & 0 \\ 0 & B^{\dagger} & 0 \\ 0 & 0 & C^{\dagger} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A^{\dagger} & 0 & 0 \\ 0 & B^{\dagger} & 0 \\ 0 & 0 & C^{\dagger} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & -B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & -B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} A^2 & 0 & 0 \\ 0 & -B^2 & 0 \\ 0 & 0 & C^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A^2 & 0 & 0 \\ 0 & -B^2 & 0 \\ 0 & 0 & C^2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Dalla notazione a blocchi consegue che l'equazione matriciale, che rappresenta l'equazione agli autovalori può essere scomposta in tre equazioni agli autovalori, delle quali solo due, la prima e la terza sono non banali. Si hanno le equazioni

$$\widehat{\ }\,|v_k\rangle = \sigma_k |v_k\rangle \xhookleftarrow{e} \ v_k = \sigma_k v_k\,, \qquad k \in \{1,2,3,4,5\}\,,$$

dove l'insieme $\{\sigma_k\}_{k=1}^5$ è quello degli autovalori, mentre gli insiemi $\{|v_k\rangle\}_{k=1}^5$ e $\{v_k\}_{k=1}^5$ sono rispettivamente quelli degli autovettori e dei vettori, matrici 5×1, che li rappresentano rispetto alla base ortonormale data.
In notazione a blocchi le equazioni matriciali agli autovalori sono

$$ \ v_k = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \end{pmatrix} = \sigma_k v_k = \sigma_k \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \end{pmatrix}, \qquad k \in \{1,2,3,4,5\}\,,$$

dove $\{a_k\}_{k=1}^5$ e $\{c_k\}_{k=1}^5$ sono insiemi di vettori 2×1, $\{b_k\}_{k=1}^5$ è un insieme di scalari. Infine, poiché i blocchi $n \times n$, con, nel nostro caso, $n = 1,2$, hanno al più n autovettori linearmente indipendenti, definiamo i valori dell'indice k in modo che: con $k = 1,2$ si indichino gli autovalori e gli autovettori del primo blocco A, con $k = 3$, quelli del blocco scalare B e con $k = 4,5$ quelli del terzo blocco C. Ciò implica che

$$a_3 = a_4 = a_5 = c_1 = c_2 = c_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad b_1 = b_2 = b_4 = b_5 = 0\,,$$

quindi, possono essere non nulli i vettori e lo scalare seguenti

$$a_1 = \begin{pmatrix} a_1^1 \\ a_1^2 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} a_2^1 \\ a_2^2 \end{pmatrix}, \qquad b_3\,, \qquad c_4 = \begin{pmatrix} c_4^1 \\ c_4^2 \end{pmatrix}, \quad c_5 = \begin{pmatrix} c_5^1 \\ c_5^2 \end{pmatrix}.$$

dove a_k^j (c_k^j) è la j-esima componente contro-variante del vettore che rappresenta il k-esimo autovettore a_k (c_k), con $(k,j) \in \{1,2\} \times \{1,2\}$ ($k,j \in \{4,5\} \times \{1,2\}$).
I tre insiemi di equazioni matriciali agli autovalori sono

$$\begin{aligned} A a_k &= \sigma_k a_k\,, & \qquad & k \in \{1,2\}\,, \\ B b_k &= \sigma_k b_k\,, & & k = 3\,, \\ C c_k &= \sigma_k c_k\,, & & k \in \{4,5\}\,, \end{aligned}$$

dove gli indici indicati per ciascun insieme di equazioni sono quelli per cui si hanno autovettori diversi dal vettore nullo.
Calcoliamo gli autovalori blocco per blocco.
L'equazione secolare del primo, indicando con I la matrice identità 2×2, è

$$\begin{aligned} \det(A - \sigma I) &= 0 \\ \det\begin{pmatrix} -\sigma & 1 \\ 1 & -\sigma \end{pmatrix} &= 0 \\ \sigma^2 - 1 &= 0\,, \end{aligned}$$

