

METODI MATEMATICI PER LA FISICA

PROVA SCRITTA - 5 SETTEMBRE 2018

Si risolvano cortesemente i seguenti problemi, sapendo che verranno valutati:

1. la correttezza del risultato ottenuto e della procedura utilizzata;
2. la completezza dei passaggi riportati;
3. il livello di semplificazione con cui sono espressi i risultati (ad esempio un risultato numerico reale non deve contenere l'unità immaginaria);
4. la correttezza del formalismo utilizzato;
5. la chiarezza dell'esposizione e la leggibilità del testo.

PRIMO PROBLEMA (PUNTEGGIO: 6/30)

Si ottenga l'espressione della funzione

$$f(a) = \int_{L_a} \frac{e^{iz}}{z^4 + 1} dz,$$

con $a \in (-\infty, -1/\sqrt{2}) \cup (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) \cup (1/\sqrt{2}, \infty)$ e dove il percorso d'integrazione L_a è la retta parallela all'asse reale

$$L_a(z) = \{z : \text{Im}(z) = a\}.$$

SOLUZIONE DEL PRIMO PROBLEMA

Si può applicare il lemma di Jordan chiudendo il percorso con la semicirconfenza centrata in $z = ia$ e immersa nel semipiano $S_a^+ = \{z : \text{Im}(z) > a\}$, si ha

$$f(a) = \int_{L_a} \frac{e^{iz}}{z^4 + 1} dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{\Gamma_{a,R}} \frac{e^{iz}}{z^4 + 1} dz,$$

con il percorso chiuso $\Gamma_{a,R}$

$$\Gamma_{a,R} = \{z : z = x + ia, a \in [-R, R]\} \cup \{z : z = ia + Re^{i\theta}, \theta \in [0, \pi]\}.$$

L'integranda ha quattro poli semplici nelle radici quarte di -1 , ovvero

$$z_k = e^{(2k+1)i\pi/4}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Le parti immaginarie dei poli sono: $\text{Im}(z_0) = \text{Im}(z_1) = 1/\sqrt{2}$ e $\text{Im}(z_2) = \text{Im}(z_3) = -1/\sqrt{2}$. Ne consegue che: se $a < -1/\sqrt{2}$ tutti e quattro i poli sono interni a $\Gamma_{a,R}$; se $|a| < 1/\sqrt{2}$ sono interni solo i poli z_0 e z_1 ; infine, se $a > 1/\sqrt{2}$, tutti e quattro i poli sono esterni. Quindi, applicando il teorema dei residui,

$$f(a) = \lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{\Gamma_{a,R}} \frac{e^{iz}}{z^4 + 1} dz = 2i\pi \begin{cases} \sum_{j=0}^3 \text{Res}[z_j] & a < -1/\sqrt{2} \\ \sum_{j=0}^1 \text{Res}[z_j] & |a| < 1/\sqrt{2} \\ 0 & a > 1/\sqrt{2} \end{cases}.$$

Il j -esimo residuo è

$$\text{Res}[z_j] = \frac{e^{iz_j}}{4z_j^3} = \frac{1}{4} \exp\left(e^{(2j+3)i\pi/4} - \frac{3(2j+1)i\pi}{4}\right), \quad j = 0, 1, 2, 3.$$

La loro somma vale

$$\sum_{j=0}^3 \operatorname{Res} [z_j] = \frac{1}{4} \left[\exp \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} - \frac{3i\pi}{4} \right) + \exp \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}} - \frac{i\pi}{4} \right) \right. \\ \left. + \exp \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}} + \frac{i\pi}{4} \right) + \exp \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} + \frac{3i\pi}{4} \right) \right],$$

mettiamo in evidenza $e^{-1/\sqrt{2}-i\pi/2} = -ie^{-1/\sqrt{2}}$ e $e^{1/\sqrt{2}+i\pi/2} = ie^{1/\sqrt{2}}$, rispettivamente, nella somma dei primi due e ultimi due termini,

$$\sum_{j=0}^3 \operatorname{Res} [z_j] = \frac{i}{4} \left[-e^{-1/\sqrt{2}} \left(e^{i(1/\sqrt{2}-\pi/4)} + e^{-i(1/\sqrt{2}-\pi/4)} \right) + e^{1/\sqrt{2}} \left(e^{i(1/\sqrt{2}+\pi/4)} + e^{-i(1/\sqrt{2}+\pi/4)} \right) \right] \\ = \frac{i}{2} \left[-e^{-1/\sqrt{2}} \cos \left(1/\sqrt{2} - \pi/4 \right) + e^{1/\sqrt{2}} \cos \left(1/\sqrt{2} + \pi/4 \right) \right] \\ = \frac{i}{2\sqrt{2}} \left[-e^{-1/\sqrt{2}} \cos \left(1/\sqrt{2} \right) - e^{-1/\sqrt{2}} \operatorname{sen} \left(1/\sqrt{2} \right) + e^{1/\sqrt{2}} \cos \left(1/\sqrt{2} \right) - e^{1/\sqrt{2}} \operatorname{sen} \left(1/\sqrt{2} \right) \right] \\ = \frac{-i}{2\sqrt{2}} \left[\operatorname{sen} \left(1/\sqrt{2} \right) \cosh \left(1/\sqrt{2} \right) - \cos \left(1/\sqrt{2} \right) \sinh \left(1/\sqrt{2} \right) \right].$$

