Metodi Matematici per la Fisica

Prova scritta - 5 settembre 2013

Si svolgano cortesemente i seguenti esercizi.

Esercizio 1 (6 punti)
Si calcoli l'integrale

$$I = \int_C \frac{dz}{3 - 2\cosh(z) + \sinh(z)}\,,$$

dove C è il segmento del piano complesso con estremi $z_1 = -i\pi$ e $z_2 = i\pi$.

. . . .

Soluzione
Facciamo la sostituzione $z = it$, quindi l'integrale diventa

$$I = i\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dt}{3 - 2\cosh(it) + \sinh(it)} = i\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dt}{3 - 2\cos(t) + i\sin(t)}\,.$$

Poniamo: $w = e^{it}$, $dt = \frac{dw}{iw}$, e si ha

$$I = \oint_{|w|=1} \frac{1}{3 - w/2 - 3w^{-1}/2}\,\frac{dw}{w} = \oint_{|w|=1} \frac{-2}{w^2 - 6w + 3}\,dw\,.$$

L'integranda ha i due poli semplici

$$w_{1,2} = 3 \pm \sqrt{6}\,,$$

dei quali, soltanto w_2 è interno al cerchio unitario, quindi

$$I = 2i\pi \mathrm{Res}\left[\frac{-2}{(w-w_1)(w-w_2)}, w = 3 - \sqrt{6}\right] = 2i\pi\frac{1}{\sqrt{6}} = i\pi\sqrt{\frac{2}{3}}\,.$$

. . . .

Esercizio 2 (6 punti)
Sia $f(z)$ una funzione meromorfa, che ha solo N poli reali x_k, $k = 1, 2, \ldots, N$, tutti semplici con, inoltre,

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = 0\,.$$

Si dimostri che: $\forall [a, b] \subset \mathbb{R}$, con $-\infty < a < b < \infty$ e $a, b \notin \{x_k\}_{k=1}^{N}$,

$$\mathrm{Pr}\int_a^b f(z)dz = \sum_{k=1}^{N} R_k \ln\left(\left|\frac{b - x_k}{a - x_k}\right|\right)\,,$$

dove

$$R_k = \mathrm{Res}\Big[f(z), z = x_k\Big]\,.$$

Soluzione
Si usa lo sviluppo di Mittag-Leffler. Infatti, poiché si hanno solo poli semplici e la funzione è infinitesima all'infinito, vale la rappresentazione

$$f(z) = \sum_{k=1}^{N} \frac{R_k}{z - x_k}\,.$$

L'integrale in valore principale, in termini dello sviluppo di Mittag-Leffler, è

$$\mathrm{Pr}\!\int_a^b f(z)dz = \sum_{k=1}^{N} R_k \mathrm{Pr}\!\int_a^b \frac{dz}{z - x_k}\,.$$

Per gli integrali che compaiono nella somma si distinguono due casi: $x_k \in (a,b)$ e $x_k \notin (a,b)$, solo nel primo caso il valore principale è effettivo, nel secondo l'integrale si riduce al classico integrale di Riemann. Consideriamo il primo caso, ovvero $a < x_k < b$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Pr}\!\int_a^b \frac{dz}{z - x_k} &= \lim_{\epsilon \to 0^+} \left[\int_a^{x_k - \epsilon} \frac{dz}{z - x_k} + \int_{x_k + \epsilon}^{b} \frac{dz}{z - x_k}\right] \\
&= \lim_{\epsilon \to 0^+} \left[\ln(z - x_k)\big|_a^{x_k - \epsilon} + \ln(z - x_k)\big|_{x_k + \epsilon}^{b}\right] \\
&= \ln\left(\frac{b - x_k}{a - x_k}\right) + \lim_{\epsilon \to 0^+} \ln\left(\frac{-\epsilon}{\epsilon}\right) = \ln\left(\frac{b - x_k}{x_k - a}\right) = \ln\left(\left|\frac{b - x_k}{a - x_k}\right|\right)\,.
\end{aligned}$$

L'ultima identità vale poiché l'argomento del logaritmo è reale e positivo.
Nel secondo caso, $x_k \notin (a,b)$, quindi o $x_k > b > a$ o $x_k < a < b$, si ha

$$\mathrm{Pr}\!\int_a^b \frac{dz}{z - x_k} = \int_a^b \frac{dz}{z - x_k} = \ln\left(\frac{b - x_k}{a - x_k}\right) = \ln\left(\left|\frac{b - x_k}{a - x_k}\right|\right)\,,$$

anche qui il valore assoluto dell'argomento è giustificato dalla sua positività. Scrivendo l'integrale iniziale come somma di tutti i termini si ottiene l'espressione desiderata.

. . . .

Esercizio 3 (5 punti)
Calcolare i coefficienti a_{-10} e a_{10} dello sviluppo di Laurent in $z = 0$ della funzione

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 4z + 3}\,,$$

convergente nella corona circolare $C = \{z : 1 < |z| < 3\}$.