da cui: $\sigma_1 = -1$ e $\sigma_2 = 1$.
L'equazione secolare del secondo blocco, che è semplicemente uno scalare,

$$\begin{aligned} \det(B - \sigma I) &= 0 \\ \det(i - \sigma) &= 0 \\ i - \sigma &= 0\,, \end{aligned}$$

quindi $\sigma_3 = i$.
Per il terzo blocco,

$$\begin{aligned} \det(C - \sigma I) &= 0 \\ \det\begin{pmatrix} 1-\sigma & -i \\ i & -1-\sigma \end{pmatrix} &= 0 \\ \sigma^2 - 2 &= 0\,, \end{aligned}$$

da cui: $\sigma_4 = -\sqrt{2}$ e $\sigma_5 = \sqrt{2}$. L'insieme degli autovalori è $\left\{-1, 1, i, -\sqrt{2}, \sqrt{2}\right\}$, non c'è degenerazione e quindi coincide con lo spettro discreto dell'operatore.
Anche gli autovettori si ottengono blocco per blocco.
Le componenti contro-varianti dei primi due, relativi al primo blocco, sono le soluzioni dei sistemi omogenei

$$\begin{aligned} (B - I\sigma_k)\, a_k &= 0 \\ \begin{pmatrix} -\sigma_k & 1 \\ 1 & -\sigma_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_k^1 \\ a_k^2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad k \in \{1,2\}\,. \end{aligned}$$

Posto $a_{1,2}^1 = a$, dalla prima riga si ha $a_k^2 = a\sigma_k$, con $k \in \{1,2\}$, quindi, normalizzando,

$$a_1 = a\begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad a_2 = a\begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Il terzo autovettore, unico non nullo del secondo blocco, lo scalare $B = i$, è semplicemente l'unità, cioè: $b_3 = 1$. Gli ultimi due autovettori, sono il quarto e il quinto e sono relativi al terzo blocco C. Le componenti contro-varianti dei vettori sono le soluzioni dei due sistemi omogenei

$$\begin{aligned} (C - I\sigma_k)\, c_k &= 0 \\ \begin{pmatrix} 1-\sigma_k & -i \\ i & -1-\sigma_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_k^1 \\ c_k^2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad k \in \{4,5\}\,. \end{aligned}$$

Poniamo $c_{4,5}^1 = c$ e dalla prima riga si ha $c_k^2 = -i(1-\sigma_k)\,c$, con $k \in \{4,5\}$, cioè

$$c_4 = c\begin{pmatrix} 1 \\ -i\left(1-\sigma_4\right) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i\left(1+\sqrt{2}\right) \end{pmatrix}, \qquad c_5 = c\begin{pmatrix} 1 \\ -i\left(1-\sigma_5\right) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i\left(1-\sqrt{2}\right) \end{pmatrix}.$$

Ricomponiamo i vettori a partire dai blocchi, si ha

$$v_k = \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_k^1 \\ a_k^2 \\ b_k \\ c_k^1 \\ c_k^2 \end{pmatrix}, \qquad k \in \{1,2,3,4,5\},$$

ricordando le componenti nulle, i cinque vettori sono

$$v_1 = \begin{pmatrix} a_1^1 \\ a_1^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} a_1^1 \\ a_1^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ c_4^1 \\ c_4^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -i\left(1+\sqrt{2}\right) \end{pmatrix}, \quad v_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ c_5^1 \\ c_5^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -i\left(1-\sqrt{2}\right) \end{pmatrix}.$$

QUINTO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

L'operatore  è definito nello spazio di Hilbert quadridimensionale E_4 dalle azioni

 $|u_1\rangle = -|u_1\rangle,$  $|u_2\rangle = a|u_1\rangle - |u_2\rangle,$

 $|u_3\rangle = b|u_1\rangle + d|u_2\rangle + |u_3\rangle,$  $|u_4\rangle = c|u_1\rangle + e|u_2\rangle + f|u_3\rangle + |u_4\rangle,$

sui vettori della base ortonormale $\{|u_k\rangle\}_{k=1}^4 \subset E_4$.