Mentre per la somma dei primi due si ha

$$\sum_{j=0}^1 \operatorname{Res} [z_j] = \frac{1}{4} \left[\exp \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} - \frac{3i\pi}{4} \right) + \exp \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}} - \frac{i\pi}{4} \right) \right] \\ = \frac{e^{-1/\sqrt{2}-i\pi/2}}{4} \left[e^{i/\sqrt{2}-i\pi/4} + e^{-i/\sqrt{2}+i\pi/4} \right] \\ = \frac{e^{-1/\sqrt{2}-i\pi/2}}{2} \cos \left(1/\sqrt{2} - \pi/4 \right) \\ = \frac{-ie^{-1/\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}} \left(\cos \left(1/\sqrt{2} \right) + \operatorname{sen} \left(1/\sqrt{2} \right) \right).$$

In definitiva la funzione cercato è

$$f(a) = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \begin{cases} \operatorname{sen} \left(1/\sqrt{2} \right) \cosh \left(1/\sqrt{2} \right) - \cos \left(1/\sqrt{2} \right) \sinh \left(1/\sqrt{2} \right) & a < -1/\sqrt{2} \\ e^{-1/\sqrt{2}} \left(\cos \left(1/\sqrt{2} \right) + \operatorname{sen} \left(1/\sqrt{2} \right) \right) & |a| < 1/\sqrt{2} \\ 0 & a > 1/\sqrt{2} \end{cases}.$$

SECONDO PROBLEMA (PUNTEGGIO 6/30)

Si calcoli l'integrale in valore principale

$$Q = \operatorname{Pr} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{(3x^2+1)(2x-1)} dx.$$

SOLUZIONE DEL SECONDO PROBLEMA

L'integranda è una funzione poldroma con punti di diramazione in $z = \pm 1$ e tre poli semplici in

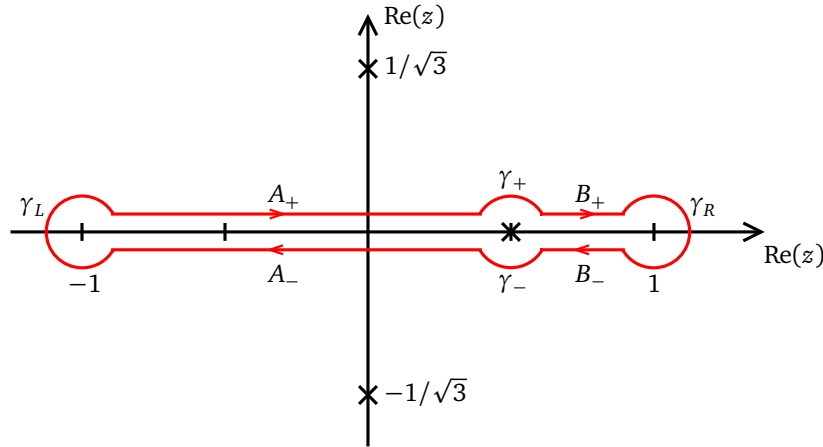
$$z_0 = \frac{1}{2}, \quad z_{1,2} = \pm \frac{i}{\sqrt{3}}.$$

Il polo z_0 appartiene al percorso di integrazione ed è ad esso che si riferisce il valore principale. Consideriamo il percorso di integrazione chiuso Γ mostrato in figura, composto dai quattro tratti rettilinei

$$A_{\pm} = \{z : z = x \pm i\epsilon, x \in (-1 + \epsilon, 1/2 - \epsilon)\}, \quad B_{\pm} = \{z : z = x \pm i\epsilon, x \in (1/2 + \epsilon, 1 - \epsilon)\},$$

e i quattro archi

$$\begin{aligned} \gamma_L &= \{z : z = -1 + \epsilon e^{i\theta}, \theta \in (\epsilon, 2\pi - \epsilon)\}, & \gamma_+ &= \{z : z = 1/2 + \epsilon e^{i\theta}, \theta \in (\epsilon, \pi - \epsilon)\}, \\ \gamma_R &= \{z : z = 1 + \epsilon e^{i\theta}, \theta \in (-\pi + \epsilon, \pi - \epsilon)\}, & \gamma_- &= \{z : z = 1/2 + \epsilon e^{i\theta}, \theta \in (-\epsilon, -\pi - \epsilon)\}. \end{aligned}$$



