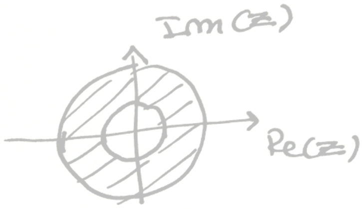
$\mathrm{Re}f(x) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{Im} f(x')}{x'-x} dx'$



Metodi Matematici per la Fisica

Prova scritta - 5 luglio 2016

Si risolvano cortesemente i seguenti problemi.

Primo problema (punteggio: 7/30)

Sia $f(z)$ una funzione analitica nel piano complesso, con un taglio coincidente con il semiasse reale positivo, che inoltre verifica le condizioni

$$
\begin{aligned}
& f(x) \in \mathbb{R}, && \forall\, x < 0\,; \\
& f(z) = o(1/\ln|z|), && \text{per } z \to \infty\,; \\
& f(z) \propto z^{\alpha}, && \text{con } \mathrm{Re}(\alpha) > -1, \text{ quando } z \to 0\,.
\end{aligned}
$$

Sapendo che sul bordo superiore del taglio la parte immaginaria della funzione

$$
\mathrm{Im}[f(x)] = \frac{x^t}{x^2+1}\,, \qquad x \in (0,\infty)\,, \qquad \mathrm{Re}(t) \in (-1/2, 3/2)\,.
$$

si ottenga la parte reale della funzione sul bordo superiore del taglio, sfruttando le relazioni di dispersione.

Soluzione del primo problema

La funzione ha tutte le propriet che permettono di applicare le relazioni di dispersione per la parte reale

$$
\mathrm{Re}[f(x)] = \frac{1}{\pi}\,\mathrm{Pr}\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{Im}[f(x')]}{x'-x} dx' = \frac{1}{\pi}\,\mathrm{Pr}\int_0^{\infty} \frac{x'^t}{(x'^2+1)(x'-x)} dx'\,, \qquad \text{con } x \in (0,\infty)\,.
$$

Studiando il comportamento dell'integranda agli estremi, si ottengono le condizioni che devono essere verificate dal parametro t al fine di avere l'integrabilit , ovvero, per $x \in (0,\infty)$,

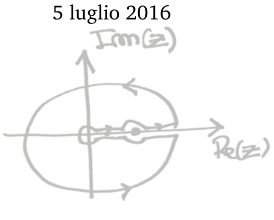
$$
\left.
\begin{aligned}
& \frac{\mathrm{Im}[f(x')]}{x'-x} = O(x'^t)\,, && x' \to 0^+ \quad \Rightarrow && \mathrm{Re}(t) > -1\,, \\
& \frac{\mathrm{Im}[f(x')]}{x'-x} = O(x'^{t-3})\,, && x' \to \infty \quad \Rightarrow && \mathrm{Re}(t) < 2
\end{aligned}
\right\} \Longrightarrow \qquad -1 < \mathrm{Re}(t) < 2\,,
$$

poich il problema pone la condizione $\mathrm{Re}(t) \in (-1/2, 3/2)$, l'integrale sempre definito.
Consideriamo il percorso chiuso Γ_R mostrato in figura, al divergere del raggio R e al tendere a zero di ϵ, raggio di γ_0, γ_1 e γ_2, l'integrale sull'arco infinito e quello sull'arco infinitesimo centrati nell'origine si annullano, quindi

$$
\lim_{R\to\infty}\lim_{\epsilon\to 0}\oint_{\Gamma_R} \frac{z^t\,dz}{(z^2+1)(z-x)} = \lim_{\epsilon\to 0}\left[\int_{L_1\cup L_2} \frac{z^t\,dz}{(z^2+1)(z-x)} - \int_{\gamma_1} \frac{z^t\,dz}{(z^2+1)(z-x)} - \int_{\gamma_1} \frac{z^t\,dz}{(z^2+1)(z-x)}\right].
$$

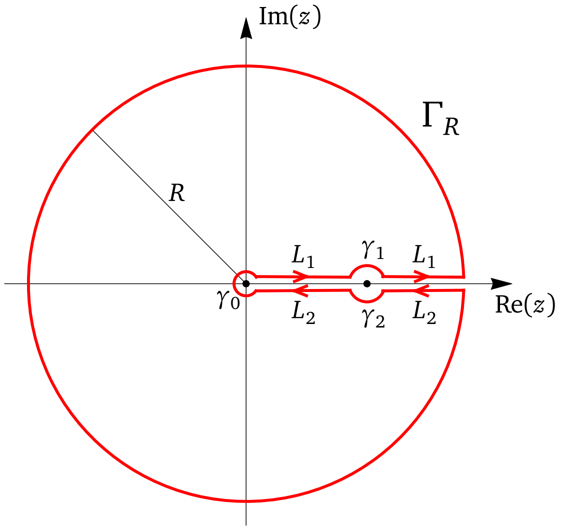
Il percorso L_1 rappresenta l'unione dei due tratti rettilinei sopra il taglio in cui si ha $z = x'$, mentre su L_2, sotto il taglio, dove si ha $z = x' e^{2i\pi}$. Questi integrali rappresentano, a meno di fattori, l'integrale in valore principale cercato, infatti