Si stabilisca per quali valori $(a,b,c,d,e,f) \in \mathbb{C}^6$ l'operatore  è diagonalizzabile e, in questo caso, si ottengano lo spettro discreto e i vettori che rappresentano gli autovettori rispetto alla base $\{|u_k\rangle\}_{k=1}^4 \subset E_4$.

Curiosità. Nella Repubblica Popolare Cinese Il gesto  indica il numero nove. Si veda la descrizione in calce al primo problema.

SOLUZIONE DEL QUINTO PROBLEMA

La matrice che rappresenta l'operatore rispetto alla base data è

 $\overset{u}{\hookleftarrow}$  $= \begin{pmatrix} -1 & a & b & c \\ 0 & -1 & d & e \\ 0 & 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Gli autovalori sono le soluzioni dell'equazione secolare

$$\det\left(\right.$$  $$\left. - I\omega \right) = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} -1-\omega & a & b & c \\ 0 & -1-\omega & d & e \\ 0 & 0 & 1-\omega & f \\ 0 & 0 & 0 & 1-\omega \end{pmatrix} = 0$$

$$(-1-\omega)^2(1-\omega)^2 = 0\,,$$

ci sono due autovalori distinti $\omega_\pm = \pm 1$ entrambi con grado di degenerazione 2.
Le componenti contro-varianti dei vettori che rappresentano gli autovettori si ottengono come soluzioni dei sistemi omogenei

$$\begin{pmatrix} -1-\omega_j & a & b & c \\ 0 & -1-\omega_j & d & e \\ 0 & 0 & 1-\omega_j & f \\ 0 & 0 & 0 & 1-\omega_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_j^1 \\ v_j^2 \\ v_j^3 \\ v_j^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad j = 1, 2, 3, 4\,,$$

con $\omega_1 = \omega_2 = \omega_- = -1$, $\omega_3 = \omega_4 = \omega_+ = 1$ e dove v_j^k è la k-esima componente contro-variante del j-esimo autovettore, con $k, j \in \{1, 2, 3, 4\}$.
Per i primi due autovalori $\omega_1 = \omega_2 = -1$, il sistema è

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & d & e \\ 0 & 0 & 2 & f \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{1,2}^1 \\ v_{1,2}^2 \\ v_{1,2}^3 \\ v_{1,2}^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dalla quarta riga: $v_{1,2}^4 = 0$; dalla terza: $v_{1,2}^3 = 0$, dalla prima: $a v_{1,2}^2 = 0$; mentre non ci sono condizioni sulla prima componente. Gli autovettori possono avere solo le prime due componenti non nulle. Condizione necessaria e sufficiente affinché si abbia la diagonalizzabilità è che gli autovettori sia linearmente indipendenti. Ne consegue la necessità che, per ogni autovalore degenere sia possibile definire un insieme di autovettori linearmente indipendenti in numero pari al grado di degenerazione dell'autovalore. Per $\omega_1 = \omega_2 = -1$ dovremmo avere due autovettori linearmente indipendenti, questo è possibile solo se $a = 0$, infatti, in questo caso la condizione $a v_{1,2}^2 = 0$ è verificata per ogni valore di $v_{1,2}^2$ ed è quindi possibile definire due autovettori, v_1 e v_2, linearmente indipendenti, con $v_1^1 = 1$, $v_1^2 = 0$ e $v_2^1 = 0$, $v_2^2 = 1$, cioè

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nel caso degli ultimi due autovalori $\omega_3 = \omega_4 = 1$, avendo, inoltre, $a = 0$, si ha