Studiamo la polidromia della funzione integranda e definiamo la fase della polinomio che compare sotto radice in modo tale che la regione di discontinuità coincida con il percorso di integrazione, ovvero il segmento reale $[-1, 1]$. Fattorizziamo il polinomio nel prodotto di due polinomi di primo grado

$$\sqrt{1-z^2} = \sqrt{f_R(z)f_L(z)}, \quad \begin{cases} f_R(z) = 1-z = |1-z|e^{i\theta_R} & \theta_R \in (-\pi, \pi) \\ f_L(z) = 1+z = |1+z|e^{i\theta_L} & \theta_L \in (0, 2\pi) \end{cases},$$

le fasi sono state scelte in modo tale che le regioni di discontinuità, cioè i tagli generati da $\sqrt{f_R(z)}$ e $\sqrt{f_L(z)}$ siano, rispettivamente, $(1, \infty)$ e $(-1, \infty)$, sono entrambi "in avanti". L'intersezione di queste semirette, coincidente con la prime di esse, $(1, \infty)$, non rappresenta una regione di discontinuità, quindi il taglio per la funzione completa $\sqrt{f_R(z)f_L(z)}$ coincide con il percorso di integrazione $[-1, 1]$. Lo stesso risultato lo avremmo ottenuto invertendo le determinazioni per θ_R e θ_L , ovvero considerando i due tagli $\sqrt{f_R(z)}$ e $\sqrt{f_L(z)}$ "all'indietro". I valori delle fasi sui tratti rettilinei e quelli conseguenti della funzione $\sqrt{1-z^2}$ sono

$$\begin{aligned} \text{su } A_+, B_+ \text{ e } \gamma_+: & \quad (\theta_R, \theta_L) = (0, 0) \quad \Rightarrow \quad \sqrt{1-z^2} = \sqrt{1-x^2}, \\ \text{su } A_-, B_- \text{ e } \gamma_-: & \quad (\theta_R, \theta_L) = (0, 2\pi) \quad \Rightarrow \quad \sqrt{1-z^2} = e^{i\pi} \sqrt{1-x^2} = -\sqrt{1-x^2}. \end{aligned}$$

Nel consegue che nel limite $\epsilon \rightarrow 0^+$ le somme degli integrali sui tratti rettilinei sopra e sotto l'asse reale coincidono con l'integrale cercato

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{A_+ \cup B_+} \frac{\sqrt{1-z^2}}{(3z^2+1)(2z-1)} dz = \text{Pr} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{(3x^2+1)(2x-1)} dx = Q,$$

il segno "-" dovuto alla percorrenza da destra a sinistra dei tratti A_- e B_- è compensato dal segno meno risultante dalla polidromia. Per ciò che concerne l'integrale sul percorso chiuso $\Gamma = \gamma_L \cup A_- \cup \gamma_- \cup B_- \cup \gamma_R \cup B_+ \cup \gamma_+ \cup A_+$, indicando con $f(z)$ la funzione integranda, si ha

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \oint_{-\Gamma} \frac{\sqrt{1-z^2}}{(3z^2+1)(2z-1)} dz &= 2i\pi (\text{Res}[f(z), z_1] + \text{Res}[f(z), z_2] + \text{Res}[f(z), \infty]) \\ &= 2Q - \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{\gamma_-} f(z) dz + \int_{\gamma_+} f(z) dz + \int_{\gamma_L} f(z) dz + \int_{\gamma_R} f(z) dz \right). \end{aligned}$$

Il residuo all'infinito è nullo, infatti

$$\text{Res} [f(z), \infty] = -\text{Res} \left[\frac{f(1/w)}{w^2}, 0 \right] = -\frac{1}{2i\pi} \oint_{\gamma_0} \frac{\sqrt{w^2-1}}{(3+w^2)(2-w)} dw = 0.$$

I residui nei poli semplici z_1 e z_2 sono

$$\text{Res} [f(z), z_{1,2}] = \frac{\sqrt{1-z_{1,2}^2}}{\pm 3(z_1-z_2)(2z_{1,2}-1)}.$$

Dobbiamo valutare la radice nei poli, per il primo, $z_1 = i/\sqrt{3}$, si ha

$$\sqrt{1-z_1^2} = \sqrt{(1-z_1)(1+z_1)} = \sqrt{|1-z_1^2|} e^{i(\theta_R+\theta_L)/2} = \frac{2}{\sqrt{3}} e^{i(\theta_R+\theta_L)/2},$$

le fasi θ_R e θ_L si ottengono, rispettivamente, come arcotangenti del rapporto tra la parte immaginaria e reale di $1-z_1$ e $1+z_1$, devono essere nelle determinazioni scelte, quindi

$$\theta_R = \arctan(-1/\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{6} \in (-\pi, \pi),$$

$$\theta_L = \arctan(1/\sqrt{3}) = \frac{\pi}{6} \in (0, 2\pi),$$

da cui

$$\sqrt{1-z_1^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Usando le stesse argomentazioni, la funzione $\sqrt{1-z^2}$ nel punto $z = z_2 = -i/\sqrt{3}$ vale

