Metodi Matematici per la Fisica

Prova scritta - 5 settembre 2019

Si risolvano cortesemente i seguenti problemi, sapendo che verranno valutati:

1. la correttezza del risultato ottenuto e della procedura utilizzata;
2. la completezza dei passaggi riportati;
3. il livello di esemplificazione con cui sono espressi i risultati (ad esempio un risultato numerico reale non deve contenere l'unità immaginaria);
4. la correttezza del formalismo utilizzato;
5. la chiarezza dell'esposizione e la leggibilità del testo.

Primo problema (punteggio: 6/30)

Si calcoli l'integrale

$$A = \oint_{P\cup C} \frac{z^2}{\cosh(z)\,\text{sen}(z)}\,dz\,,$$

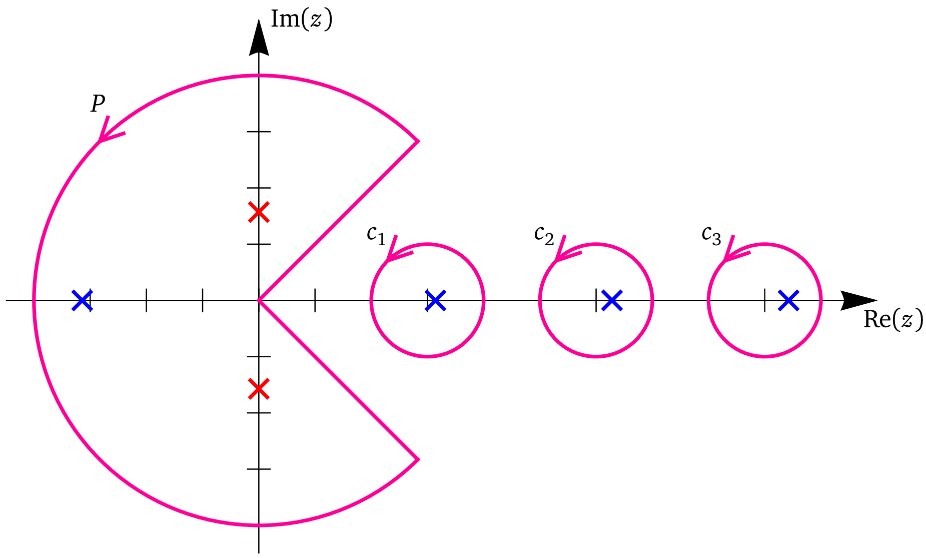
con il percorso di integrazione dato dall'unione dei due insiemi

$$P = \left\{z : z = 4e^{i\theta}, \theta \in [\pi/4, 7\pi/4]\right\} \cup \left\{z : z = re^{i\pi/4}, r \in [0,4]\right\} \cup \left(-\left\{z : z = re^{7i\pi/4}, r \in [0,4]\right\}\right)\,,$$

$$C = \bigcup_{j=1}^{3} c_j = \bigcup_{j=1}^{3} \left\{z : z = 3j + e^{i\sigma}, \sigma \in [0, 2\pi]\right\}\,.$$

Soluzione del primo problema

Il percorso di integrazione è mostrato in figura ed è costituito dall'unione di quattro sotto-percorsi chiusi: tre circonferenze unitarie di centri: $z = 3$, $z = 6$ e $z = 9$ e la frontiera del settore circolare centrato nell'origine di raggio pari a 4 e angolo sotteso $[\pi/4, 7\pi/4]$.



L'integranda è una funzione meromorfa, in quanto rapporto di funzioni intere ed ha poli semplici nei punti degli insiemi $\left\{p_k = (2k+1)i\pi/2\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$ e $\left\{q_j = j\pi\right\}_{j\in\mathbb{Z}/\{0\}}$, evidenziati in figura da delle "X" rispettivamente rosse e blu. Infatti, il primo rappresenta l'insieme degli zeri semplici della funzione coseno iperbolico e il secondo quello della funzione seno ad eccezione dell'origine, che, grazie alla presenza del polinomio a numeratore, rappresenta uno zero semplice della funzione integranda.

All'interno del percorso di integrazione cadono i poli: p_{-1}, p_0, q_{-1}, q_1, q_2 e q_3, quindi, applicando il teorema dei residui si ha

$$A = \oint_{P\cup C} \frac{z^2}{\cosh(z)\,\mathrm{sen}(z)} dz = 2i\pi \left(\mathrm{Res}\left[f(z), p_{-1}\right] + \mathrm{Res}\left[f(z), p_0\right] + \mathrm{Res}\left[f(z), q_{-1}\right] + \sum_{j=1}^{3} \mathrm{Res}\left[f(z), q_j\right] \right) ,$$

dove si è posto

$$f(z) = \frac{z^2}{\cosh(z)\,\mathrm{sen}(z)} .$$

I residui nei punti dell'insieme $\{p_k = (2k+1)i\pi/2\}_{k\in\mathbb{Z}}$ sono

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}\left[f(z), p_k\right] &= \lim_{z\to p_k} \frac{z^2}{\cosh(z)\,\mathrm{sen}(z)}(z-p_k) = \frac{p_k^2}{\mathrm{sen}(p_k)} \lim_{z\to p_k} \frac{z-p_k}{\cosh(z)} = \frac{p_k^2}{\mathrm{sen}(p_k)\mathrm{senh}(p_k)} \\
&= -\frac{(2k+1)^2\pi^2/4}{\mathrm{sen}\left((2k+1)i\pi/2\right)\mathrm{senh}\left((2k+1)i\pi/2\right)} \\
&= -\frac{(2k+1)^2\pi^2/4}{i\,\mathrm{senh}\left((2k+1)\pi/2\right) i\,\mathrm{sen}\left((2k+1)\pi/2\right)} \\
&= (-1)^k \frac{(2k+1)^2\pi^2/4}{\mathrm{senh}\left((2k+1)\pi/2\right)} , \qquad k \in \mathbb{Z} .
\end{aligned}$$