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & b & c \\ 0 & -2 & d & e \\ 0 & 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{3,4}^1 \\ v_{3,4}^2 \\ v_{3,4}^3 \\ v_{3,4}^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Se fosse $f \neq 0$, dalla terza riga si otterrebbe $v_{3,4}^4 = 0$ e dalla prima e seconda, assumendo $b \neq 0$ e $d \neq 0$,

$$v_{3,4}^3 = \frac{2 v_{3,4}^1}{b} = \frac{2 v_{3,4}^2}{d}\,,$$

le prime tre componenti contro-varianti sarebbero proporzionali e tali sarebbero gli autovettori relativi all'autovalore degenere $\omega_3 = \omega_4 = 1$. Gli autovettori corrispondenti, ponendo $v_{3,4}^1 = v$, sarebbero

$$v_{3,4} = v \begin{pmatrix} 1 \\ d/b \\ 2/b \\ 0 \end{pmatrix},$$

ovvero un unico autovettore, indipendentemente dalla scelta del valore di v. Ciò significa che l'autovalore con grado di degenerazione due avrebbe molteplicità geometrica unitaria e che quindi l'operatore non sarebbe diagonalizzabile. Nel caso in cui, uno dei due parametri b o d fosse nullo, ad esempio b, dalla prima riga si avrebbe $v^1_{3,4} = 0$, dalla seconda: $v^3_{3,4} = 2v^2_{3,4}/d$, quindi posto $v^2_{3,4} = v$,

$$v_{3,4} = v \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2/d \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Anche in questo caso, si avrebbe uno solo autovettore. Infine, se fosse $d = 0$, avremmo: $v^2_{3,4} = 0$, $v^3_{3,4} = 2v^1_{3,4}/b$ e, posto $v^1_{3,4} = v$, l'autovettore sarebbe

$$v_{3,4} = v \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2/b \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Ancora una volta, ci sarebbe un solo autovettore e l'operatore non sarebbe diagonalizzabile.
Consideriamo il caso in cui si abbia $f = 0$ e gli altri parametri b, c, d ed e non nulli, il sistema sarebbe

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & b & c \\ 0 & -2 & d & e \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1_{3,4} \\ v^2_{3,4} \\ v^3_{3,4} \\ v^4_{3,4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

ci sarebbero solo due equazioni per quattro parametri, omettendo per economia di notazione i pedici,

$$\begin{cases} bv^3 + cv^4 = 2v^1 \\ dv^3 + ev^4 = 2v^2 \end{cases} .$$

È un sistema lineare di due equazioni che dà in funzione delle prime due componenti contro-varianti v^1 e v^2 le ultime due v^3 e v^4. La soluzioni sono

$$v^3 = \frac{\det\begin{pmatrix} 2v^1 & c \\ 2v^2 & e \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} b & c \\ d & e \end{pmatrix}} = 2\frac{v^1 e - v^2 c}{be - dc} , \qquad v^4 = \frac{\det\begin{pmatrix} b & 2v^1 \\ d & 2v^2 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} b & c \\ d & e \end{pmatrix}} = 2\frac{bv^2 - dv^1}{be - dc} .$$

Possiamo scegliere coppie (v^1, v^2) in modo che si ottengano coppie di autovettori linearmente indipendenti. Reintroducendo i pedici per distinguere i due autovettori, scegliamo: $(v^1_3, v^2_3) = (1, 0)$ e $(v^1_4, v^2_4) = (0, 1)$ così da avere immediatamente l'indipendenza lineare. Si hanno le componenti

$$v^3_3 = \frac{2e}{be - dc} , \qquad v^4_3 = \frac{-2d}{be - dc} , \qquad v^3_4 = \frac{-2c}{be - dc} , \qquad v^4_4 = \frac{2b}{be - dc} ,$$

da cui i vettori

$$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2e/(be - dc) \\ -2d/(be - dc) \end{pmatrix} , \qquad v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2c/(be - dc) \\ 2b/(be - dc) \end{pmatrix} .$$