. . . .

Soluzione
In generale il coefficiente k-esimo si ottiene come

$$a_k = \frac{1}{2i\pi} \int_{|z|=r} \frac{f(z)}{z^{k+1}} dz\,, \qquad 1 < r < 3\,.$$

Ne consegue che, con $k = -10$, si ha

$$a_{-10} = \frac{1}{2i\pi} \int_{|z|=3/2} \frac{z^9 dz}{(z-1)(z-3)} = \mathrm{Res}\left[\frac{z^9}{(z-1)(z-3)}, z = 1\right] = -\frac{1}{2}\,.$$

Il coefficiente a_{10}, invece, si ottiene come

$$
\begin{aligned}
a_{10} &= \frac{1}{2i\pi}\int_{|z|=3/2}\frac{dz}{(z-1)(z-3)z^{11}} \\
&= \mathrm{Res}\left[\frac{1}{(z-1)(z-3)z^{11}}, z=1\right] + \mathrm{Res}\left[\frac{1}{(z-1)(z-3)z^{11}}, z=0\right] \\
&= -\frac{1}{2} + \frac{1}{10!}\frac{d^{10}}{dz^{10}}\frac{1}{(z-1)(z-3)}\bigg|_{z=0} \\
&= -\frac{1}{2} + \frac{1}{10!}\,\frac{1}{2}\frac{d^{10}}{dz^{10}}\left[\frac{1}{z-3}-\frac{1}{z-1}\right]\bigg|_{z=0} \\
&= -\frac{1}{2} + \frac{1}{10!}(-1)^{10}\,\frac{1}{2}\left[\frac{10!}{(z-3)^{11}}-\frac{10!}{(z-1)^{11}}\right]\bigg|_{z=0} \\
&= -\frac{1}{2} - \frac{1/2}{3^{11}} + \frac{1}{2} \\
&= -\frac{1/2}{3^{11}}\,.
\end{aligned}
$$

. . . .

Esercizio 4 (6 punti)

Date le funzioni $f(x)$, $g(x) \in L^2(-\pi,\pi)$, con

$$
f(x) = 2x + |x|\,, \qquad g(x) = \frac{a_0}{2} + a_1\cos(x) + a_2\cos(2x) + b_1\,\mathrm{sen}\,(x) + b_2\,\mathrm{sen}\,(2x)\,,
$$

si trovino i valori dei cinque coefficienti a_0, a_1, a_2, b_1 e b_2, per i quali, la funzione $g(x)$ rappresenta la migliore approssimazione in media della $f(x)$ in $[-\pi,\pi]$. Si verifichi, in questo caso, la disuguaglianza di Bessel.

. . . .

Soluzione

I coefficienti di Fourier sono

$$
a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx\,, \qquad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{sen}\,(kx)dx\,,
$$

e quindi

$$
a_0 = \pi\,, \quad a_1 = -\frac{4}{\pi}\,, \quad a_2 = 0\,, \quad b_1 = 4\,, \quad b_2 = -2\,.
$$

La disuguaglianza è

$$
\begin{aligned}
(f,f) = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx &\geq \pi\frac{a_0^2}{2} + \pi\sum_{k=1}^{2}\left[a_k^2 + b_k^2\right] \\
\frac{10\pi^3}{3} &\geq \frac{\pi^3}{2} + 20\pi + \frac{16}{\pi} \\
\frac{10\pi^3}{3} &\geq \frac{10\pi^3}{3} - \frac{17\pi^3}{6} + 20\pi + \frac{16}{\pi} \\
\frac{10\pi^3}{3} &\geq \frac{10\pi^3}{3} - \frac{\pi^3}{6}\left(17 - \frac{120}{\pi^2} - \frac{96}{\pi^4}\right)\,.
\end{aligned}
$$

Al fine di verificarla è necessario dimostrare che la quantità tra parentesi è positiva. Usando la condizione (lasca) $9 < \pi^2 < 10$, per le frazioni si hanno le seguenti limitazioni

$$\frac{120}{10} < \frac{120}{\pi^2} < \frac{120}{9} < 14\,, \qquad \frac{96}{100} < \frac{96}{\pi^4} < \frac{96}{81} < 2\,,$$

quindi

$$17 - \frac{120}{\pi^2} - \frac{96}{\pi^4} > 17 - 14 - 2 = 1 > 0\,,$$

la disuguaglianza di Bessel è verificata.

. . . .

Esercizio 5 (4 punti)
Data la funzione

$$f_1(z) = \int_1^\infty (1 + r + r^2) e^{rz} dr$$

- si dimostri che è analitica nel semipiano $D_1 = \{z : \mathrm{Re}(z) < 0\}$;
- se ne calcoli il prolungamento analitico $f_2(z)$ in $D_2 = \{z : \mathrm{Re}(z) > 0\}$.

. . . .