$$
\begin{aligned}
\lim_{\epsilon\to 0}\left[\int_{L_1} \frac{z^t\,dz}{(z^2+1)(z-x)} + \int_{L_2} \frac{z^t\,dz}{(z^2+1)(z-x)}\right] &= \mathrm{Pr}\int_0^{\infty} \frac{x'^t\,dx'}{(x'^2+1)(x'-x)} - e^{2i\pi t}\,\mathrm{Pr}\int_0^{\infty} \frac{x'^t\,dx'}{(x'^2+1)(x'-x)} \\
&= -2ie^{i\pi t}\mathrm{sen}(\pi t)\,\mathrm{Pr}\int_0^{\infty} \frac{x'^t\,dx'}{(x'^2+1)(x'-x)}\,.
\end{aligned}
$$



$\oint_{\gamma} f(z)dz = 0$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k z^k = f(z) \qquad \mathrm{Res}\left[f(z), z_0\right] = \frac{1}{2i\pi}\oint_{\gamma_0} f(z)\,dz$$



La somma degli integrali sugli archi infinitesimi γ_1 e γ_2

$$\int_{\gamma_2} \frac{z^t dz}{(z^2+1)(z-x)} + \int_{\gamma_2} \frac{z^t dz}{(z^2+1)(z-x)} = i\pi\,(A_1 + A_2)\ ,$$

dove

$$A_{1,2} = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{z^t}{(z^2+1)(z-x)}(z-x) = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{z^t}{(z^2+1)} = \begin{cases} \dfrac{x^t}{x^2+1} & \text{su } \gamma_1 \\[2ex] \dfrac{e^{2i\pi t}\, x^t}{x^2+1} & \text{su } \gamma_2 \end{cases} ,$$

quindi

$$\int_{\gamma_2} \frac{z^t dz}{(z^2+1)(z-x)} + \int_{\gamma_2} \frac{z^t dz}{(z^2+1)(z-x)} = 2i\pi e^{i\pi t} x^t \frac{\cos(\pi t)}{x^2+1} .$$

In definitiva

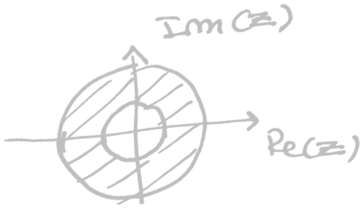
$$\lim_{R\to\infty}\lim_{\epsilon\to 0} \oint_{\Gamma_R} \frac{z^t dz}{(z^2+1)(z-x)} = -2ie^{i\pi t}\mathrm{sen}(\pi t)\,\mathrm{Pr}\int_0^\infty \frac{x'^t dx'}{(x'^2+1)(x'-x)} - 2i\pi e^{i\pi t} x^t \frac{\cos(\pi t)}{x^2+1} .$$

Grazie al teorema dei residui lo stesso integrale pu essere calcolato come somma dei residui dei poli interni al percorso Γ_R. Nelle condizioni del problema, all'interno di Γ_R ci sono i due poli semplici $z_{1,2} = \pm i$ ovvero $z_1 = e^{i\pi/2}$ e $z_2 = e^{3i\pi/2}$ (la scelta della fase deve essere fatta coerentemente con la posizione del taglio). I residui sono

$$\mathrm{Res}\left[z_{1,2}\right] = \lim_{z\to z_{1,2}} \frac{z^t}{(z^2+1)(z-x)}(z - z_{1,2}) = \frac{z_{1,2}^t}{2z_{1,2}(z_{1,2}-x)} = \begin{cases} \dfrac{e^{i\pi t/2}}{2i(i-x)} & z = z_1 \\[2ex] \dfrac{e^{3i\pi t/2}}{-2i(-i-x)} & z = z_2 \end{cases} .$$

$$[\sigma_k, \sigma_m] = 2i\varepsilon_{kmn}\sigma_n \qquad \hat{A}|u_k\rangle = \lambda_k|u_k\rangle$$
$$\{\sigma_k, \sigma_m\} = 2\delta_{km} I$$

$$\mathrm{Re} f(x) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{Im} f(x')}{x'-x} dx'$$



Ne consegue che l'integrale

$$\begin{aligned}
\lim_{R\to\infty}\lim_{\epsilon\to 0}\oint_{\Gamma_R}\frac{z^t\,dz}{(z^2+1)(z-x)} &= 2i\pi\left(\mathrm{Res}\left[z_1\right]+\mathrm{Res}\left[z_2\right]\right) = \pi\left(\frac{e^{i\pi t/2}}{i-x}-\frac{e^{3i\pi t/2}}{-i-x)}\right) \\
&= \pi e^{i\pi t}\left(\frac{e^{-i\pi t/2}}{i-x}-\frac{e^{i\pi t/2}}{-i-x}\right) = 2i\pi e^{i\pi t}\mathrm{Im}\left(\frac{e^{-i\pi t/2}}{i-x}\right) \\
&= 2i\,\pi e^{i\pi t}\frac{-\cos(\pi t/2)+x\mathrm{sen}(\pi t/2)}{x^2+1}\,.
\end{aligned}$$