Mentre i residui nei punti dell'insieme $\left\{q_j = j\pi\right\}_{j\in\mathbb{Z}/\{0\}}$ sono

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}\left[f(z), q_j\right] &= \lim_{z\to q_j} \frac{z^2}{\cosh(z)\,\mathrm{sen}(z)}(z-q_j) = \frac{q_j^2}{\cosh(q_j)} \lim_{z\to q_j} \frac{z-q_j}{\mathrm{sen}(z)} = \frac{q_j^2}{\cosh(q_j)\cos(q_j)} \\
&= \frac{j^2\pi^2}{\cosh(j\pi)\cos(j\pi)} \\
&= (-1)^j \frac{j^2\pi^2}{\cosh(j\pi)} , \qquad j \in \mathbb{Z}/\{0\} .
\end{aligned}$$

In definitiva si ha

$$\begin{aligned}
A &= 2i\pi \left(\mathrm{Res}\left[f(z), p_{-1}\right] + \mathrm{Res}\left[f(z), p_0\right] + \mathrm{Res}\left[f(z), q_{-1}\right] + \sum_{j=1}^{3} \mathrm{Res}\left[f(z), q_j\right] \right) \\
&= 2i\pi \left(-\frac{\pi^2/4}{\mathrm{senh}(-\pi/2)} + \frac{\pi^2/4}{\mathrm{senh}(\pi/2)} - \frac{\pi^2}{\cosh(-\pi)} - \frac{\pi^2}{\cosh(\pi)} + \frac{4\pi^2}{\cosh(2\pi)} - \frac{9\pi^2}{\cosh(3\pi)} \right) ,
\end{aligned}$$

da cui, sfruttando le simmetrie delle funzioni iperboliche e trigonometriche, e raccogliendo i termini con lo stesso denominatore,

$$A = 2i\pi^3 \left(\frac{1}{2\,\mathrm{senh}(\pi/2)} - \frac{2}{\cosh(\pi)} + \frac{4}{\cosh(2\pi)} - \frac{9}{\cosh(3\pi)} \right) .$$

Secondo problema (punteggio 6/30)

Si dimostri la formula

$$\sum_{k=0}^{\infty} f(k) = \frac{f(0)}{2} + \int_0^{\infty} f(x)dx + i\int_0^{\infty} \frac{f(iy)-f(-iy)}{e^{2y\pi}-1}dy\,,$$

per ogni funzione $f(z)$ analitica nel dominio D_+ che contiene il semipiano delle parti reali positive e l'asse immaginario, ovvero $D_+ \supset \{z : \mathrm{Re}(z) \geq 0\}$ e tali che

$$\lim_{R\to\infty} z f(z) \overset{\text{unif.}}{=} 0\,,$$

sulla semicirconferenza

$$C_R^+ = \left\{z : z = Re^{i\theta}, \theta \in [-\pi/2, \pi/2]\right\}\,,$$

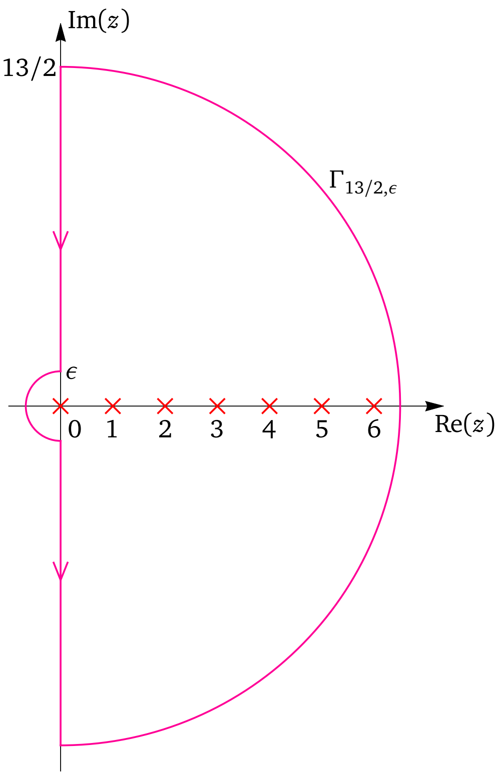
centrata nell'origine, di raggio R e contenuta in D_+.
Suggerimento. Potrebbe essere utile la funzione meromorfa: $F(z) = \left(e^{2i\pi z}-1\right)^{-1}$.

