# Metodi Matematici per la Fisica

## Prova scritta - 5 settembre 2014

Si svolgano cortesemente i seguenti esercizi.

## Esercizio 1 (6 punti)

Si calcoli l'integrale

$$T = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{z+i}}{z^4 - 6z^2 + 25} dz \,,$$

dove $i$ è l'unità immaginaria.

### Soluzione 1

La funzione integranda è polidroma, con punti di diramazione in $z = -i$ e $z = \infty$. Consideriamo quindi, come dominio di analiticità, il piano complesso con il taglio lungo l'asse immaginario negativo $(-i\infty, -i)$. In questo caso è possibile applicare il lemma di Jordan nel semipiano $\mathrm{Im}(z) > 0$, che non contiene il taglio.
In particolare, indicando con $\Gamma_R$ il cammino chiuso $\Gamma_R = \{z : z = Re^{i\theta} : \theta \in (0, \pi)\} \cup [-R, R]$, ovvero la frontiera del semicerchio centrato nell'origine, di raggio $R$ e appartenente al semipiano $\mathrm{Im}(z) > 0$, si ha

$$\lim_{R\to\infty} \oint_{\Gamma_R} \frac{\sqrt{z+i}}{z^4 - 6z^2 + 25} dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{z+i}}{z^4 - 6z^2 + 25} dz \,.$$

L'integrale a primo membro può essere risolto usando il teorema dei residui. L'integranda ha quattro poli semplici, le due coppie di complessi coniugati

$$z_1 = 2 + i \,, \qquad z_2 = -2 + i \,, \qquad z_3 = -2 - i \,, \qquad z_4 = 2 - i \,.$$

Ne consegue che

$$\begin{aligned}
T &= \lim_{R\to\infty} \oint_{\Gamma_R} \frac{\sqrt{z+i}}{z^4 - 6z^2 + 25} dz = 2i\pi \left( \mathrm{Res}\left[ \frac{\sqrt{z+i}}{z^4 - 6z^2 + 25}, z_1 \right] + \mathrm{Res}\left[ \frac{\sqrt{z+i}}{z^4 - 6z^2 + 25}, z_2 \right] \right) \\
&= 2i\pi \left( \mathrm{Res}\left[ \frac{\sqrt{z+i}}{z^4 - 6z^2 + 25}, z_0 \right] + \mathrm{Res}\left[ \frac{\sqrt{z+i}}{z^4 - 6z^2 + 25}, z_1 \right] \right) \\
&= 2i\pi \left( \frac{\sqrt{z_0 + i}}{4z_0(z_0^2 - 3)} + \frac{\sqrt{z_1 + i}}{4z_1(z_1^2 - 3)} \right) = \frac{i\pi}{2} \left( \frac{\sqrt{2}\sqrt{1+i}}{z_0(z_0^2 - 3)} + \frac{\sqrt{2}\sqrt{-1+i}}{z_1(z_1^2 - 3)} \right) \\
&= \frac{\pi}{2^3} \left( \frac{\sqrt{2}\sqrt{1+i}}{2+i} + \frac{\sqrt{2}\sqrt{-1+i}}{2-i} \right) = 2^{-1/4}\pi \left( \frac{e^{i\pi/8}}{2+i} + \frac{e^{3i\pi/8}}{2-i} \right) \\
&= \frac{2^{-9/4}\pi}{5} \left[ e^{i\pi/8}(2-i) + e^{3i\pi/8}(2+i) \right] = \frac{2^{-9/4}\pi}{5} e^{i\pi/4} \left[ e^{-i\pi/8}(2-i) + e^{i\pi/8}(2+i) \right] \\
&= \frac{2^{-9/4}\pi}{5} e^{i\pi/4} \left[ 4\cos(\pi/8) - 2\mathrm{sen}(\pi/8) \right] = \frac{2^{-5/4}\pi}{5} e^{i\pi/4} \left[ 2\cos(\pi/8) - \mathrm{sen}(\pi/8) \right] ,
\end{aligned}$$

quindi il risultato finale è

$$T = \frac{2^{-5/4}\pi}{5} e^{i\pi/4} \left[ 2\cos(\pi/8) - \mathrm{sen}(\pi/8) \right] .$$

## Esercizio 2 (5 punti)

Si dimostri l'identità

$$\oint_{\gamma_w} dw \oint_{\gamma_z} dz \, \frac{w\,\Gamma(w)\Gamma(z)}{z+w-1} = -4\pi^2 \,,$$

con $\gamma_z = \{z : z = re^{i\theta}, 0 < r < 1, \theta \in (0, 2\pi)\}$ e $\gamma_w = \{w : w = 1 + Re^{i\phi}, r < R < 1, \phi \in (0, 2\pi)\}$.