Dai due risultati otteniamo

$$\begin{aligned}
-2ie^{i\pi t}\mathrm{sen}(\pi t)\,\mathrm{Pr}\int_0^\infty\frac{x'^t\,dx'}{(x'^2+1)(x'-x)}-2i\pi e^{i\pi t}x^t\frac{\cos(\pi t)}{x^2+1} &= 2i\pi e^{i\pi t}\frac{-\cos(\pi t/2)+x\mathrm{sen}(\pi t/2)}{x^2+1} \\
-\mathrm{sen}(\pi t)\,\mathrm{Pr}\int_0^\infty\frac{x'^t\,dx'}{(x'^2+1)(x'-x)}-\pi x^t\frac{\cos(\pi t)}{x^2+1} &= \pi\frac{-\cos(\pi t/2)+x\mathrm{sen}(\pi t/2)}{x^2+1}
\end{aligned}$$

ovvero

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}[f(x)] &= \frac{1}{\pi}\,\mathrm{Pr}\int_0^\infty\frac{x'^t\,dx'}{(x'^2+1)(x'-x)} \\
&= \frac{-x^t\,\cos(\pi t)+\cos(\pi t/2)-x\mathrm{sen}(\pi t/2)}{\mathrm{sen}(\pi t)(x^2+1)} \\
&= \frac{1}{x^2+1}\left(-\frac{x^t}{\tan(\pi t)}+\frac{1}{2\mathrm{sen}(\pi t/2)}-\frac{x}{2\cos(\pi t/2)}\right)\,.
\end{aligned}$$

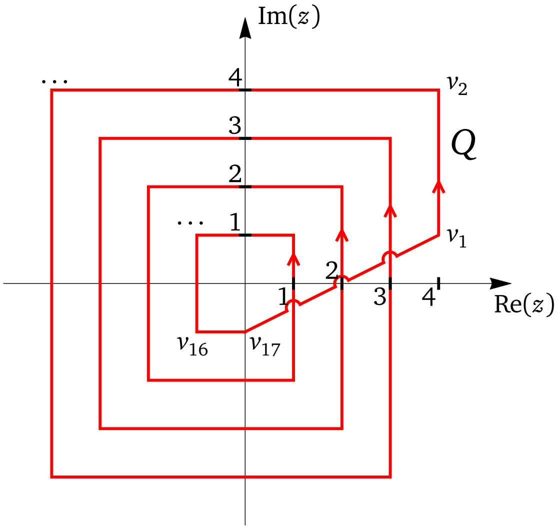
SECONDO PROBLEMA (PUNTEGGIO 6/30)

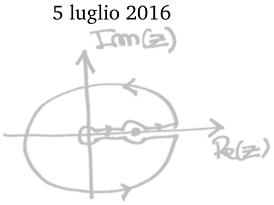
Si calcoli l'integrale

$$S=\oint_Q\frac{z}{\cos(\pi z)}dz\,,$$

dove il percorso Q la spezzata chiusa rappresentata in rosso nella figura accanto. I 17 vertici della spezzata sono:

$v_1=4+i\,,\quad v_2=4+4i\,,\quad v_3=-4+4i\,,$
$v_4=-4-4i\,,\quad v_5=3-4i\,,\quad v_6=3+3i\,,$
$v_7=-3+3i\,,\quad v_8=-3-3i\,,\quad v_9=2-3i\,,$
$v_{10}=2+2i\,,\quad v_{11}=-2+2i\,,\quad v_{12}=-2-2i\,,$
$v_{13}=1-2i\,,\quad v_{14}=1+i\,,\quad v_{15}=-1+i\,,$
$v_{16}=-1-i\,,\quad v_{17}=-i\,.$





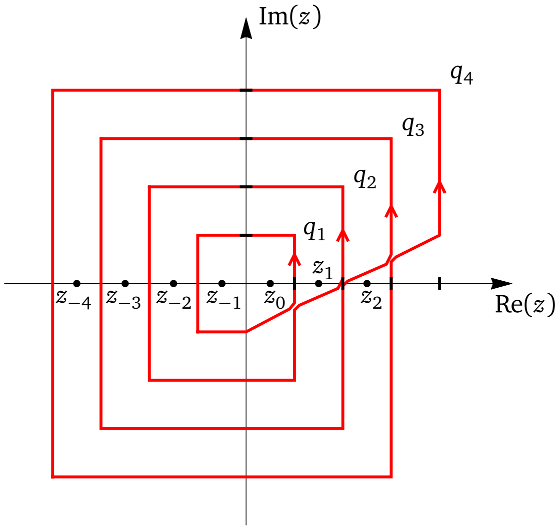
$$\oint_\gamma f(z)dz=0$$

$\sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k z^k = f(z)$

$\mathrm{Res}\left[f(z), z_0\right] = \frac{1}{2i\pi}\oint_{\gamma_0} f(z)dz$

Soluzione del secondo problema

Il cammino Q pu essere decomposto nell'unione di quattro cammini chiusi, q_1, q_2, q_3 e q_4, come mostrato nella figura sottostante.