$$\sqrt{1-z_2^2} = \sqrt{(1-z_2)(1+z_2)} = \sqrt{|1-z_2^2|} e^{i(\theta_R+\theta_L)/2} = \frac{2}{\sqrt{3}} e^{i(\theta_R+\theta_L)/2},$$

le fasi θ_R e θ_L sono

$$\theta_R = \arctan(1/\sqrt{3}) = \frac{\pi}{6} \in (-\pi, \pi),$$

$$\theta_L = \arctan(-1/\sqrt{3}) = \frac{11\pi}{6} \in (0, 2\pi),$$

da cui

$$\sqrt{1-z_2^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} e^{i\pi} = -\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Per la somma dei residui si ha

$$\begin{aligned} 2i\pi (\text{Res} [f(z), z_1] + \text{Res} [f(z), z_2] + \text{Res} [f(z), \infty]) &= \frac{4i\pi}{3\sqrt{3}(z_1-z_2)} \left(\frac{1}{2z_1-1} + \frac{1}{2z_2-1} \right) \\ &= -\frac{2\pi}{3} \left(\frac{1}{1-2i/\sqrt{3}} + \frac{1}{1+2i/\sqrt{3}} \right) \\ &= -\frac{4\pi}{7}. \end{aligned}$$

I contributi sugli archi γ_L e γ_R sono nulli nel limite $\epsilon \rightarrow 0^+$, mentre per quelli su γ_{\pm} abbiamo

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\gamma_{\pm}} f(z) dz = i\pi \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1-z^2}}{(3z^2+1)(2z-1)} (z-1/2) \Big|_{\gamma_{\pm}} = \frac{i\pi}{7/2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \sqrt{1-z^2} \Big|_{\gamma_{\pm}} = \pm \frac{i\pi\sqrt{3}/4}{7/2} = \pm i\pi \frac{\sqrt{3}}{7},$$

i segni opposti sono conseguenti alla scelta della fasi. Questo risultato rispecchia quanto ottenuto nel caso dei valori della funzione $\sqrt{1-z^2}$ sui tratti rettilinei giacenti sopra e sotto l'asse reale. Poiché i due contributi sono opposti si cancellano, quindi dall'identità precedentemente ottenuta

$$2i\pi (\text{Res} [f(z), z_1] + \text{Res} [f(z), z_2] + \text{Res} [f(z), \infty]) = 2Q - \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{\gamma_-} f(z) dz + \int_{\gamma_+} f(z) dz + \int_{\gamma_L} f(z) dz + \int_{\gamma_R} f(z) dz \right),$$

si ricava il valore di Q

$$Q = i\pi (\text{Res} [f(z), z_1] + \text{Res} [f(z), z_2]) = -\frac{2\pi}{7}.$$

TERZO PROBLEMA (PUNTEGGIO 6/30)

Date le due rappresentazioni

$$R_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos((k+1)\pi/4)}{2^{(k+1)/2}} z^k, \quad R_1(z) = \int_0^{\infty} e^{t(z-1)} \cos(t) dt,$$

si determinino i rispettivi domini di convergenza D_0 e D_1 , e si dimostri che $R_0(z)$ e $R_1(z)$ sono l'una la continuazione analitica dell'altra.

Suggerimento. Potrebbe essere utile il seguente risultato

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-x\alpha} dx = \frac{n!}{\alpha^{n+1}},$$

valido per ogni $n \in \mathbb{N}$ e ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ con $\text{Re}(\alpha) > 0$.

SOLUZIONE DEL TERZO PROBLEMA

Il dominio della serie $R_0(z)$ (teorema di Abel) è un cerchio centrato nell'origine, il cui raggio r_0 può essere determinato con la formula di Cauchy-Hadamard

$$r_0 = \left(\limsup_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{\cos((k+1)\pi/4)}{2^{(k+1)/2}} \right|^{1/k} \right)^{-1} = \left(\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2^{1/(2k)}}{2^{1/2+1/(2k)}} \right)^{-1} = \sqrt{2},$$

quindi

$$D_0 = \{z : |z| < \sqrt{2}\}.$$

L'integranda della rappresentazione $R_1(z)$ non ha singolarità lungo il percorso di integrazione, il semiasse reale positivo. Nell'estremo inferiore $t = 0$, risulta integrabile per ogni valore di $z \in \mathbb{C}$. Nell'estremo superiore, $t \rightarrow \infty$, per avere convergenza è necessario richiedere che il coefficiente della variabile t ad esponente abbia parte reale negativa, cioè $\text{Re}(z-1) < 0$, che implica $\text{Re}(z) < 1$. Segue che il dominio D_1 è il semipiano delle parti reali minori dell'unità, cioè