## Soluzione 2

La circonferenza $\gamma_w$ contiene sempre $(1-\gamma_z)$, ovvero la distanza di un generico punto $z \in (1-\gamma_z)$ dal centro di $\gamma_w$, $z = 1$, è sempre minore del suo raggio $R$. Infatti, $\forall\, z \in (1-\gamma_z)$

$$\left|(1-z)-1\right| = \left|-re^{i\theta}\right| = r < R \,.$$

Possiamo applicare il teorema di Cauchy all'integrale in $dw$ e, in particolare, si ha

$$\oint_{\gamma_w} dw \, \frac{w\,\Gamma(w)\Gamma(z)}{z+w-1} = \oint_{\gamma_w} dw \, \frac{f(w)\Gamma(z)}{w-w_0} = 2i\pi\,\Gamma(z) f(w_0) = 2i\pi\,\Gamma(z)\Gamma(1-z)(1-z)\,,$$

dove $w_0 = 1-z$ e $f(w) = w\,\Gamma(w)$ non ha singolarità all'interno $\gamma_w$. Sfruttiamo l'identità

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}\,,$$

per calcolare l'integrale in $dz$ come

$$2i\pi \oint_{\gamma_z} dz\,(1-z)\,\Gamma(1-z)\Gamma(z) \;=\; 2i\pi^2 \oint_{\gamma_z} dz\,\frac{1-z}{\operatorname{sen}(\pi z)} = 2i\pi^2 \oint_{\gamma_z} dz\,\frac{1-z}{\pi z}\,\frac{\pi z}{\operatorname{sen}(\pi z)} = -4\pi^2\,.$$

Facendo per prima l'integrazione in $dz$ si avrebbe:

$$\oint_{\gamma_w} dw \oint_{\gamma_z} dz\,\frac{w\,\Gamma(w)\Gamma(z)}{z+w-1} = 2i\pi \oint_{\gamma_w} dw\,\left.\frac{w\,\Gamma(w)\Gamma(z)}{z+w-1}\right|_{z=0} = 2i\pi \oint_{\gamma_w} dw\,\frac{w\,\Gamma(w)}{w-1} = -4\pi^2\Gamma(1) = -4\pi^2\,.$$

Nell'integrazione in $dz$ si è sfruttato il fatto che in $\gamma_z$ cade solo il polo semplice, in $z = 0$, della $\Gamma(z)$, che ha residuo uguale ad uno. Per ciò che riguarda invece l'integrazione in $dw$ si considera solo il polo in $w = 1$, il polo nell'origine di $\Gamma(w)$ non appartiene al percorso di integrazione (essendo il raggio di $\gamma_w$, $R < 1$). È interessante osservare che, se anche tale polo cadesse all'interno di $\gamma_w$, non si avrebbe nessun effetto perché sarebbe eliminato dal fattore $w$ a numeratore, ovvero potremmo considerare anche $r < R < 2$.

## Esercizio 3 (6 punti)

Usando il teorema della somma totale dei residui si dimostri

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^4+1} = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\,\frac{\operatorname{sen}(\pi/\sqrt{2})\cosh(\pi/\sqrt{2}) + \cos(\pi/\sqrt{2})\sinh(\pi/\sqrt{2})}{\operatorname{sen}^2(\pi/\sqrt{2})\cosh^2(\pi/\sqrt{2}) + \cos^2(\pi/\sqrt{2})\sinh^2(\pi/\sqrt{2})}\,.$$

## Soluzione 3

Si considera, ad esempio, la funzione

$$f(z) = \frac{1}{\operatorname{sen}(\pi z)(z^4+1)}\,,$$

che ha infiniti poli semplici. In particolare, si hanno i quattro poli dovuti al polinomio a denominatore che sono

$$p_0 = e^{i\pi/4}, \qquad p_1 = e^{3i\pi/4}, \qquad p_2 = e^{5i\pi/4}, \qquad p_3 = e^{7i\pi/4},$$

e l'insieme $\{k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ dei numeri relativi, dovuti alla funzione seno. Per il teorema della somma totale dei residui si ha

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{Res}[f(z),k] + \sum_{j=0}^{3} \mathrm{Res}[f(z),p_j] = 0\,.$$