Ne consegue che l'integrale pu essere scritto come

$$S = \oint_Q \frac{z}{\cos(\pi z)} dz = \sum_{j=1}^{4} \oint_{q_j} \frac{z}{\cos(\pi z)} dz \,.$$

L'integranda ha infiniti poli semplici nei punti

$$z_k = k + \frac{1}{2}\,, \qquad k \in \mathbb{Z}\,.$$

I poli interni a Q e quindi ad almeno uno degli q_j, $j = 1,2,3,4$, sono i sette indicati in figura, ovvero

$$z_k = k + \frac{1}{2}\,, \qquad k = -4, -3, \ldots, 2\,.$$

I residui corrispondenti sono

$$R_k = \mathrm{Res}\left[\frac{z}{\cos(\pi z)}, z_k\right] = \lim_{z\to z_k} (z - z_k)\frac{z}{\cos(\pi z)} = (-1)^{k+1}\frac{z_k}{\pi}\,.$$

In particolare, gli integrali sui singoli cammini chiusi sono

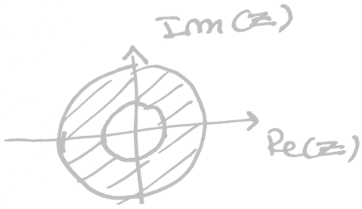
$$\begin{aligned}
\oint_{q_1} \frac{z}{\cos(\pi z)} dz &= 2i\pi\left(R_{-1} + R_0\right) = -2i\,,\\
\oint_{q_2} \frac{z}{\cos(\pi z)} dz &= 2i\pi\left(R_{-2} + R_{-1} + R_0 + R_1\right) = 4i\,,\\
\oint_{q_3} \frac{z}{\cos(\pi z)} dz &= 2i\pi\left(R_{-3} + R_{-2} + R_{-1} + R_0 + R_1\right) = -i\,,\\
\oint_{q_3} \frac{z}{\cos(\pi z)} dz &= 2i\pi\left(R_{-4} + R_{-3} + R_{-2} + R_{-1} + R_0 + R_1 + R_2\right) = i\,.
\end{aligned}$$

$[\sigma_k, \sigma_m] = 2i\varepsilon_{kmn}\sigma_n$

$\{\sigma_k, \sigma_m\} = 2\delta_{km} I$

$\hat{A}|u_k\rangle = \lambda_k |u_k\rangle$

$$\mathrm{Re} f(x) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{Im} f(x')}{x' - x} dx'$$



In definitiva, sommando tutti i contributi, si ottiene l'intetgrale cercato

$$S = \oint_{q_j} \frac{z}{\cos(\pi z)} dz = 2i\pi \left(R_{-4} + 2R_{-3} + 3R_{-2} + 4R_{-1} + 4R_0 + 3R_1 + R_2\right) = 2i\,.$$

Terzo problema (punteggio 6/30)

Data la funzione

$$f(z) = \frac{z}{z^2 + z - 2}\,,$$

si determini la serie di Laurent centrata nell'origine che ha solo potenze negative e quella, sempre centrata nell'origine, con solo potenze positive.

Soluzione del terzo problema

La funzione ha due poli semplici in

$$z_1 = -2\,, \qquad z_2 = 1\,,$$

ne consegue che gli sviluppi centrati nell'origine sono tre e convergono rispettivamente: nel cerchio unitario $C_1 = \{z : |z| < 1\}$, e nelle corone circolari $C_2 = \{z : 1 < |z| < 2\}$ e $C_3 = \{z : |z| > 2\}$. Nel cerchio unitario la serie necessariamente di potenze non negative, una serie di Taylor. Infatti in C_1 si ha $|z| < 1$, quindi, sfruttando opportunamente lo sviluppo della serie geometrica,

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)(z+2)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z/2+1}\right) = \frac{1}{3}\left(-\sum_{k=0}^{\infty} z^k + \sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{z}{2}\right)^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2)^{-k} - 1}{3} z^k\,.$$

Inoltre, il primo termine nullo, quindi si pu scrivere

$$f_1(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-2)^{-k} - 1}{3} z^k\,,$$

ci sono solo potenze positive. La serie $f_1(z)$ converge a $f(z)$ in C_1.
Nella corona C_2 si hanno: $1/|z| < 1$ e $|z|/2 < 1$, quindi

$$f(z) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z/2+1}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{z}\frac{1}{1-1/z} + \frac{1}{z/2+1}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{z}{2}\right)^k\right),$$

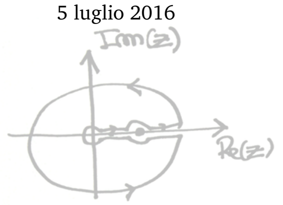
ci sono potenze sia positive che negative, non consideriamo questa serie.
Infine, in C_3, si hanno $1/|z| < 1$ e $2/|z| < 1$, per cui

$$f(z) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z/2+1}\right) = \frac{1}{3z}\left(\frac{1}{1-1/z} + \frac{2}{1+2/z}\right) = \frac{1}{3}\left(\sum_{k=0}^{\infty} z^{-k-1} + 2\sum_{k=0}^{\infty} (-2)^k z^{-k-1}\right),$$

con la sostituzione $n = -k - 1$, si ottiene la serie

$$f_3(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{1 - (-2)^{-n}}{3} z^n\,,$$

che ha solo potenze negative. La serie $f_3(z)$ converge a $f(z)$ in C_3.