In definitiva, la condizione di diagonalizzabilità si ha con $a = f = 0$, in questo caso la matrice che rappresenta l'operatore è

$$\widehat{\text{🤌}} \overset{u}{\hookleftarrow} \text{🤌} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & b & c \\ 0 & -1 & d & e \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e i vettori che rappresentano gli autovettori sono

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2e/(be-dc) \\ -2d/(be-dc) \end{pmatrix}, \qquad v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2c/(be-dc) \\ 2b/(be-dc) \end{pmatrix},$$

sono linearmente indipendenti, quindi l'operatore  è diagonalizzabile.

Sesto problema (punteggio massimo: 5/30)

Si calcoli l'integrale


$$= \int_0^\infty dx \int_0^\infty dy\, y^2 \delta\left(\left(x^2+y^2\right)^{1/4} - a\right),$$

dove δ è la distribuzione delta di Dirac e $a \in \mathbb{R}$.

Curiosità. Nella Repubblica Popolare Cinese Il gesto  indica il numero otto. Si veda la descrizione in calce al primo problema.

Soluzione del sesto Problema

Riscriviamo l'integrale in coordinate polari, si hanno

$$x = r\cos(\theta), \qquad y = r\,\mathrm{sen}(\theta), \qquad dx dy = r dr d\theta\,.$$

Inoltre, l'insieme d'integrazione, che coincide con il primo quadrante del piano cartesiano xy, ovvero l'insieme $\{(x,y) : x \geq 0, y \geq 0\} \subset \mathbb{R}^2$, in coordinate polari diventa $\{(r,\theta) : r \geq 0, \theta \in [0,\pi/2]\}$. Con questo cambiamento di variabili l'integrale può essere riscritto come


$$= \int_0^\infty dr \int_0^{\pi/2} d\theta\, r^3\,\mathrm{sen}^2(\theta)\delta\left(\sqrt{r} - a\right).$$

Integriamo sulla variabile r, usando le proprietà della delta di Dirac, distinguendo due casi: $a < 0$ e $a \geq 0$.
Nel primo caso, $a < 0$, l'integrale è nullo, poiché l'argomento della delta di Dirac non si annulla per alcun valore di $r \in [0,\infty)$, essendo $\sqrt{r} \geq 0$ sempre. Allora si ha


$$= \begin{cases} 0 & a < 0 \\ \displaystyle\int_0^{\pi/2} d\theta\,\mathrm{sen}^2(\theta) \int_0^\infty dr\, r^3 \frac{\delta\left(r-a^2\right)}{\left|d\sqrt{r}/dr\right|} & a \geq 0 \end{cases}.$$

L'integrale è fattorizzato nel prodotto di un integrale solo sulla variabile angolare e uno solo sulla variabile radiale contenente la delta di Dirac. Quest'ultimo si calcola, come già asserito, sfruttando le proprietà della delta di Dirac e vale

$$\int_0^\infty dr\, r^3 \frac{\delta\left(r-a^2\right)}{\left|d\sqrt{r}/dr\right|} = \int_0^\infty dr\, r^3 \frac{\delta\left(r-a^2\right)}{\left|1/(2\sqrt{r})\right|} = 2a^7\,.$$

Mentre per l'integrale sulla variabile angolare θ usiamo la formula di bisezione $\cos(2\theta) = 1 - 2\,\mathrm{sen}^2(\theta)$ e si ha

$$\int_0^{\pi/2} d\theta\,\mathrm{sen}^2(\theta) = \int_0^{\pi/2} d\theta \frac{1-\cos(2\theta)}{2} = \frac{\pi}{4} - \mathrm{sen}(2\theta)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}\,.$$

Ne consegue che il risultato finale è


$$= \begin{cases} 0 & a < 0 \\ \dfrac{\pi a^7}{2} & a \geq 0 \end{cases}.$$