I residui in corrispondenza dei poli $k \in \mathbb{Z}$ sono

$$\mathrm{Res}[f(z),k] = \frac{(-1)^k}{\pi}\frac{1}{k^4+1}\,,$$

mentre quelli dei poli $p_j$, $j = 0,1,2,3$, sono

$$\mathrm{Res}[f(z),p_j] = \frac{1}{\mathrm{sen}(\pi p_j)}\frac{1}{4p_j^3} = -\frac{p_j}{4\,\mathrm{sen}(\pi p_j)}\,,$$

l'ultima identità si ottiene sfruttando poiché $p_j^4 + 1 = 0$, per ogni $j = 0,1,2,3$. In particolare si hanno:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}[f(z),p_0] &= -\frac{e^{i\pi/4}}{4\,\mathrm{sen}\left(\pi e^{i\pi/4}\right)} = -\frac{1}{4\sqrt{2}}\,\frac{1+i}{\mathrm{sen}(\pi/\sqrt{2})\cosh(\pi/\sqrt{2}) + i\,\cos(\pi/\sqrt{2})\mathrm{senh}(\pi/\sqrt{2})}\\
\mathrm{Res}[f(z),p_3] &= -\frac{e^{7i\pi/4}}{4\,\mathrm{sen}\left(\pi e^{7i\pi/4}\right)} = -\frac{1}{4\sqrt{2}}\,\frac{1-i}{\mathrm{sen}(\pi/\sqrt{2})\cosh(\pi/\sqrt{2}) - i\,\cos(\pi/\sqrt{2})\mathrm{senh}(\pi/\sqrt{2})}\\
\mathrm{Res}[f(z),p_1] &= -\frac{e^{3i\pi/4}}{4\,\mathrm{sen}\left(\pi e^{3i\pi/4}\right)} = -\frac{1}{4\sqrt{2}}\,\frac{-1+i}{-\mathrm{sen}(\pi/\sqrt{2})\cosh(\pi/\sqrt{2}) + i\,\cos(\pi/\sqrt{2})\mathrm{senh}(\pi/\sqrt{2})}\\
\mathrm{Res}[f(z),p_2] &= -\frac{e^{5i\pi/4}}{4\,\mathrm{sen}\left(\pi e^{5i\pi/4}\right)} = -\frac{1}{4\sqrt{2}}\,\frac{-1-i}{-\mathrm{sen}(\pi/\sqrt{2})\cosh(\pi/\sqrt{2}) - i\,\cos(\pi/\sqrt{2})\mathrm{senh}(\pi/\sqrt{2})}\,,
\end{aligned}$$

sono, come detto, coppie di complessi coniugati, quindi sommando

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{3}\mathrm{Res}[f(z),p_j] &= -\frac{1}{2\sqrt{2}}\mathrm{Re}\left[\frac{1+i}{\mathrm{sen}(\pi/\sqrt{2})\cosh(\pi/\sqrt{2}) + i\,\cos(\pi/\sqrt{2})\mathrm{senh}(\pi/\sqrt{2})}\right]\\
&\quad -\frac{1}{2\sqrt{2}}\mathrm{Re}\left[\frac{-1+i}{-\mathrm{sen}(\pi/\sqrt{2})\cosh(\pi/\sqrt{2}) + i\,\cos(\pi/\sqrt{2})\mathrm{senh}(\pi/\sqrt{2})}\right]\\
&= -\frac{1}{2\sqrt{2}}\,\frac{\mathrm{sen}(\pi/\sqrt{2})\cosh(\pi/\sqrt{2}) + \cos(\pi/\sqrt{2})\mathrm{senh}(\pi/\sqrt{2})}{\mathrm{sen}^2(\pi/\sqrt{2})\cosh^2(\pi/\sqrt{2}) + \cos^2(\pi/\sqrt{2})\mathrm{senh}^2(\pi/\sqrt{2})}\\
&\quad -\frac{1}{2\sqrt{2}}\,\frac{\mathrm{sen}(\pi/\sqrt{2})\cosh(\pi/\sqrt{2}) + \cos(\pi/\sqrt{2})\mathrm{senh}(\pi/\sqrt{2})}{\mathrm{sen}^2(\pi/\sqrt{2})\cosh^2(\pi/\sqrt{2}) + \cos^2(\pi/\sqrt{2})\mathrm{senh}^2(\pi/\sqrt{2})}\\
&= -\frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{\mathrm{sen}(\pi/\sqrt{2})\cosh(\pi/\sqrt{2}) + \cos(\pi/\sqrt{2})\mathrm{senh}(\pi/\sqrt{2})}{\mathrm{sen}^2(\pi/\sqrt{2})\cosh^2(\pi/\sqrt{2}) + \cos^2(\pi/\sqrt{2})\mathrm{senh}^2(\pi/\sqrt{2})}\,.
\end{aligned}$$