Soluzione del secondo problema

Come suggerito, usiamo la funzione $F(z)$ che ha poli semplici nei punti dell'insieme $\{z_k = k\}_{k\in\mathbb{Z}}$, ovvero l'insieme dei numeri relativi, con residui

$$R_k = \lim_{z\to k} F(z)(z-k) = \lim_{z\to k} \frac{z-k}{e^{2i\pi z}-1} = \frac{1}{2i\pi}\,, \qquad \forall\, k \in \mathbb{Z}\,.$$

Consideriamo il percorso $\Gamma_{n+1/2,\epsilon} \subset D_+$, mostrato in figura nel caso $n=6$, dato dall'unione di due archi centrati nell'origine, rispettivamente di raggi $(n+1/2)$ ed ϵ, e angoli sottesi $[-\pi/2, \pi/2]$ e $[\pi/2, 3\pi/2]$, e due tratti rettilinei disposti lungo l'asse immaginario con estremi ϵ e $(n+1/2)$, il primo e $-(n+1/2)$ ed $-\epsilon$, il secondo.
Usando il teorema dei residui, si ha che l'integrale su tale percorso chiuso della funzione $f(z)F(z)$ è pari a $2i\pi$ volte la somma dei residui relativi ai poli della $F(z)$ avvolti dal percorso stesso, cioè i numeri interi dallo zero a n. Ciò segue dal fatto che la funzione $f(z)$ è analitica in D_+. Si ha quindi



$$\oint_{\Gamma_{n+1/2,\epsilon}} \frac{f(z)}{e^{2i\pi z}-1}dz = 2i\pi \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Res}\left[\frac{f(z)}{e^{2i\pi z}-1}, k\right]\,.$$

Il residuo k-esimo si ottiene da quello della funzione $F(z)$ e vale

$$\mathrm{Res}\left[\frac{f(z)}{e^{2i\pi z}-1}, k\right] = \lim_{z\to k} \frac{f(z)}{e^{2i\pi z}-1}(z-k) = \frac{f(k)}{2i\pi}\,,$$

ne consegue che l'integrale vale

$$\oint_{\Gamma_{n+1/2,\epsilon}} \frac{f(z)}{e^{2i\pi z}-1}dz = \sum_{k=0}^{n} f(k)\,.$$

Nei limiti $\epsilon \to 0^+$ e $n \to \infty$ si ottiene la serie completa

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \lim_{n\to\infty} \oint_{\Gamma_{n+1/2,\epsilon}} \frac{f(z)}{e^{2i\pi z}-1}dz = \sum_{k=0}^{\infty} f(k). \tag{1}$$

L'integrale può essere scritto come somma di tre contributi, due relativi agli archi ed uno alla somma dei tratti rettilinei

$$\lim_{\epsilon\to0^+}\lim_{n\to\infty}\oint_{\Gamma_{n+1/2,\epsilon}}\frac{f(z)}{e^{2i\pi z}-1}dz=\lim_{\epsilon\to0^+}\int_{\gamma_\epsilon}\frac{f(z)}{e^{2i\pi z}-1}dz+\lim_{n\to\infty}\int_{\gamma_{n+1/2}}\frac{f(z)}{e^{2i\pi z}-1}dz+\mathrm{Pr}\int_{i\infty}^{-i\infty}\frac{f(z)}{e^{2i\pi z}-1}dz\,,$$

dove γ_ϵ e $\gamma_{n+1/2}$ sono gli archi di raggi ϵ e $(n+1/2)$, e il valore principale dell'ultimo integrale è relativo alla singolarità nell'origine. Dalla condizione

$$\lim_{R\to\infty}zf(z)\overset{\text{unif.}}{=}0\,,$$

valida sulla semicirconferenza C_R^+, segue che sulla stessa semicirconferenza si ha il limite uniforme

$$\lim_{R\to\infty}\frac{zf(z)}{e^{2i\pi z-1}}\overset{\text{unif.}}{=}0\,,$$

quindi il contributo sull'arco $\gamma_{n+1/2}$ si annulla, cioè

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\gamma_{n+1/2}}\frac{f(z)}{e^{2i\pi z-1}}dz=0\,.$$

Il contributo dato dall'integrale sull'arco γ_ϵ si ottiene come

$$\int_{\gamma_\epsilon}\lim_{\epsilon\to0^+}\frac{f(z)}{e^{2i\pi z-1}}dz=-i\pi\lim_{\epsilon\to0^+}\frac{zf(z)}{e^{2i\pi z-1}}\overset{\text{unif.}}{=}i\pi\frac{f(0)}{2i\pi}=\frac{f(0)}{2}\,.$$

Si è quindi arrivati all'espressione

$$\lim_{\epsilon\to0^+}\lim_{n\to\infty}\oint_{\Gamma_{n+1/2,\epsilon}}\frac{f(z)}{e^{2i\pi z}-1}dz=\frac{f(0)}{2}+\mathrm{Pr}\int_{i\infty}^{-i\infty}\frac{f(z)}{e^{2i\pi z}-1}dz\,. \tag{2}$$