$$\oint_\gamma f(z) dz = 0$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k z^k = f(z) \qquad \text{Res}\left[f(z), z_0\right] = \frac{1}{2i\pi}\oint_{\gamma_0} f(z)\,dz$$

Quarto problema (punteggio 6/30)

Si calcolino i valori dei quattro parametri reali a, a_0, a_1 e a_2, affinch

$$\phi(x) = \left(x^3 + a_2\,x^2 + a_1\,x + a_0\right) e^{-ax^2}$$

sia autofunzione dell'operatore trasformata di Fourier e quindi verifichi l'equazione agli autovalori

$$\mathscr{F}_y\left[\phi(x)\right] = \lambda\,\phi(y)\,.$$

Infine, si determini l'autovalore λ.

Soluzione del quarto problema

Usando la trasformata di Fourier nota

$$\mathscr{F}_y\left[x^n f(x)\right] = i^n \frac{d^n \tilde{f}}{dy^n}\,,$$

dove $\tilde{f}(y)$ la trasformata di Fourier della funzione $f(x)$, si ha per la funzione $\phi(x)$,

$$\mathscr{F}_y\left[\left(x^3{+}a_2\,x^2{+}a_1\,x{+}a_0\right) e^{-a\,x^2}\right] = -i\frac{d^3}{dy^3}\mathscr{F}_y\left[e^{-ax^2}\right] - a_2\frac{d^2}{dy^2}\mathscr{F}_y\left[e^{-ax^2}\right] + ia_1\frac{d}{dy}\mathscr{F}_y\left[e^{-ax^2}\right] + a_0\mathscr{F}_y\left[e^{-ax^2}\right]\,.$$

La trasformata di Fourier della gaussiana

$$\mathscr{F}_y\left[e^{-ax^2}\right] = \frac{e^{-\frac{y^2}{4a}}}{\sqrt{2a}}\,.$$

Ne consegue che, per avere gli stessi esponenziali, dobbiamo imporre la condizione $a = 1/2$. Le derivate sono

$$\frac{d}{dy}e^{-y^2/2} = -y e^{-y^2/2}\,, \qquad \frac{d^2}{dy^2}e^{-y^2/2} = \left(y^2 - 1\right) e^{-y^2/2}\,, \qquad \frac{d^3}{dy^3}e^{-y^2/2} = \left(3y - y^3\right) e^{-y^2/2}\,.$$

La trasformata completa

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}_y\left[\left(x^3 + a_2\,x^2 + a_1\,x + a_0\right) e^{-a\,x^2}\right] &= \left[-i\left(3y - y^3\right) - a_2\left(y^2 - 1\right) - ia_1 y + a_0\right] e^{-y^2/2} \\
&= i\left[y^3 + ia_2 y^2 + (-3 - a_1)y - i(a_0 + a_2)\right] e^{-y^2/2}\,.
\end{aligned}$$

Possiamo quindi scrivere l'equazione agli autovalori come

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}_y\left[\left(x^3 + a_2\,x^2 + a_1\,x + a_0\right) e^{-a\,x^2}\right] &= \lambda\phi(y) \\
i\left[y^3 + ia_2 y^2 + (-3 - a_1)y - i(a_0 + a_2)\right] e^{-y^2/2} &= \lambda\left[y^3 + a_2 y^2 + a_1 y + a_0\right] e^{-y^2/2}\,,
\end{aligned}$$

e determinare le condizioni sui parametri uguagliando i coefficienti omologhi del polinomio, ovvero

$$\begin{aligned}
ia_2 = a_2 \quad &\Rightarrow \quad a_2 = 0\,, \\
-3 - a_1 = a_1 \quad &\Rightarrow \quad a_1 = -\frac{3}{2}\,, \\
-i(a_0 + a_2) = -ia_0 = a_0 \quad &\Rightarrow \quad a_0 = 0\,.
\end{aligned}$$

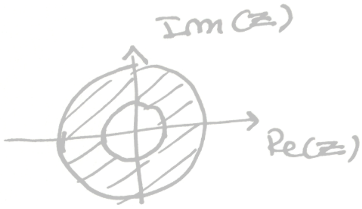
L'autofunzione cercata quindi

$$\phi(x) = x^2 - \frac{3}{2}x\,,$$

e l'autovalore $\lambda = i$.

$$\left[\sigma_k, \sigma_m\right] = 2i\,\varepsilon_{kmn}\,\sigma_n \qquad \hat{A}|u_k\rangle = \lambda_k|u_k\rangle$$
$$\left\{\sigma_k, \sigma_m\right\} = 2\delta_{km} I$$

$$\mathrm{Re} f(x) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{Im} f(x')}{x' - x} dx'$$



Quinto problema (punteggio 6/30)

Sfruttando l'algebra delle matrici di Pauli, si dimostri l'identit

$$e^{\sigma_1} e^{\sigma_2} = \begin{pmatrix} \cosh^2(1) + i\,\mathrm{senh}^2(1) & \mathrm{senh}(1)\cosh(1)(1-i) \\ \mathrm{senh}(1)\cosh(1)(1+i) & \cosh^2(1) - i\,\mathrm{senh}^2(1) \end{pmatrix}.$$