La somma dei residui sui numeri relativi è

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\mathrm{Res}[f(z),k] = \frac{1}{\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{(-1)^k}{k^4+1} = \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^4+1} - \frac{1}{\pi}\,,$$

eguagliando i due risultati e isolando la somma desiderata si ha

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^4+1}=\frac{1}{2}-\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\,\frac{\operatorname{sen}(\pi/\sqrt{2})\cosh(\pi/\sqrt{2})+\cos(\pi/\sqrt{2})\operatorname{senh}(\pi/\sqrt{2})}{\operatorname{sen}^2(\pi/\sqrt{2})\cosh^2(\pi/\sqrt{2})+\cos^2(\pi/\sqrt{2})\operatorname{senh}^2(\pi/\sqrt{2})}\,.$$

## ESERCIZIO 4 (5 PUNTI)

Si determini la funzione razionale $f(z)$ che verifica le seguenti condizioni:

- nell'origine vale $-i$;
- ha due poli semplici $z_1=1$ e $z_2=2i$, con residui $R_1=1$ e $R_2=-2$;
- in un intorno di $z=\infty$ si comporta come il polinomio $2z^3$;
- verifica le due identità:

$$\frac{1}{2i\pi}\oint_{\gamma_r}\frac{f(z)}{z^2}dz=\frac{1}{2}\,,\qquad\qquad \frac{1}{2i\pi}\oint_{\gamma_r}\frac{f(z)}{z^3}dz=\frac{i}{4}\,,$$

  dove $\gamma_r$ è una circonferenza centrata nell'origine e con raggio $r<1$ e percorsa in senso antiorario.

## SOLUZIONE 4

La forma più generale della funzione può essere data in forma di sviluppo di Mittag-Leffler, in cui la parte intera è un polinomio di terzo grado e la serie delle parti principali ha solo due somme, ci sono solo due poli, ciascuna delle quali ha solo un termine, essendo i poli semplici. Si ha quindi

$$f(z)=2z^3+a\,z^2+b\,z+c+\frac{1}{z-1}-\frac{2}{z-2i}\,.$$

I coefficienti $a$, $b$ e $c$ saranno determinati imponendo le condizioni richieste. Con la condizione $f(0)=-i$ si determina il coefficiente $c$, infatti

$$-i=f(0)=c+\frac{1}{-1}-\frac{2}{-2i}=c-1-i\qquad\qquad\Rightarrow c=1\,.$$

Per ciò che riguarda gli integrali, dal primo si ottiene $b$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}=\frac{1}{2i\pi}\oint_{\gamma_r}\frac{f(z)}{z^2}dz &= \frac{1}{2i\pi}\oint_{\gamma_r}\left[2z+a+\frac{b}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^2(z-1)}-\frac{2}{z^2(z-2i)}\right]dz\\ &= b-\left.\frac{1}{(z-1)^2}\right|_{z=0}+\left.\frac{2}{(z-2i)^2}\right|_{z=0}\\ &= b-1-\frac{1}{2}\qquad\qquad\Rightarrow b=2\,,\end{aligned}$$

dal secondo il coefficiente $a$, come

$$\begin{aligned}\frac{i}{4}=\frac{1}{2i\pi}\oint_{\gamma_r}\frac{f(z)}{z^3}dz &= \frac{1}{2i\pi}\oint_{\gamma_r}\left[2+\frac{a}{z}+\frac{b}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^3(z-1)}-\frac{2}{z^3(z-2i)}\right]dz\\ &= a+\left.\frac{2}{2(z-1)^3}\right|_{z=0}-\left.\frac{4}{2(z-2i)^3}\right|_{z=0}\\ &= a-1+\frac{i}{4}\qquad\qquad\Rightarrow a=1\,.\end{aligned}$$