L'integrale in valore principale può essere posto nella forma

$$\mathrm{Pr}\int_{i\infty}^{-i\infty}\frac{f(z)}{e^{2i\pi z}-1}dz=\lim_{\epsilon\to0^+}\left(\int_{i\infty}^{i\epsilon}\frac{f(z)}{e^{2i\pi z}-1}dz+\int_{-i\epsilon}^{-i\infty}\frac{f(z)}{e^{2i\pi z}-1}dz\right)\,,$$

da cui, con le sostituzioni $z=iy$ nel primo e $z=-iy$ nel secondo integrale,

$$\begin{aligned}\mathrm{Pr}\int_{i\infty}^{-i\infty}\frac{f(z)}{e^{2i\pi z}-1}dz&=\lim_{\epsilon\to0^+}\left(i\int_{\infty}^{\epsilon}\frac{f(iy)}{e^{-2\pi y}-1}dy-i\int_{\epsilon}^{\infty}\frac{f(-iy)}{e^{2\pi y}-1}dy\right)\\&=\lim_{\epsilon\to0^+}\left(-i\int_{\epsilon}^{\infty}\frac{f(iy)}{e^{-2\pi y}-1}dy-i\int_{\epsilon}^{\infty}\frac{f(-iy)}{e^{2\pi y}-1}dy\right)\\&=\lim_{\epsilon\to0^+}\left(-i\int_{\epsilon}^{\infty}\frac{f(iy)}{e^{-2\pi y}\left(1-e^{2\pi y}\right)}dy-i\int_{\epsilon}^{\infty}\frac{f(-iy)}{e^{2\pi y}-1}dy\right)\\&=\lim_{\epsilon\to0^+}\left(i\int_{\epsilon}^{\infty}\frac{f(iy)e^{2\pi y}}{e^{2\pi y}-1}dy-i\int_{\epsilon}^{\infty}\frac{f(-iy)}{e^{2\pi y}-1}dy\right)\,.\end{aligned}$$

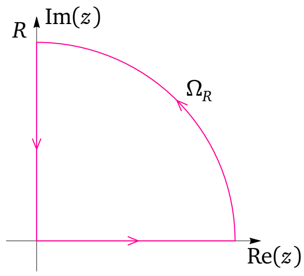
Sommiamo e sottraiamo uno all'esponenziale a numeratore del primo integrale

$$\begin{aligned}\mathrm{Pr}\int_{i\infty}^{-i\infty}\frac{f(z)}{e^{2i\pi z}-1}dz&=\lim_{\epsilon\to0^+}\left(i\int_{\epsilon}^{\infty}\frac{f(iy)\left(e^{2\pi y}-1+1\right)}{e^{2\pi y}-1}dy-i\int_{\epsilon}^{\infty}\frac{f(-iy)}{e^{2\pi y}-1}dy\right)\\&=\lim_{\epsilon\to0^+}\left(i\int_{\epsilon}^{\infty}f(iy)dy+i\int_{\epsilon}^{\infty}\frac{f(iy)}{e^{2\pi y}-1}dy-i\int_{\epsilon}^{\infty}\frac{f(-iy)}{e^{2\pi y}-1}dy\right)\\&=i\int_0^\infty f(iy)dy+\lim_{\epsilon\to0^+}i\int_{\epsilon}^{\infty}\frac{f(iy)-f(-iy)}{e^{2\pi y}-1}dy\\&=i\int_0^\infty f(iy)dy+i\int_0^{\infty}\frac{f(iy)-f(-iy)}{e^{2\pi y}-1}dy\,,\end{aligned} \tag{3}$$

i limiti $\epsilon \to 0^+$ nel primo e secondo integrale sono stati calcolati in quanto le funzioni integrande sono ora analitiche nell'origine. Infatti, la funzione $f(z)$ lo è per definizione, mentre la funzione integranda del secondo integrale ha nell'origine una singolarità eliminabile come si evince dal valore limite

$$\lim_{y\to 0} \frac{f(iy)-f(-iy)}{e^{2\pi y}-1} = \lim_{y\to 0} \frac{f(iy)-f(-iy)}{2\pi y + O(y^2)} = \frac{i}{\pi} f'(0)\,.$$

Infine, il primo integrale dell'espressione di Eq. (3) può essere riscritto usando il teorema di Cauchy sul percorso chiuso Ω_R, mostrato in figura, nel limite $R \to \infty$. Poiché la funzione è analitica nel dominio $\overline{O_R}$, con $\partial O_R = \Omega_R$, per ogni $R > 0$, si ha



$$0 = \oint_{\Omega_R} f(z)dz = \int_0^R f(x)dx + i\int_R^0 f(iy)dy + \int_{\gamma_R} f(z)dz\,.$$

L'identità vale anche nel limite $R \to \infty$, ovvero

$$0 = \lim_{R\to\infty} \oint_{\Omega_R} f(z)dz = \int_0^\infty f(x)dx + i\int_\infty^0 f(iy)dy + \lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R} f(z)dz\,.$$

Ma, come già dimostrato, l'ultimo limite è nullo, quindi

$$0 = \int_0^\infty f(x)dx + i\int_\infty^0 f(iy)dy\,,$$

da cui l'identità

$$i\int_0^\infty f(iy)dy = \int_0^\infty f(x)dx\,,$$

che usata nell'espressione di Eq. (3) dà per l'integrale in valore principale

$$\Pr\int_{i\infty}^{-i\infty} \frac{f(z)}{e^{2i\pi z}-1}dz = i\int_0^\infty f(iy)dy + i\int_0^\infty \frac{f(iy)-f(-iy)}{e^{2\pi y}-1}dy = \int_0^\infty f(x)dx + i\int_0^\infty \frac{f(iy)-f(-iy)}{e^{2\pi y}-1}dy\,.$$