$$D_1 = \{z : \text{Re}(z) < 1\}.$$

I domini hanno intersezione non vuota, $D_0 \cap D_1 \neq \emptyset$, e quindi per dimostrare che le due rappresentazioni sono l'una la continuazione analitica dell'altra dovremmo verificare la loro coincidenza $\forall z \in D_0 \cap D_1$. A tal fine, osservando che $R_0(z)$ rappresenta anche la serie Taylor della funzione e sapendo che tale serie è unica, calcoliamo quella di $R_1(z)$ nello stesso centro, l'origine, e verifichiamo la coincidenza delle due dall'identità dei coefficienti omologhi. Per ottenere la serie di Taylor di $R_1(z)$ centrata nell'origine riscriviamo la funzione integranda usando l'espressione esponenziale della funzione coseno

$$R_1(z) = \int_0^{\infty} e^{tz} e^{-t} \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} dt = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{tz} (e^{-t(1-i)} + e^{-t(1+i)}) dt$$

e sviluppiamo in serie di Taylor l'esponenziale e^{tz} per ottenere una serie di potenze nella variabile z , ovvero

$$R_1(z) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \int_0^{\infty} t^k (e^{-t(1-i)} + e^{-t(1+i)}) dt.$$

La somma è stata portata fuori dall'integrale in quanto la serie converge uniformemente. L'integrale può essere calcolato usando la formula data nel "suggerimento" con $\alpha = 1 \pm i$, infatti la condizione sulla parte reale del coefficiente α è verificata: $\text{Re}(1 \pm i) = 1 > 0$. In particolare si hanno i due casi

$$\int_0^{\infty} t^k e^{-t(1 \pm i)} = \frac{k!}{(1 \pm i)^{k+1}} = \frac{k!}{(\sqrt{2} e^{\pm i\pi/4})^{k+1}} = \frac{k!}{2^{(k+1)/2}} e^{\mp i(k+1)\pi/4}.$$

Alla luce di questo risultato la serie ottenuta per la funzione $R_1(z)$ può essere riscritta come

$$R_1(z) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \frac{k!}{2^{(k+1)/2}} (e^{i(k+1)\pi/4} + e^{-i(k+1)\pi/4}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos((k+1)\pi/4)}{2^{(k+1)/2}} z^k.$$

Tale serie coincide con la serie $R_0(z)$, ne consegue che $R_1(z)$ rappresenta una continuazione analitica di $R_0(z)$ e viceversa.

QUARTO PROBLEMA (PUNTEGGIO 6/30)

Nello spazio di Hilbert infinito dimensionale E si consideri l'insieme $\{|u_j\rangle\}_{j=1}^{\infty}$ i cui vettori sono definiti in termini di quelli dell'insieme ortonormale e completo $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^{\infty} \subset E$ dalle relazioni

$$|u_1\rangle = \frac{|e_1\rangle + |e_2\rangle + |e_3\rangle}{\sqrt{3}}, \quad |u_2\rangle = \frac{|e_4\rangle + |e_5\rangle + |e_6\rangle}{\sqrt{3}}, \quad \dots, \quad |u_j\rangle = \frac{|e_{3j-2}\rangle + |e_{3j-1}\rangle + |e_{3j}\rangle}{\sqrt{3}}, \quad \dots$$

Si dimostri che:

- l'insieme $\{|u_j\rangle\}_{j=1}^{\infty}$ è ortonormale ma non è completo;
- l'operatore \hat{R} , definito dalla sua azione sui vettori dell'insieme $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^{\infty}$

$$\hat{R}|e_j\rangle = |u_j\rangle, \quad j \in \mathbb{N},$$

è isometrico ma non è unitario.

SOLUZIONE DEL QUARTO PROBLEMA

Per dimostrare che l'insieme $\{|u_j\rangle\}_{j=1}^{\infty}$ è ortonormale calcoliamo il prodotto scalare di una coppia generica

$$\begin{aligned} \langle u_k | u_j \rangle &= \frac{1}{3} (\langle e_{3k-2} | + \langle e_{3k-1} | + \langle e_{3k} |) (|e_{3j-2}\rangle + |e_{3j-1}\rangle + |e_{3j}\rangle) \\ &= \frac{1}{3} (3\delta_j^k + \delta_{3j-1}^{3k-2} + \delta_{3j}^{3k-2} + \delta_{3j-2}^{3k-1} + \delta_{3j}^{3k-1} + \delta_{3j-2}^{3k} + \delta_{3j-1}^{3k}) \\ &= \frac{1}{3} (3\delta_j^k + \delta_{j+1/3}^k + \delta_{j+2/3}^k + \delta_{j-1/3}^k + \delta_{j+1/3}^k + \delta_{j-2/3}^k + \delta_{j-1/3}^k) \\ &= \delta_j^k, \quad k, j \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

I prodotti misti sono nulli in quanto, per $k \neq j$ le terne di vettori dell'insieme ortonormale $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^{\infty}$ sono disgiunte (sono nulli tutti i prodotti), mentre per $k = j$ i vettori dei prodotti misti hanno indici diversi.