La funzione cercata è

$$f(z)=2z^3+z^2+2z+1+\frac{1}{z-1}-\frac{2}{z-2i}\,.$$

## Esercizio 5 (6 punti)

Siano $\hat{A}$ e $\hat{B}$ due operatori lineari in uno spazio vettoriale $E$. Si dimostri che, nel caso in cui siano a traccia nulla, il loro prodotto può essere scritto nella forma

$$\hat{A}\hat{B} = \vec{a}\cdot\vec{b}\,\hat{I} + i\,\vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{\hat{\sigma}}\,,$$

sapendo che: $\vec{a}$, $\vec{b}\in\mathbb{C}^3$, $\hat{\sigma}_1$, $\hat{\sigma}_2$, $\hat{\sigma}_3$ sono gli "operatori di Pauli", ovvero quegli operatori le cui rappresentazioni sono le matrici di Pauli e che, inoltre, tali operatori, assieme all'identità $\hat{I}$, costituiscono una base per gli operatori di $E$.

- Che caratteristiche hanno i vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ se gli operatori sono hermitiani?
- E se sono hermitiani e commutano?
- Usando la rappresentazione canonica, si determinino autovalori e autovettori dell'operatore prodotto $\hat{C} = \hat{A}\hat{B}$ nel caso in cui: $\vec{a} = (1,1,1)$ e $\vec{b} = (1,1,-1)$.

### Soluzione 5

Un generico operatore $\hat{A}$ può essere scritto come

$$\hat{A} = a_0\,\hat{I} + \vec{a}\cdot\vec{\hat{\sigma}}\,,$$

per opportuni valori di $a_0\in\mathbb{C}$ e $\vec{a}\in\mathbb{C}^3$, la traccia è

$$\mathrm{Tr}\,(\hat{A}) = 2a_0 + \sum_{i=1}^{3} a_i \mathrm{Tr}\,(\hat{\sigma}_i) = 2a_0\,,$$

essendo le matrici di Pauli a traccia nulla. Dall'ultima identità segue che, condizione necessaria e sufficiente affinché $\hat{A}$ abbia traccia nulla è che $a_0 = 0$. Dati allora due operatori $\hat{A}$ e $\hat{B}$ a traccia nulla si avranno

$$\hat{A} = \vec{a}\cdot\vec{\hat{\sigma}}\,, \qquad \hat{B} = \vec{b}\cdot\vec{\hat{\sigma}}\,,$$

con $\vec{a}\,,\vec{b}\in\mathbb{C}^3$. Ne consegue che, sfruttando l'algebra delle matrici di Pauli e, in particolare la relazione

$$\sigma_j\sigma_k = 2\delta_{jk} + i\epsilon_{jkl}\sigma_l\,, \qquad j,k = 1,2,3\,,$$

il prodotto è

$$\hat{A}\hat{B} = \sum_{j,k=1}^{3} a_j b_k \hat{\sigma}_j\hat{\sigma}_k = \vec{a}\cdot\vec{b}\hat{I} + i\,\vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{\hat{\sigma}}\,.$$

Se un operatore $\hat{A}$ è a traccia nulla e hermitiano si deve avere

$$\hat{A} = \vec{a}\cdot\vec{\hat{\sigma}} = \hat{A}^\dagger = (\vec{a}\cdot\vec{\hat{\sigma}})^\dagger\,,$$

e, poiché gli operatori di Pauli sono hermitiani,

$$\sum_{j=1}^{3} a_j\,\hat{\sigma}_j = \sum_{j=1}^{3} a_j^*\,\hat{\sigma}_j\,.$$

Moltiplicando ambo i membri per $\hat{\sigma}_k$ e facendo la traccia si avrà

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\left[\hat{\sigma}_k\sum_{j=1}^{3} a_j\,\hat{\sigma}_j\right] &= \mathrm{Tr}\left[\hat{\sigma}_k\sum_{j=1}^{3} a_j^*\,\hat{\sigma}_j\right]. \\ 2a_k &= 2a_k^*\,,\end{aligned}$$

da cui $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$, ovvero il vettore $\vec{a}$ ha componenti reali.
Se inoltre, gli operatori commutano, dovremo avere:

$$\begin{aligned} \hat{A}\hat{B} &= \hat{B}\hat{A} \\ \vec{a}\cdot\vec{b}\,\hat{I} + i\,\vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{\hat{\sigma}} &= \vec{a}\cdot\vec{b}\,\hat{I} + i\,\vec{b}\times\vec{a}\cdot\vec{\hat{\sigma}} \\ \vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{\hat{\sigma}} &= \vec{b}\times\vec{a}\cdot\vec{\hat{\sigma}}\,, \end{aligned}$$

anche in questo caso, moltiplicando ambo i membri per $\hat{\sigma}_k$ e facendo la traccia si avrà

$$\begin{aligned} (\vec{a}\times\vec{b})_k &= (\vec{b}\times\vec{a})_k \\ 2(\vec{a}\times\vec{b})_k &= 0\,, \qquad k = 1,2,3\,, \end{aligned}$$

ovvero il prodotto vettore $\vec{a}\times\vec{b}$ è nullo, i vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ sono reali e ortogonali.
Se i vettori sono $\vec{a} = (1,1,1)$ e $\vec{b} = (1,1,-1)$, si avranno