Usando l'espressione di Eq. (1) per scrivere la serie come limite dell'integrale su $\Gamma_{n+1/2,\epsilon}$, quella di Eq. (2) per esprimere l'integrale in termini di $f(0)/2$ e dell'integrale in valore principale, si ha

$$\sum_{k=0}^\infty f(k) = \lim_{\epsilon\to 0^+}\lim_{n\to\infty} \oint_{\Gamma_{n+1/2,\epsilon}} \frac{f(z)}{e^{2i\pi z}-1}dz = \frac{f(0)}{2} + \Pr\int_{i\infty}^{-i\infty} \frac{f(z)}{e^{2i\pi z}-1}dz\,,$$

da cui, scrivendo l'integrale in valore principale secondo il risultato appena ottenuto, si ha la formula cercata

$$\sum_{k=0}^\infty f(k) = \frac{f(0)}{2} + \int_0^\infty f(x)dx + i\int_0^\infty \frac{f(iy)-f(-iy)}{e^{2\pi y}-1}dy\,.$$

Si tratta della cosiddetta formula di Abel-Plana (N. H. Abel, *Solution de quelques problèmes à l'aide d'intégrales définies*, 1823; G. A. A. Plana, *Sur une nouvelle analytique des nombres Bernoulliens, propre à exprimer en termes finis la formule générale pour la sommation des suites*, in Mem. Accad. Sci. Torino, vol. 25, 1820, pp. 403-418.).

Terzo problema (punteggio 6/30)

Si ottenga la serie di Laurent centrata nell'origine e convergente in $z = i$ della funzione

$$g(z) = \frac{z^2-1}{z\left(1+3z^2-4z^6\right)}\,.$$

Soluzione del terzo problema

Oltre all'origine, che rappresenta un polo semplice, la funzione $g(z)$ ha almeno altri sei poli corrispondenti agli zeri del polinomio che a denominatore moltiplica la z. È immediato osservare che nei punti $z = \pm 1$ tale polinomio si annulla, si tratta quindi di zeri. Possiamo fattorizzare

$$1 + 3z^2 - 4z^6 = (z^2 - 1)(az^4 + bz^2 + c) = -c + (c - b)z^2 + (b - a)z^4 + az^6\,,$$

i coefficienti a, b e c sono

$$a = -4\,, \qquad b = a = -4\,, \qquad c = -1\,,$$

quindi

$$1 + 3z^2 - 4z^6 = -(z^2 - 1)(4z^4 + 4z^2 + 1) = -(z^2 - 1)(2z^2 + 1)^2 = -4(z - 1)(z + 1)\left(z - \frac{i}{\sqrt{2}}\right)^2\left(z + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)^2.$$

In definitiva si hanno quattro zeri distinti

$$z_{1,2} = \pm 1\,, \qquad z_{3,4} = \pm\frac{i}{\sqrt{2}}\,,$$

z_1 e z_2 sono semplici, mentre z_3 e z_4 hanno molteplicità due. Alla luce di questi risultati, la funzione può essere riscritta come

$$g(z) = -\frac{1}{z\left(2z^2 + 1\right)^2}\,.$$

Poiché $|z_3| = |z_4| = 1/\sqrt{2}$, si hanno due serie di Laurent centrate nell'origine, convergenti nelle corone $C_{0,1/\sqrt{2}} = \left\{z : 0 < |z| < 1/\sqrt{2}\right\}$ e $C_{1/\sqrt{2},\infty} = \left\{z : 1/\sqrt{2} < |z| < \infty\right\}$. La serie di Laurent richiesta deve convergere in $z = i$, si tratta quindi di quella con dominio $C_{1/\sqrt{2},\infty}$, infatti: $1/\sqrt{2} < |i| = 1 < \infty$.
Riscriviamo la funzione come

$$g(z) = -\frac{1}{z\left(2z^2 + 1\right)^2} = -\frac{1}{4z^5}\frac{1}{\left(1 + \frac{1}{2z^2}\right)^2}\,,$$

il secondo fattore può essere scritto in termini della derivata prima della somma della serie geometrica di ragione $-1/\left(2z^2\right)$, convergente nella corona $C_{1/\sqrt{2},\infty}$. Infatti, $\forall\, z \in C_{1/\sqrt{2},\infty}$ si ha $1/\sqrt{2} < |z| < \infty$, cioè $0 < 1/|z^2| < 2$, da cui si ha la limitazione del modulo della ragione

$$\left|-\frac{1}{2z^2}\right| = \frac{1}{2|z|^2} < 1\,.$$

Come anticipato, la funzione $1/\left(1 + 1/\left(2z^2\right)\right)^2$ è esprimibile come derivata prima di $1/\left(1 + 1/\left(2z^2\right)\right)$ rispetto alla z, infatti

$$\frac{1}{\left(1 + \frac{1}{2z^2}\right)^2} = -\frac{1}{\frac{d}{dz}\frac{1}{2z^2}}\frac{d}{dz}\frac{1}{1 + \frac{1}{2z^2}} = -\frac{1}{-1/z^3}\frac{d}{dz}\sum_{j=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2z^2}\right)^j = z^3\sum_{j=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^j(-2j)z^{-2j-1}\,.$$

Sostituendo nell'espressione della funzione $g(z)$ si ottiene

$$\begin{aligned}g(z) &= -\frac{1}{z\left(2z^2 + 1\right)^2} = -\frac{1}{4z^2}\sum_{j=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^j(-2j)z^{-2j-1} = \sum_{j=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{j+1}(-j)z^{-2j-3} \\ &= \left\{\text{sostituzione} : 2n + 1 = -2j - 3\right\} = \sum_{n=-\infty}^{-3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{-n-1}(n + 2)z^{2n+1} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k z^k\,,\end{aligned}$$

dove i coefficienti di Laurent sono

$$g(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k z^k\,, \qquad C_k = \begin{cases} 0 & k > -3 \text{ e } |k| \text{ pari} \\ \left(-\frac{1}{2}\right)^{-k/2}\left(\frac{k}{2} + 1\right) & k \leq -3 \text{ e } |k| \text{ dispari} \end{cases}.$$