Per dimostrare che, nonostante l'ortonormalità, l'insieme $\{|u_j\rangle\}_{j=1}^{\infty}$ non è completo, osserviamo che esiste almeno un vettore diverso dal vettore nullo ortogonale e tutti i vettori dell'insieme stesso. Consideriamo il vettore $|v\rangle \in E$, che ha prodotto scalare nullo con tutti i vettori dell'insieme $\{|u_j\rangle\}_{j=1}^{\infty}$. Usando la sua rappresentazione $|v\rangle = v^k |e_k\rangle$ rispetto all'insieme $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^{\infty}$, dove le componenti sono $v^k = \langle e_k | v \rangle$, si ha che, $\forall j \in \mathbb{N}$,

$$0 = \langle u_j | v \rangle = v^k \langle u_j | e_k \rangle = v^k \frac{\langle e_{3j-2} | e_k \rangle + \langle e_{3j-1} | e_k \rangle + \langle e_{3j} | e_k \rangle}{\sqrt{3}} = v^k \frac{\delta_k^{3j-2} + \delta_k^{3j-1} + \delta_k^{3j}}{\sqrt{3}} = \frac{v^{3j-2} + v^{3j-1} + v^{3j}}{\sqrt{3}}.$$

Esistono infinite terne $(v^{3j-2}, v^{3j-1}, v^{3j})$ non nulle che verificano questa identità. Ad esempio, scegliendo

$$(v^{3j-2}, v^{3j-1}, v^{3j}) = (1, -1, 0),$$

per ogni $j \in \mathbb{N}$, si ottiene il vettore

$$|v\rangle = |e_1\rangle - |e_2\rangle + |e_4\rangle - |e_5\rangle + \dots + |e_{3j-2}\rangle - |e_{3j-1}\rangle + \dots,$$

che è diverso dal vettore nullo e ortogonale a tutti i vettori dell'insieme $\{|u_j\rangle\}_{j=1}^{\infty}$, che, di conseguenza, non è completo.

L'operatore \hat{R} è isometrico se conserva il prodotto scalare, cioè se per ogni coppia di vettori $|v\rangle, |w\rangle \in E$ si ha

$$\langle v|w\rangle = \langle v|\hat{R}^\dagger \hat{R}|w\rangle.$$

Usando le rappresentazioni dei vettori $|v\rangle$ e $|w\rangle$ rispetto a $\{|e_j\rangle\}_{k=1}^{\infty}$ e la definizione dell'operatore \hat{R} in termini della sua azione sui vettori dello stesso insieme $\{|e_j\rangle\}_{k=1}^{\infty}$, i prodotti scalari dei vettori e delle immagini tramite l'operatore \hat{R} possono essere scritti come

$$\begin{aligned} \begin{aligned} |v\rangle &= v^k |e_k\rangle \\ |w\rangle &= w^m |e_m\rangle \end{aligned} & \Rightarrow & \langle v|w\rangle &= v^{k*} w^m \underbrace{\langle e_k|e_m\rangle}_{\delta_m^k} = \sum_{k=1}^{\infty} v^{k*} w^m \delta_m^k = \sum_{k=1}^{\infty} v^{k*} w^k, \\ \begin{aligned} \hat{R}|v\rangle &= v^k \hat{R}|e_k\rangle = v^k |u_k\rangle \\ \hat{R}|w\rangle &= w^k \hat{R}|e_m\rangle = w^m |u_m\rangle \end{aligned} & \Rightarrow & \langle v|\hat{R}^\dagger \hat{R}|w\rangle &= v^{k*} w^m \underbrace{\langle u_k|u_m\rangle}_{\delta_m^k} = \sum_{k=1}^{\infty} v^{k*} w^m \delta_m^k = \sum_{k=1}^{\infty} v^{k*} w^k, \end{aligned}$$

nell'ultima identità si è usata l'ortonormalità dell'insieme $\{|u_j\rangle\}_{j=1}^{\infty}$. Poiché i prodotti scalari di due vettori generici e delle loro immagini tramite \hat{R} coincidono l'operatore è isometrico.

Infine, per dimostrare che \hat{R} non è unitario mostriamo che almeno uno dei prodotti $\hat{R}^\dagger \hat{R}$ e $\hat{R} \hat{R}^\dagger$ è diverso dall'identità. A tal fine usiamo la rappresentazione matriciale di \hat{R} rispetto all'insieme $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^{\infty}$. Detta R la matrice che rappresenta l'operatore, l'elemento generico (k, m) è dato da

$$R_m^k = \langle e_k|\hat{R}|e_m\rangle = \langle e_k|u_m\rangle = \frac{\langle e_k|e_{3m-2}\rangle + \langle e_k|e_{3m-1}\rangle + \langle e_k|e_{3m}\rangle}{\sqrt{3}} = \frac{\delta_{3m-2}^k + \delta_{3m-1}^k + \delta_{3m}^k}{\sqrt{3}}, \quad k, m \in \mathbb{N}.$$