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 1\,, \qquad \vec{a}\times\vec{b} = (-2,2,0)\,,$$

quindi l'operatore prodotto è

$$\hat{C} = \hat{I} - 2\hat{\sigma}_1 + 2\hat{\sigma}_2\,,$$

la cui rappresentazione canonica è

$$C = I - 2\sigma_1 + 2\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2-2i \\ -2+2i & 1 \end{pmatrix}.$$

Gli autovalori di questa matrice si ottengono come

$$\begin{aligned} \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & -2-2i \\ -2+2i & 1-\lambda \end{pmatrix} &= 0 \\ (1-\lambda)^2 - 8 &= 0 \\ \lambda_{1,2} &= 1 \pm 2\sqrt{2}\,. \end{aligned}$$

Gli autovettori corrispondenti sono

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ (i-1)/2 \end{pmatrix}, \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -(i-1)/2 \end{pmatrix}$$

## Esercizio 6 (6 punti)

Usando il metodo della trasformata di Fourier si risolva l'equazione

$$\frac{df}{dx}(x) = x + \alpha\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-x'|} f(x')\,dx'\,,$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$.

## Soluzione 6

La trasformata di Fourier dell'equazione, osservando che l'integrale può essere interpretato come una convoluzione, è

$$\begin{aligned} \mathscr{F}_k\left[\frac{df}{dx}(x)\right] &= \mathscr{F}_k[x] + \alpha\mathscr{F}_k\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-x'|} f(x')\,dx'\right] \\ \mathscr{F}_k\left[\frac{df}{dx}(x)\right] &= \mathscr{F}_k[x] + \alpha\sqrt{2\pi}\mathscr{F}_k\left[e^{-|x|}\right]\mathscr{F}_k[f(x)] \\ ik\tilde{f}(k) &= \mathscr{F}_k[x] + \alpha\sqrt{2\pi}\,\tilde{f}(k)\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{k^2+1} = \tilde{f}(k)\frac{2\alpha}{k^2+1}\,. \end{aligned}$$

La trasformata della funzione $x$ può essere ottenuta dalla definizione della delta di Dirac, infatti si ha

$$\mathscr{F}_k[x] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x\, e^{-ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} i \frac{d}{dk} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} dx = i\sqrt{2\pi}\, \frac{d\delta}{dk}(k).$$

Infine, ricordando che

$$\mathscr{F}_k\left[e^{-|x|}\right] = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{1}{k^2+1},$$

l'equazione diventa

$$ik\tilde{f}(k) = i\sqrt{2\pi}\frac{d\delta}{dk}(k) + \alpha\sqrt{2\pi}\,\tilde{f}(k)\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{k^2+1} = i\sqrt{2\pi}\frac{d\delta}{dk}(k) + \tilde{f}(k)\,\frac{2\alpha}{k^2+1},$$

da cui

$$\left(ik - \frac{2\alpha}{k^2+1}\right)\tilde{f}(k) = i\sqrt{2\pi}\frac{d\delta}{dk}(k).$$

La soluzione si ottiene facendo l'antitrasformata, ovvero

$$\begin{aligned}
f(x) &= i\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\delta}{dk}(k)\,\frac{1}{ik - \frac{2\alpha}{k^2+1}}\, e^{ikx} dk \\
f(x) &= i\,\delta(k)\,\frac{e^{ikx}}{ik - \frac{2\alpha}{k^2+1}}\Bigg|_{-\infty}^{\infty} - i\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{ix}{ik - \frac{2\alpha}{k^2+1}} - \frac{\left(i + \frac{4\alpha k}{(k^2+1)^2}\right)}{\left(ik - \frac{2\alpha}{k^2+1}\right)^2}\right] e^{ikx}\,\delta(k)\,dk \\
f(x) &= -\frac{x}{2\alpha} - \frac{1}{4\alpha^2}.
\end{aligned}$$