QUARTO PROBLEMA (PUNTEGGIO 6/30)

In uno spazio di Hilbert a N dimensioni è dato l'operatore $\hat{Y}$ che, rispetto alla base canonica, è rappresentato dalla matrice $N \times N$

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

si dimostrati che l'insieme $\sigma_d = \{N, 0, \ldots, 0\}$, contenente il numero naturale N e $N-1$ zero, ne rappresenta lo spettro discreto, ovvero che tale operatore ha solo due autovalori distinti: il numero N, non degenere, e lo zero che ha invece ordine di degenerazione $N-1$.
Infine, si ottenga l'insieme ortonormale degli autovettori nel caso $N = 4$ e da questo si deduca il risultato generale per un valore generico $N \in \mathbb{N}$.

SOLUZIONE DEL QUARTO PROBLEMA

Scriviamo l'equazione agli autovalori

$$Y x = \lambda x\,,$$

dove λ è l'autovalore e x l'autovettore $N \times 1$ corrispondente. Esplicitamente si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^N \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^N \end{pmatrix},$$

da cui si ottiene il sistema di N equazioni

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{N} x^j = \lambda x^1 \\ \sum_{j=1}^{N} x^j = \lambda x^2 \\ \qquad \vdots \\ \sum_{j=1}^{N} x^j = \lambda x^N \end{cases}.$$

Sottraendo membro a membro coppie arbitrarie di equazioni, ad esempio la m-esima alla k-esima, $\forall\, m, k \in \{1, 2, \ldots, N\}$, con $m \neq k$, si ha l'identità

$$0 = \lambda \left(x^k - x^m \right),$$

da cui, nel caso di $\lambda \neq 0$,

$$x^1 = x^2 = \cdots = x^N\,.$$

Ne consegue che c'è un unico autovalore non nullo che ha molteplicità geometrica uno. Indicando con $x^1 = x^2 = \cdots = x^N = 1/\sqrt{N}$ il valore comune delle componenti dell'autovettore normalizzato, da una qualsiasi delle equazione del sistema si ottiene che l'autovalore λ vale N, infatti dalla k-esima si ha

$$\sum_{j=1}^{N} x^j = \lambda x^k \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{N}} = \lambda \frac{1}{\sqrt{N}} \qquad \Rightarrow \qquad \sqrt{N} = \lambda \frac{1}{\sqrt{N}} \qquad \Rightarrow \qquad \lambda = N\,.$$

L'altra possibilià è quella dell'autovalore nullo $\lambda = 0$, gli autovettori corrispondenti sono tutti quelli le cui componenti verificano la condizione

$$\sum_{j=1}^{N} x^j = 0\,.$$

Considerando i vettori che hanno solo due componenti non nulle, al fine di verificare la condizione precedente è necessario che siano opposte. Posto $x^1 = 1/\sqrt{2}$, possiamo considerare l'insieme di $N-1$ vettori che si ottengono ponendo di volta in volta la k-esima componente, con $k = 2, 3, \ldots, N$, uguale a -1 e le altre a zero. Indicando con u_1 l'autovettore di autovalore N e con u_k quelli di autovalore nullo ottenuti con il metodo descritto sopra, si hanno

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots u_N = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Questi vettori sono linearmente indipendenti. In particolare, l'indipendenza lineare degli $N-1$ vettori dell'insieme $\{u_k\}_{k=2}^N$, ovvero degli autovettori che hanno autovalore nullo, implica che tale autovalore ha molteplicità geometrica pari a $N-1$, la sua molteplicità algebrica, essendo maggiore o uguale a quello geometrica, non può che essere pari a $N-1$. Infatti se fosse strettamente maggiore sarebbe pari a N, ovvero lo spettro discreto dovrebbe contenere un solo autovalore: lo zero. Ma abbiamo dimostrato che non è così, avendo anche l'autovalore N. Ciò implica che la molteplicità algebrica dell'autovalore non nullo è pari ad uno.
La matrice Y è hermitinana, quindi l'operatore è normale e ammette un insieme ortonormale di autovettori. Per ottenerlo usiamo il metodo di Gram-Schmidt a partire dall'insieme $\left\{u_j\right\}_{j=1}^N$ i cui vettori sono linearmente indipendenti. In particolare si ha che il primo autovettore, relativo all'autovalore N, è ortogonale a tutti gli altri che sono relativi allo stesso autovalore nullo, è quindi ortogonale ad ogni loro combinazione lineare. Usiamo il metodo di Gram-Schmidt per ottenere un insieme ortogonale $\left\{v'_j\right\}_{j=2}^N$ a partire dall'insieme $\left\{u_j\right\}_{j=2}^N$, escludiamo cioè il primo autovettore. Unendo agli $N-1$ vettori ortogonali v_j, con $j = 2, 3, \ldots, N$, così ottenuti, il vettore u_1 si arriva all'insieme ortogonale completo $\left\{v'_j\right\}_{j=1}^N$, con

$$v'_1 = u_1, \qquad v'_k = u_k - \sum_{m=2}^{k-1} \frac{v'^\dagger_m u_k}{v'^\dagger_m v'_m} v'_m, \qquad k = 2, 3, \ldots, N.$$