Soluzione
La condizione di convergenza dell'integrale si ottiene richiedendo che in $r \to 1^+$ e $r \to \infty$ l'integranda si comporti come $o[1/(r-1)]$. In $r = 1$ si ha

$$\lim_{r \to 1^+} (1 + r + r^2) e^{zr} = 3\, e^z\,,$$

che è finito per $|z| < \infty$. Per $r \to \infty$, si ha

$$\lim_{r \to \infty} \left| (1 + r + r^2) e^{zr} \right| = \lim_{r \to \infty} \left| 1 + r + r^2 \right| e^{\mathrm{Re}(z) r} = \begin{cases} \infty & \text{se: } \mathrm{Re}(z) \geq 0 \\ 0 & \text{se: } \mathrm{Re}(z) < 0 \end{cases} .$$

Inoltre, nel caso $\mathrm{Re}(z) < 0$ si ha l'integrabilità, infatti

$$\left| (1 + r + r^2) e^{zr} \right| = o(1/r)\,, \qquad r \to \infty\,.$$

Possiamo quindi integrare in $\mathrm{Re}(z) < 0$. In generale si ha

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty r^n e^{rz} dr &= \left. \frac{r^n e^{rz}}{z} \right|_1^\infty - \frac{n}{z} \int_1^\infty r^{n-1} e^{rz} dr = -\frac{e^z}{z} - \frac{n}{z} \int_1^\infty r^{n-1} e^{rz} dr \\
&= -\frac{e^z}{z} - \frac{n}{z} \left[-\frac{e^z}{z} - \frac{n-1}{z} \int_1^\infty r^{n-2} e^{rz} dr \right] \\
&= -\frac{e^z}{z} + \frac{n e^z}{z^2} - \frac{n(n-1) e^z}{z^3} + (-1)^{n+1} \frac{n(n-1) \cdots 2 e^z}{z^n} + (-1)^{n+1} \frac{n! e^z}{z^n} \int_1^\infty e^{rz} dr \\
&= -\frac{e^z}{z} + \frac{n e^z}{z^2} - \frac{n(n-1) e^z}{z^3} + (-1)^{n+1} \frac{n(n-1) \cdots 2 e^z}{z^n} + (-1)^{n+2} \frac{n! e^z}{z^{n+1}}\,.
\end{aligned}$$

Quindi l'integrale in questione è

$$f_1(z) = \int_1^{\infty} (1+r+r^2)e^{rz}dr = \Big(-3z^2+3z-2\Big)\frac{e^z}{z^3}\,,$$

la funzione $f_1(z)$ è meromorfa, infatti è analitica in tutto il piano complesso ad eccezione dell'origine in cui un polo di ordine 3. Ne consegue che l'espressione ottenuta coincide con la $f_2(z)$ richiesta ed è analitica in $\mathrm{Re}(z) < 0$.

. . . .

Esercizio 6 (6 punti)
Si hanno i tre vettori

$$a_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad a_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

- si verifiche che rappresentano una base di $\mathbb{C}^3$;
- con il metodo di Gram-Schmidt, a partire dall'insieme $\{a_k\}_{k=1}^3$, si determini l'insieme di vettori ortonormali corrispondente $\{e_k\}_{k=1}^3$;
- si determini la matrice A che verifica le equazioni agli autovalori

  $$Ae_k = \lambda_k e_k\,,$$

  con

  $$\lambda_1 = i\,, \qquad \lambda_2 = -1\,, \qquad \lambda_3 = -i\,;$$

- si classifichi, infine, la matrice A e si studi la matrice $B = A^{2n}$ con $n \in \mathbb{N}$.

. . . .

Soluzione
Si hanno per primi i vettori ortogonali

$$e_1' = a_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$e_2' = a_2 - \frac{e_1'a_2}{e_1'e_1'}e_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{0}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$e_3' = a_3 - \frac{e_1'a_3}{e_1'e_1'}e_1' - \frac{e_2'a_3}{e_2'e_2'}e_2' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{0}{1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

I vettori normalizzati sono

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

La rappresentazione diagonale di A è semplicemente

$$A_d = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix} .$$

La matrice unitaria che diagonalizza A è

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} .$$

quindi

$$\begin{aligned} A = UA_dU^\dagger &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ i/\sqrt{2} & 0 & i/\sqrt{2} \\ i/\sqrt{2} & 0 & -i/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

La matrice A è unitaria, infatti

$$AA^\dagger = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A^\dagger A \, .$$

Infine, la potenza $2n$, di A in rappresentazione diagonale ha la forma

$$A_d^{2n} = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix} ,$$

quindi, in rappresentazione canonica,

$$\begin{aligned} A^{2n} = UA_d^{2n}U^\dagger &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ (-1)^n/\sqrt{2} & 0 & (-1)^{n+1}/\sqrt{2} \\ (-1)^n/\sqrt{2} & 0 & (-1)^n/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix} , \end{aligned}$$

per valori pari di n si ottiene l'identità.