Si determinino autovalori e autovettori della matrice

$$e^{\sigma_1 + \sigma_2},$$

e si verifichi quindi che

$$e^{\sigma_1} e^{\sigma_2} \neq e^{\sigma_1 + \sigma_2}.$$

Le matrici di Pauli sono

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Soluzione del quinto problema

Le matrici di Pauli sono hermitiane e unitarie, per cui $\sigma_k^2 = I$, con $k = 1,2,3$, ne consegue che

$$e^{\sigma_{1,2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma_{1,2}^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\sigma_{1,2}^{2k}}{(2k)!} + \frac{\sigma_{1,2}^{2k+1}}{(2k+1)!} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{I}{(2k)!} + \frac{\sigma_{1,2}}{(2k+1)!} \right) = I\cosh(1) + \sigma_{1,2}\mathrm{senh}(1).$$

La matrice cercata

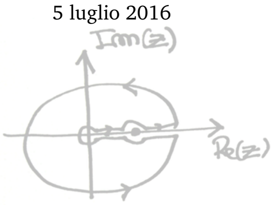
$$\begin{aligned}
e^{\sigma_1} e^{\sigma_2} &= \big(I\cosh(1) + \sigma_1 \mathrm{senh}(1)\big)\big(I\cosh(1) + \sigma_2 \mathrm{senh}(1)\big) \\
&= I\cosh^2(1) + \mathrm{senh}(1)\cosh(1)(\sigma_1 + \sigma_2) + \mathrm{senh}^2(1)\sigma_1\sigma_2 \\
&= I\cosh^2(1) + \mathrm{senh}(1)\cosh(1)(\sigma_1 + \sigma_2) + i\mathrm{senh}^2(1)\sigma_3 \\
&= \begin{pmatrix} \cosh^2(1) & 0 \\ 0 & \cosh^2(1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{senh}(1)\cosh(1)(1-i) \\ \mathrm{senh}(1)\cosh(1)(1+i) & 0 \end{pmatrix} \\
&\quad + \begin{pmatrix} i\mathrm{senh}^2(1) & 0 \\ 0 & -i\mathrm{senh}^2(1) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cosh^2(1) + i\mathrm{senh}^2(1) & \mathrm{senh}(1)\cosh(1)(1-i) \\ \mathrm{senh}(1)\cosh(1)(1+i) & \cosh^2(1) - i\mathrm{senh}^2(1) \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

che coincide con la matrice data.
Gli autovalori si ottengono risolvendo l'equazione caratteristica in x

$$\begin{aligned}
\det \begin{pmatrix} \cosh^2(1) + i\mathrm{senh}^2(1) - x & \mathrm{senh}(1)\cosh(1)(1-i) \\ \mathrm{senh}(1)\cosh(1)(1+i) & \cosh^2(1) - i\mathrm{senh}^2(1) - x \end{pmatrix} &= 0 \\
\big(\cosh^2(1) - x\big)^2 + \mathrm{senh}^4(1) - 2\mathrm{senh}^2(1)\cosh^2(1) &= 0,
\end{aligned}$$

e sono

$$x_{1,2} = \cosh^2(1) \pm \mathrm{senh}(1)\sqrt{\cosh^2(1) + 1}.$$



$$\oint_\gamma f(z)dz = 0$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k z^k = f(z) \qquad \mathrm{Res}\left[f(z), z_0\right] = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_0} f(z)\,dz$$

Per calcolare autovalori e autovettori di $e^{\sigma_1+\sigma_2}$, osserviamo che la matrice somma

$$\sigma_1+\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1-i \\ 1+i & 0 \end{pmatrix},$$

hermitiana ed ha autovalori y_1, y_2

$$\begin{aligned} \det\begin{pmatrix} -y_{1,2} & 1-i \\ 1+i & -y_{1,2} \end{pmatrix} &= 0 \\ y_{1,2} &= \pm\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Gli autovettori corrispondenti $u_{1,2}$ si ottengono risolvendo i sistemi omogenei

$$\begin{pmatrix} 0 & 1-i \\ 1+i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{1,2} \\ b_{1,2} \end{pmatrix} = \pm\sqrt{2}\begin{pmatrix} a_{1,2} \\ b_{1,2} \end{pmatrix},$$

e, posto $a_{1,2}=1$, si ha $b_{1,2} = \pm e^{i\pi/4} = \pm(1+i)/\sqrt{2}$, ovvero

$$u_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ \pm e^{i\pi/4} \end{pmatrix}.$$

Infine, usando la matrice unitaria diagonalizzante

$$U = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ e^{i\pi/4}/\sqrt{2} & -e^{i\pi/4}/\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

la matrice che rappresenta $e^{\sigma_1+\sigma_2}$ si ottiene, a partire dalla sua versione diagonale $\mathrm{diag}\left(e^{\sqrt{2}}, e^{-\sqrt{2}}\right)$, come

$$e^{\sigma_1+\sigma_2} = U\begin{pmatrix} e^{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\sqrt{2}} \end{pmatrix}U^\dagger = \begin{pmatrix} \cosh(\sqrt{2}) & e^{-i\pi/4}\mathrm{senh}(\sqrt{2}) \\ e^{i\pi/4}\mathrm{senh}(\sqrt{2}) & \cosh(\sqrt{2}) \end{pmatrix},$$

ed diversa da $e^{\sigma_1}e^{\sigma_2}$.