Come richiesto, consideriamo il caso con $N = 4$. Il primo e il secondo vettore dell'insieme coincidono rispettivamente con u_1 e u_2,

$$v'_1 = u_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v'_2 = u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

per il terzo e il quarto si hanno

$$v'_3 = u_3 - \frac{v'^\dagger_2 u_3}{v'^\dagger_2 v'_2} v'_2 = u_3 - \frac{u^\dagger_2 u_3}{u^\dagger_2 u_2} u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1/2}{1} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$v'_4 = u_4 - \frac{v^\dagger_2 u_4}{v'^\dagger_2 v'_2} v'_2 - \frac{v'^\dagger_3 u_4}{v'^\dagger_3 v'_3} v'_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1/2}{1} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1/4}{3/4} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Normalizzando si ricava l'insieme ortonormale $\left\{v_j = v'_j/\|v'_j\|\right\}_{j=1}^4$, le cui espressioni matriciali sono

$$v_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \frac{1}{\sqrt{3/2}} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \frac{1}{\sqrt{3/4}} \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Nel caso generico di N dimensioni avremo

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \frac{1}{\sqrt{3/2}} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots \quad v_N = \frac{1}{\sqrt{N/(N-1)}} \begin{pmatrix} 1/(N-1) \\ 1/(N-1) \\ 1/(N-1) \\ \vdots \\ 1/(N-1) \\ -1 \end{pmatrix},$$

ovvero, a parte il primo vettore, la forma generica del j-esimo autovettore è

$$v_j = \frac{1}{\sqrt{j/(j-1)}} \begin{pmatrix} 1/(j-1) \\ \vdots \\ 1/(j-1) \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad j = 2, 3, \ldots, N,$$

le prime $j-1$ componenti sono uguali a $1/(j-1)$, la $(j+1)$-esima è -1 e le ultime $N-j$ sono nulle. Ciò significa che, come si è attenuto, l'N-esimo autovettore non ha componenti nulle.

Quinto problema (punteggio 6/30)

Si calcoli la convoluzione

$$C(k) = e^{-|k|} * \left(e^{-|k|} * e^{-|k|} \right).$$

Suggerimento. Potrebbe essere utile usare le trasformate di Fourier.

Soluzione del quinto problema

È possibile sfruttare le trasformate di Fourier e il teorema della convoluzione nella forma

$$\mathscr{F}_k \left[f_1(x) f_2(x) \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathscr{F}_k \left[f_1(x) \right] * \mathscr{F}_k \left[f_2(x) \right],$$

che per il prodotto di tre funzioni diventa

$$\mathscr{F}_k \left[f_1(x) f_2(x) f_3(x) \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathscr{F}_k \left[f_1(x) \right] * \mathscr{F}_k \left[f_2(x) f_3(x) \right] = \frac{1}{2\pi} \mathscr{F}_k \left[f_1(x) \right] * \left(\mathscr{F}_k \left[f_2(x) \right] * \mathscr{F}_k \left[f_3(x) \right] \right).$$

Nel caso in esame le tre funzioni sono uguali e, indicando con $f(x)$ la funzione che ha trasformata di Fourier uguale a $e^{-|k|}$, cioè

$$e^{-|k|} = \mathscr{F}_k \left[f(x) \right],$$

ovvero $f(x)$ è l'anti-trasformata di Fourierdi $e^{-|k|}$, si ha

$$C(k) = 2\pi \mathscr{F}_k \left[f^3(x) \right].$$

Calcoliamo la funzione $f(x)$

$$f(x) = \mathscr{F}_{-x} \left[e^{-|k|} \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|k|} e^{ikx} dk = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{0} e^{k(ix+1)} dk + \int_{0}^{\infty} e^{k(ix-1)} dk \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{ix+1} + \frac{-1}{ix-1} \right),$$

da cui si ha

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{x^2+1}.$$

La convoluzione cercata è quindi la trasformata di Fourier del cubo di questa funzione

$$
\begin{aligned}
C(k) &= 2\pi\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)^3 \mathscr{F}_k\left[\frac{1}{\left(x^2+1\right)^3}\right] = 2\pi\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)^3 \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ikx}}{\left(x^2+1\right)^3}dx \\
&= \frac{4}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ikx}}{(x-i)^3(x+i)^3}dx = 8i\begin{cases} -\dfrac{1}{2}\dfrac{d^2}{dx^2}\left.\dfrac{e^{-ikx}}{(x-i)^3}\right|_{x=-i} & k>0 \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{d^2}{dx^2}\left.\dfrac{e^{-ikx}}{(x+i)^3}\right|_{x=i} & k<0 \end{cases} \\
&= 4i\begin{cases} -\left.\dfrac{-k^2(x-i)^2+6ik(x-i)+12}{(x-i)^5}e^{-ikx}\right|_{x=-i} & k>0 \\ \left.\dfrac{-k^2(x+i)^2+6ik(x+i)+12}{(x+i)^5}e^{-ikx}\right|_{x=i} & k<0 \end{cases} \\
&= \frac{1}{8}\begin{cases} \left(4k^2+12k+12\right)e^{-k} & k>0 \\ \left(4k^2-12k+12\right)e^{k} & k<0 \end{cases}.
\end{aligned}
$$

