

METODI MATEMATICI PER LA FISICA

SECONDO APPELLO INVERNALE 5 FEBBRAIO 2026

Si risolvano cortesemente i seguenti problemi, sapendo che il punteggio assegnato a ciascuna procedura di risoluzione può variare tra lo zero e il massimo indicato ed è stabilito valutando:

1. la correttezza del risultato ottenuto e della procedura utilizzata;
2. la completezza dei passaggi riportati;
3. il livello di esemplificazione con cui sono espressi i risultati (ad esempio un risultato numerico reale non deve contenere l'unità immaginaria);
4. la correttezza del formalismo utilizzato;
5. la chiarezza dell'esposizione e la leggibilità del testo;
6. la bellezza e l'armonia del tutto.

PRIMO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

Si determini la funzione $f(z)$ tale che il prodotto $f(z)g(z)$, con

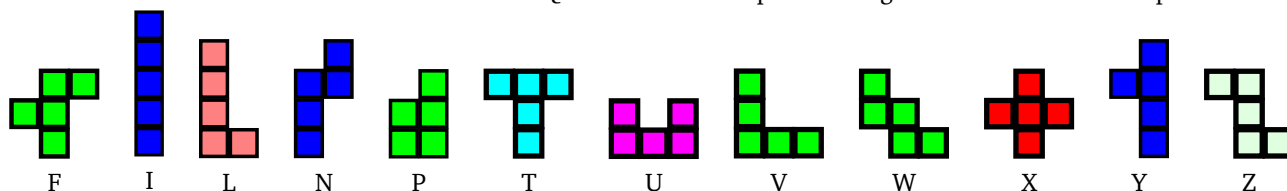
$$f(z) = \frac{1}{\sin(z^2 + 1/2)},$$

sia una funzione analitica nel disco $D_2 = \{z : |z| < 2\}$.

Si verifichi anche che tale funzione è analitica nello stesso disco.

Curiosità. I simboli f e g rappresentano i cosiddetti **pentamini** "L" e "F". Un **pentamino** è un **polimino**, ovvero una figura geometrica composta dalla giustapposizione lungo i propri lati di quadrati identici. I **pentamini** sono **polimini** composti da cinque quadrati. Infatti, il nome **pentamino** si rifà al numero cinque, la radice *penta* deriva dalla parola greca $\pi\acute{\epsilon}\nu\tau\epsilon$, che significa appunto cinque.

Con cinque quadrati si possono comporre i 12 pentamini diversi, che sono mostrati nella figura sottostante, dove sono anche indicate le lettere con cui li si denomina. Queste sono scelte per la somiglianza con la forma dei pentamini.



Il numero dei pentamini è limitato dal fatto che si considerano identici due pentamini ottenibili l'uno dall'altro con una trasformazione isometrica. Ci sono pentamini *chirali*, tali, cioè, che le loro riflessioni non possono essere ottenute con una semplice rotazione piana. Sono chirali i pentamini: F, N, P, Y e Z. Gli altri: I, T, U, V, W e X non sono chirali, ovvero esistono rotazioni piane che danno le loro immagini riflesse. I pentamini e, in generale i polimini, si usano per realizzare tassellazioni piane, anche in giochi quali il *Tetris* e il *Rampart*.

SOLUZIONE DEL PRIMO PROBLEMA

La funzione data $f(z)$ è meromorfa e ha poli semplici in corrispondenza degli zeri semplici della funzione seno con argomento $z^2 + 1/2$. Ne consegue che i poli sono gli elementi dell'insieme $\{z_k^-, z_k^+\}_{k \in \mathbb{Z}}$, con

$$z_k^\pm = \pm \sqrt{k\pi - \frac{1}{2}}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

I moduli degli zeri, quindi le loro distanze dall'origine del piano complesso, sono

$$|z_k^\pm| = \left| \sqrt{k\pi - \frac{1}{2}} \right| = \begin{cases} \sqrt{-k\pi + 1/2} & -k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \\ \sqrt{k\pi - 1/2} & k \in \mathbb{N} \end{cases},$$

i più vicini all'origine sono quelli con indici in modulo minori, i loro moduli quadri sono

$$|z_0^\pm|^2 = \frac{1}{2} < 4, \quad |z_{\pm 1}^\pm|^2 = \pm\pi + \frac{1}{2} < 4, \quad |z_{\pm 2}^\pm|^2 = \pm 2\pi + \frac{1}{2} > 4, \quad \dots$$

Ne consegue che ce ne sono sei interni al disco D_2 , sono le tre coppie $z_0^\pm$, $z_{-1}^\pm$ e $z_1^\pm$.