La matrice infinito dimensionale ha la forma

$$R = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}.$$

Poiché R è una matrice reale, l'aggiunta coincide con la trasposta, cioè

$$R^\dagger = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix},$$

ovvero l'elemento (k, m) della matrice R^\dagger è

$$(R^\dagger)_m^k = R_k^m = \frac{\delta_{3k-2}^m + \delta_{3k-1}^m + \delta_{3k}^m}{\sqrt{3}}, \quad k, m \in \mathbb{N}.$$

Si vede facilmente che solo il prodotto $R^\dagger R$ è uguale all'identità, infatti

$$R^\dagger R = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 3 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}.$$

Mentre per il prodotto RR^\dagger si ha

$$RR^\dagger = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}.$$

In definitiva si ha $RR^\dagger \neq R^\dagger R = I$, ciò dimostra che la matrice R e quindi l'operatore \hat{R} non sono unitari.

QUINTO PROBLEMA (PUNTEGGIO 6/30)

Si determinino gli autovalori, gli autovettori e la norma dell'operatore \hat{A} definito nello spazio di Hilbert a sei dimensioni E_6 dalle azioni sui vettori di una base ortonormale $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^6$

$$\begin{aligned} \hat{A}|e_1\rangle &= |e_6\rangle, \\ \hat{A}|e_k\rangle &= |e_{k-1}\rangle, \quad k = 2, 3, \dots, 6. \end{aligned}$$

SOLUZIONE DEL QUINTO PROBLEMA

La matrice A che rappresenta l'operatore \hat{A} rispetto alla base ortonormale $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^6$ ha elementi $A_j^k = \langle e_k | \hat{A} | e_j \rangle$, con $k, j = 1, 2, \dots, 6$, si ha quindi

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Gli autovalori si ottengono come soluzione dell'equazione caratteristica

$$\begin{aligned} \det(A - I\lambda) &= 0 \\ \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} &= 0 \\ -\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda \\ -\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & 1 \end{pmatrix} &= 0 \\ -1 + \lambda^6 &= 0. \end{aligned}$$

Le soluzioni sono le sei radici seste dell'unità

$$\lambda_k = e^{(k-1)i\pi/3}, \quad k = 1, 2, \dots, 6.$$

Più in dettaglio e in rappresentazione cartesiana

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_{2,3} = \frac{\pm 1 + i\sqrt{3}}{2}, \quad \lambda_4 = -1, \quad \lambda_{5,6} = \frac{\mp 1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

Gli autovettori possono essere ottenuti direttamente dalla definizione dell'azione dell'operatore. La k -esima equazione agli autovalori è

$$\hat{A}|a_k\rangle = \lambda_k|a_k\rangle, \quad k = 1, 2, \dots, 6,$$

usando la rappresentazione $|a_k\rangle = a_{(k)}^j|e_j\rangle$, si ottiene

$$\hat{A}|a_k\rangle = a_{(k)}^1|e_6\rangle + a_{(k)}^2|e_1\rangle + a_{(k)}^3|e_2\rangle + a_{(k)}^4|e_3\rangle + a_{(k)}^5|e_4\rangle + a_{(k)}^6|e_5\rangle = \lambda_k a_{(k)}^j|e_j\rangle$$

da cui, posto $a_{(k)}^1 = 1$, per ogni $k = 1, 2, \dots, 6$, si ottengono le componenti degli autovettori non normalizzati

$$\begin{aligned} a_{(k)}^2 &= \lambda_k a_{(k)}^1 = \lambda_k = e^{(k-1)i\pi/3}, \\ a_{(k)}^3 &= \lambda_k a_{(k)}^2 = \lambda_k^2 = e^{2(k-1)i\pi/3}, \\ a_{(k)}^4 &= \lambda_k a_{(k)}^3 = \lambda_k^3 = e^{(k-1)i\pi}, \\ a_{(k)}^5 &= \lambda_k a_{(k)}^4 = \lambda_k^4 = e^{4(k-1)i\pi/3}, \\ a_{(k)}^6 &= \lambda_k a_{(k)}^5 = \lambda_k^5 = e^{5(k-1)i\pi/3}, \\ a_{(k)}^1 &= \lambda_k a_{(k)}^6 = \lambda_k^6 = 1. \end{aligned}$$

La rappresentazione matriciale rispetto alla base $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^6$ del j -esimo autovettore normalizzato è

$$a_j = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_j \\ \lambda_j^2 \\ \lambda_j^3 \\ \lambda_j^4 \\ \lambda_j^5 \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, \dots, 6,$$

dove si è fatto uso del fatto che tutti gli autovalori sono fasi pure e quindi hanno modulo unitario. Per lo stesso motivo la norma dell'operatore è unitaria. Ciò si evince anche dal fatto che l'operatore è isometrico, infatti, per una coppia generica di vettori $|x\rangle, |y\rangle \in E_6$, si ha

$$\langle x|\hat{A}^\dagger\hat{A}|y\rangle = \left(x^{1*}\langle e_6| + \sum_{k=2}^6 x^{k*}\langle e_{k-1}| \right) \left(y^1|e_6\rangle + \sum_{j=2}^6 y^j|e_{j-1}\rangle \right) = \sum_{k=1}^6 x^{k*}y^k = \langle x|y\rangle.$$

Quindi

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \{ \|\hat{A}|x\rangle\| \} = 1,$$

l'operatore è isometrico, per cui, per ogni $|x\rangle \in E_6$ con $\|x\| = 1$, si ha $\|\hat{A}|x\rangle\| = \|x\| = 1$.