Sesto problema (punteggio 6/30)

Sia $\hat{A}$ un operatore normale e limitato nello spazio di Hilbert E_N, definito sul campo $\mathbb{R}$ dei numeri reali e a dimensione finita $N\in\mathbb{N}$. L'insieme ortonormale $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^N$ rappresenta una base di E_N, ovvero: $\forall\,|x\rangle\in E_N$ si ha la decomposizione

$$|x\rangle = x^k|e_k\rangle, \qquad x^k\in\mathbb{R},$$

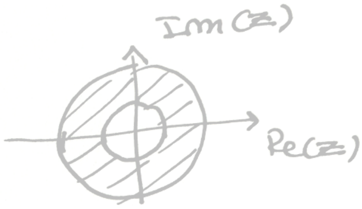
dove si usata la convenzione di Einstein per la somma sugli indici ripetuti in posizione covariante e controvariante. Si verifichi l'identit

$$\prod_{k=1}^N\left(\int_{-\infty}^{\infty} dx^k\right)e^{-\pi\langle x|\hat{A}|x\rangle} = \frac{1}{\sqrt{\det(\hat{A})}}.$$

Suggerimento: si calcoli l'integrale facendo un cambiamento di variabili, ovvero usando le componenti del vettore $|x\rangle$ rispetto alla base di autovettori di $\hat{A}$.

$$[\sigma_k, \sigma_m] = 2i\,\varepsilon_{kmn}\sigma_n \qquad \hat{A}|u_k\rangle = \lambda_k|u_k\rangle$$
$$\{\sigma_k, \sigma_m\} = 2\delta_{km} I$$

$$\mathrm{Re}f(x) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{Im} f(x')}{x'-x} dx'$$



Soluzione del sesto Problema

L'insieme degli autovettori di $\hat{A}$, $\{|u_j\rangle\}_{j=1}^{N}$, rappresenta anch'esso una base ortonormale di E_N, poich l'operatore normale, quindi l'equazione agli autovalori e la condizione di ortonormalit sono

$$\hat{A}|u_j\rangle = \lambda_j|u_j\rangle\,, \qquad \langle u_k|u_j\rangle = \delta_j^k\,, \qquad k,j = 1,2,\dots,N\,,$$

dove $\{\lambda_j\}_{j=1}^{N}$ l'insieme degli autovalori.
In corrispondenza delle due basi si hanno, per lo stesso vettore $|x\rangle$, le due rappresentazioni

$$|x\rangle = x^k|e_k\rangle = y^j|u_j\rangle\,, \qquad x^k, y^j \in \mathbb{R}\,.$$

Applicando a sinistra il "bra" $\langle e_m|$ otteniamo l'espressione di x^m in funzione di tutte le y^j, con $j = 1,2,\dots,N$,

$$x^k\langle e_m|e_k\rangle = x^m = y^j\langle e_m|u_j\rangle\,,$$

allo stesso modo, applicando a sinistra il bra $\langle u_n|$ otteniamo l'espressione di y^n in funzione di tutte le x^k, con $k = 1,2,\dots,N$,

$$y^j\langle u_n|u_j\rangle = y^n = x^k\langle u_n|e_k\rangle\,.$$

Il "sandwich" $\langle x|\hat{A}|x\rangle$, o valore di aspettazione di $\hat{A}$ rispetto al vettore $|x\rangle$, pu essere scritto usando la relazione di completezza $\sum_{j=1}^{N}|u_j\rangle\langle u_j| = \hat{I}$ come

$$\langle x|\hat{A}|x\rangle = \sum_{k,j=1}^{N}\langle x|u_j\rangle\langle u_j|\underbrace{\hat{A}|u_k\rangle}_{\lambda_k|u_k\rangle}\langle u_k|x\rangle = \sum_{k,j=1}^{N}\lambda_k\langle x|u_j\rangle\underbrace{\langle u_j|u_k\rangle}_{\delta_k^j}\langle u_k|x\rangle = \sum_{k=1}^{N}\lambda_k\underbrace{\langle x|u_k\rangle}_{y^{k*}}\underbrace{\langle u_k|x\rangle}_{y^k} = \sum_{k=1}^{N}\lambda_k\left(y^k\right)^2\,,$$

dove si utilizzato il fatto che le componenti sono reali. Il cambiamento di variabili $x^k \to y^k$ comporta l'introduzione, come fattore nel differenziale, del modulo del determinate Jacobiano, cio

$$dx^1dx^2\cdots dx^N = \left|\det\begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial y^1} & \frac{\partial x^1}{\partial y^2} & \dots & \frac{\partial x^1}{\partial y^N} \\ \frac{\partial x^2}{\partial y^1} & \frac{\partial x^2}{\partial y^2} & \dots & \frac{\partial x^2}{\partial y^N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x^N}{\partial y^1} & \frac{\partial x^N}{\partial y^2} & \dots & \frac{\partial x^N}{\partial y^N} \end{pmatrix}\right| dy^1dy^2\cdots dy^N\,.$$