Osservando che i termini lineari in k cambiano segno con la stessa variabile k, si può ottenere la forma compatta

$$
C(k) = \frac{k^2+3|k|+3}{2}e^{-|k|}.
$$

Sesto problema (punteggio 6/30)

L'operatore $\hat{A}$ è definito in uno spazio di Hilbert a tre dimensioni dall'azione sui vettori della base ortonormale $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^3$

$$
\hat{A}|e_k\rangle = \frac{1}{2}\sum_{j,m=1}^{3}\epsilon_{kjm}\left(\frac{|e_j\rangle}{j}-\frac{|e_m\rangle}{m}\right), \qquad k=1,2,3,
$$

dove ϵ_{kjm} è il simbolo di Tullio Levi-Civita. Si determinino gli autovalori e gli autovettori, si consideri la rappresentazione rispetto alla base ortonormale data. Infine, si verifichi la diagonalizzabilità dell'operatore.

Soluzione del sesto Problema

Sfruttando le proprietà del simbolo di Levi-Civita, calcoliamo esplicitamente i vettori che si ottengono facendo agire l'operatore sui tre vettori della base

$$
\begin{aligned}
\hat{A}|e_1\rangle &= \frac{1}{2}\left[\underbrace{\epsilon_{123}}_{=1}\left(\frac{|e_2\rangle}{2}-\frac{|e_3\rangle}{3}\right)+\underbrace{\epsilon_{132}}_{=-1}\left(\frac{|e_3\rangle}{3}-\frac{|e_2\rangle}{2}\right)\right] = \frac{|e_2\rangle}{2}-\frac{|e_3\rangle}{3}, \\
\hat{A}|e_2\rangle &= \frac{|e_3\rangle}{3}-|e_1\rangle, \\
\hat{A}|e_3\rangle &= |e_1\rangle-\frac{|e_2\rangle}{2}.
\end{aligned}
$$

La matrice che rappresenta l'operatore rispetto alla base data è

$$
\hat{A}\longleftrightarrow A = \begin{pmatrix} \langle e_1|\hat{A}|e_1\rangle & \langle e_1|\hat{A}|e_2\rangle & \langle e_1|\hat{A}|e_3\rangle \\ \langle e_2|\hat{A}|e_1\rangle & \langle e_2|\hat{A}|e_2\rangle & \langle e_2|\hat{A}|e_3\rangle \\ \langle e_3|\hat{A}|e_1\rangle & \langle e_3|\hat{A}|e_2\rangle & \langle e_3|\hat{A}|e_3\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ -1/3 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}.
$$

L'equazione caratteristica dell'operatore è

$$
\begin{aligned}
\det(A-\lambda I) &= 0 \\
\det\begin{pmatrix} -\lambda & -1 & 1 \\ 1/2 & -\lambda & -1/2 \\ -1/3 & 1/3 & -\lambda \end{pmatrix} &= 0 \\
-\lambda\left(\lambda^2+\frac{1}{6}\right)-\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{\lambda}{3} &= 0 \\
-\lambda\left(\lambda^2+\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\right) &= 0 \\
-\lambda\left(\lambda^2+1\right) &= 0\,,
\end{aligned}
$$

le tre soluzioni sono gli autovalori, ovvero

$$
\lambda_0 = 0\,, \qquad \lambda_\pm = \pm i\,.
$$

Gli autovettori si ottengono risolvendo l'equazione matriciale omogenea

$$
\begin{pmatrix} -\lambda & -1 & 1 \\ 1/2 & -\lambda & -1/2 \\ -1/3 & 1/3 & -\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_\lambda \\ y_\lambda \\ z_\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\,,
$$

rispetto al vettore di componenti x_λ, y_λ e z_λ. Posto $x_\lambda = 1$, si hanno i tre sistemi

$$
\left\{\begin{array}{r} -\lambda - y_\lambda + z_\lambda = 0 \\ 1 - 2\lambda y_\lambda - z_\lambda = 0 \\ -1 + y_\lambda - 3\lambda z_\lambda = 0 \end{array}\right.\,, \qquad \lambda = \lambda_0, \lambda_\pm\,,
$$

le cui soluzioni sono

$$
\left\{\begin{array}{l} x_\lambda = 1 \\ y_\lambda = \dfrac{1-\lambda}{2\lambda+1} = \dfrac{2\lambda^2-3\lambda+1}{1-4\lambda^2} \\ \\ z_\lambda = \dfrac{1+2\lambda^2}{2\lambda+1} = \dfrac{-4\lambda^3+2\lambda^2-2\lambda+1}{1-4\lambda^2} \end{array}\right.\,.
$$

Sostituendo i tre valori $\lambda = \lambda_0, \lambda_\pm = 0, \pm i$ nelle espressioni delle componenti appena ottenute,

$$
v_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\,, \qquad v_\pm = \frac{1}{2\sqrt{2/5}}\begin{pmatrix} 1 \\ (-1\mp 3i)/5 \\ (-1\pm 2i)/5 \end{pmatrix}\,.
$$

Questi autovettori non sono ortogonali ma sono linearmente indipendenti, infatti la matrice che si ottiene allineandone le componenti nelle colonne ha determinante non nullo, in particolare si ha

$$
\det\begin{pmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 1 & -1-3i & -1+3i \\ 1 & -1+2i & -1-2i \end{pmatrix} = 60i \neq 0\,.
$$

L'operatore è diagonalizzabile.