SESTO PROBLEMA (PUNTEGGIO 6/30)

Si calcolino le trasformate di Fourier delle convoluzioni

$$f_1(x) = (x\delta'(x) * \theta(x)), \quad f_2(x) = (\delta'(x) * x\theta(x))$$

e si verifichi che sono opposte.

Suggerimento. La trasformata di Fourier della funzione θ di Heaviside è

$$\mathcal{F}_k[\theta(x)] = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{i\pi k} + \delta(k) \right).$$

SOLUZIONE DEL SESTO PROBLEMA

Usando il teorema della convoluzione si hanno

$$\tilde{f}_1(k) \equiv \mathcal{F}_k[f_1(x)] = \sqrt{2\pi} \mathcal{F}_k[x\delta'(x)] \mathcal{F}_k[\theta(x)], \quad \tilde{f}_2(k) \equiv \mathcal{F}_k[f_2(x)] = \sqrt{2\pi} \mathcal{F}_k[\delta'(x)] \mathcal{F}_k[x\theta(x)].$$

La prima trasformata di Fourier (TF) di $\tilde{f}_1(k)$ si ottiene sfruttando le formule

$$\mathcal{F}_k[x^n g(x)] = i^n \frac{d^n}{dk^n} \mathcal{F}_k[g(x)], \quad \mathcal{F}_k\left[\frac{d^m g}{dx^m}\right] = (ik)^m \mathcal{F}_k[g(x)], \quad n, m \in \mathbb{N}, \quad (1)$$

entrambe nei casi più semplici cioè con $n = m = 1$, infatti si ha

$$\mathcal{F}_k[x\delta'(x)] = i \frac{d}{dk} \mathcal{F}_k[\delta'(x)] = -\frac{d}{dk} (k \mathcal{F}_k[\delta(x)]) = -\frac{d}{dk} \left(k \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

La TF della funzione θ di Heaviside è data, quindi il primo risultato è

$$\tilde{f}_1(k) = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{i\pi k} + \delta(k) \right).$$

La prima TF di $\tilde{f}_2(k)$, ovvero la TF della derivata prima della delta di Dirac è

$$\mathcal{F}_k[\delta'(x)] = ik \mathcal{F}_k[\delta(x)] = \frac{ik}{\sqrt{2\pi}}.$$

Per ottenere la seconda TF di $\tilde{f}_2(k)$ si usa la prima formula di Eq. (1) con $n = 1$ e la TF delle θ di Heaviside, ovvero

$$\mathcal{F}_k[x\theta(x)] = i \frac{d}{dk} \mathcal{F}_k[\theta(x)] = i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{d}{dk} \left(\frac{1}{i\pi k} + \delta(k) \right) = i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(-\frac{1}{i\pi k^2} + \delta'(k) \right).$$

Moltiplicando questi due risultati si ricava la seconda TF

$$\tilde{f}_2(k) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{i\pi k} - k\delta'(k) \right).$$

Anche se in questa forma non è evidente, essa rappresenta l'opposto della prima TF, poiché il prodotto $k\delta'(k)$ coincide con $-\delta(k)$. Lo si può verificare derivando l'identità formale $k\delta(k) = 0$, in particolare

$$0 = \frac{d}{dk} (k\delta(k)) = \delta(k) + k\delta'(k) \quad \Rightarrow \quad k\delta'(k) = -\delta(k).$$

Usando questo risultato nell'espressione di $\tilde{f}_2(k)$ si ottiene in forma evidente la relazione richiesta,

$$\tilde{f}_2(k) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{i\pi k} + \delta(k) \right) = -\tilde{f}_1(k).$$

È possibile arrivare allo stesso risultato calcolando direttamente le convoluzioni. La prima vale

$$\begin{aligned} f_1(x) &= (x\delta'(x) * \theta(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} \theta(x-y) y \delta'(y) dy \\ &= \theta(x-y) y \delta(y) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \delta(y) (\theta(x-y) - y \delta(x-y)) dy \\ &= 0 - \theta(x) + x\delta(x) = -\theta(x). \end{aligned}$$

La seconda è opposta, infatti

$$\begin{aligned} f_2(x) &= (\delta'(x) * x\theta(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} \theta(x-y)(x-y)\delta'(y)dy \\ &= \theta(x-y)(x-y)\delta(y)|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \delta(y) \left(-\theta(x-y) - (x-y)\delta(x-y) \right) dy \\ &= 0 + \theta(x) + x\delta(x) = \theta(x). \end{aligned}$$