Dalla relazione precedentemente ottenuta

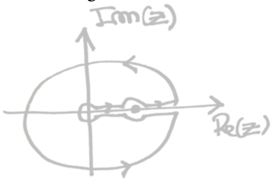
$$x^m = y^j\langle e_m|u_j\rangle\,,$$

si ha che le derivate parziali nella matrice Jacobiana sono

$$\frac{\partial x^m}{\partial y^j} = \langle e_m|u_j\rangle\,, \qquad m,j = 1,2,\dots,N\,,$$

ovvero la matrice Jacobiana la matrice unitaria del cambiamento di base. Che sia unitaria si evince dalla ortonormalit delle due basi. Infatti, detta U tale matrice, cio

$$U = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial y^1} & \frac{\partial x^1}{\partial y^2} & \dots & \frac{\partial x^1}{\partial y^N} \\ \frac{\partial x^2}{\partial y^1} & \frac{\partial x^2}{\partial y^2} & \dots & \frac{\partial x^2}{\partial y^N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x^N}{\partial y^1} & \frac{\partial x^N}{\partial y^2} & \dots & \frac{\partial x^N}{\partial y^N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle e_1|u_1\rangle & \langle e_1|u_2\rangle & \dots & \langle e_1|u_N\rangle \\ \langle e_2|u_1\rangle & \langle e_2|u_2\rangle & \dots & \langle e_2|u_N\rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle e_N|u_1\rangle & \langle e_N|u_2\rangle & \dots & \langle e_N|u_N\rangle \end{pmatrix}\,, \qquad U_m^k = \langle e_k|u_m\rangle\,,$$



$$\oint_\gamma f(z)\,dz = 0$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k z^k = f(z)$$

$$\mathrm{Res}\left[f(z), z_0\right] = \frac{1}{2i\pi}\oint_{\gamma_0} f(z)\,dz$$

l'elemento ${}^{k}_{j}$ del prodotto $UU^\dagger$, ad esempio,

$$\left(UU^\dagger\right)^k_j = U^k_m \left(U^\dagger\right)^m_j = U^k_m \left(U^{T*}\right)^m_j = \sum_{m=1}^{N} U^k_m \left(U^j_m\right)^* = \sum_{m=1}^{N} \langle e_k|u_m\rangle\langle e_j|u_m\rangle^* = \sum_{m=1}^{N} \langle e_k|u_m\rangle\langle u_m|e_j\rangle = \langle e_k|e_j\rangle = \delta^k_j\,,$$

dove si usata la relazione di completezza per la base $\{|u_m\rangle\}_{m=1}^N$. Ne consegue che $UU^\dagger = I$ e si pu dimostrare che vale anche $U^\dagger U = I$, usando la relazione di completezza per la base $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^N$, quindi la matrice U unitaria. Una propriet delle matrici unitarie quella di avere il modulo del determinate uguale ad uno il che rende uguali i differenziali

$$dx^1 dx^2 \cdots dx^N = dy^1 dy^2 \cdots dy^N\,.$$

L'integrale cercato

$$\prod_{k=1}^{N}\left(\int_{-\infty}^{\infty} dx^k\right) e^{-\pi\langle x|\hat{A}|x\rangle} \;=\; \prod_{j=1}^{N}\left(\int_{-\infty}^{\infty} dy^j\right) e^{-\pi\sum_{j=1}^{N}\lambda_j\left(y^j\right)^2}\,,$$

possiamo fattorizzare il secondo membro nel prodotto di integrali di gaussiane come

$$\prod_{k=1}^{N}\left(\int_{-\infty}^{\infty} dx^k\right) e^{-\pi\langle x|\hat{A}|x\rangle} \;=\; \prod_{j=1}^{N}\int_{-\infty}^{\infty} dy^j e^{-\pi\lambda_j\left(y^j\right)^2}\,.$$

Con il cambiamento di variabile $w = \sqrt{\pi\lambda_j}\,y^j$, che pu essere fatto in tutti gli integrali, si ha il risultato cercato, infatti

$$\prod_{k=1}^{N}\left(\int_{-\infty}^{\infty} dx^k\right) e^{-\pi\langle x|\hat{A}|x\rangle} = \prod_{j=1}^{N}\frac{1}{\sqrt{\pi\lambda_j}}\int_{-\infty}^{\infty} dw\, e^{-w^2} = \prod_{j=1}^{N}\frac{1}{\sqrt{\lambda_j}} = \frac{1}{\sqrt{\prod_{j=1}^{N}\lambda_j}} = \frac{1}{\sqrt{\det(\hat{A})}}\,,$$

dove abbiamo usato la nota propriet del determinante di un operatore, ovvero quella di essere una quantit invariante e coincidente con il prodotto degli autovalori, cio

$$\det(\hat{A}) = \prod_{k=1}^{N}\lambda_k\,.$$

$$[\sigma_k, \sigma_m] = 2i\,\varepsilon_{kmn}\sigma_n$$

$$\{\sigma_k, \sigma_m\} = 2\delta_{km} I$$

$$\hat{A}|u_k\rangle = \lambda_k|u_k\rangle$$