Per eliminare i poli usiamo la tecnica di Mittag-Leffler, ovvero sottraiamo alla funzione $\mathbb{F}(z)$ le parti principali degli sviluppi di Laurent centrati nei sei poli interni al disco D_2 . Poiché i poli sono semplici, tali parti principali hanno un solo termine, in generale per il polo $z_k^\pm$, la parte principale della serie di Laurent ha la forma

$$F_k^\pm(z) = \frac{R_k^\pm}{z - z_k^\pm}, \quad \forall k \in \mathbb{Z},$$

dove il coefficiente $R_k^\pm$ coincide col residuo

$$R_k^\pm = \text{Res}[\mathbb{F}(z), z_k^\pm] = \lim_{z \rightarrow z_k^\pm} \mathbb{F}(z)(z - z_k^\pm) = \frac{1}{2z_k^\pm \cos(z_k^{\pm 2} + 1/2)} = \frac{1}{2z_k^\pm \cos(k\pi)} = \frac{(-1)^k}{2z_k^\pm} = \pm \frac{(-1)^k}{2z_k^+}.$$

La sottrazione delle sei parti principali dà la funzione prodotto richiesta, analitica nel disco D_2 , cioè

$$\begin{aligned} \mathbb{F}(z) \mathbb{L}(z) &= \mathbb{F}(z) - \sum_{k=-1}^1 \left(\frac{R_k^-}{z - z_k^-} + \frac{R_k^+}{z - z_k^+} \right) = \mathbb{F}(z) - \sum_{k=-1}^1 \left(-\frac{R_k^+}{z + z_k^+} + \frac{R_k^+}{z - z_k^+} \right) \\ &= \mathbb{F}(z) - \sum_{k=-1}^1 R_k^+ \left(-\frac{1}{z + z_k^+} + \frac{1}{z - z_k^+} \right) = \mathbb{F}(z) - \sum_{k=-1}^1 R_k^+ \frac{2z_k^+}{z^2 - z_k^{+2}} \\ &= \mathbb{F}(z) - \sum_{k=-1}^1 \frac{(-1)^k}{z^2 - k\pi + 1/2} = \mathbb{F}(z) - \frac{1}{z^2 + 1/2} + \frac{1}{z^2 - \pi + 1/2} + \frac{1}{z^2 + \pi + 1/2} \\ &= \mathbb{F}(z) - \frac{1}{z^2 + 1/2} + \frac{2(z^2 + 1/2)}{(z^2 + 1/2)^2 - \pi^2} = \mathbb{F}(z) + \frac{(z^2 + 1/2)^2 + \pi^2}{((z^2 + 1/2)^2 - \pi^2)(z^2 + 1/2)} \\ &= \mathbb{F}(z) \left(1 + \frac{(z^2 + 1/2)^2 + \pi^2}{((z^2 + 1/2)^2 - \pi^2)(z^2 + 1/2)} \frac{1}{\mathbb{F}(z)} \right), \end{aligned}$$

ne consegue che la funzione $\mathbb{L}(z)$ cercata è

$$\mathbb{L}(z) = 1 + \frac{(z^2 + 1/2)^2 + \pi^2}{((z^2 + 1/2)^2 - \pi^2)(z^2 + 1/2)} \text{sen}(z^2 + 1/2).$$

Per verificare che è una funzione analitica nel disco D_2 , ne calcoliamo i limiti nei punti $z_0^\pm$, $z_{-1}^\pm$ e $z_1^\pm$. La funzione è pari, quindi sarà sufficiente calcolarne i limiti nei soli punti z_0^+ , z_{-1}^+ e z_1^+ . Inoltre, osservando che la dipendenza dalla variabile z è solo ella forma $z^2 + 1/2$, facciamo la sostituzione $w = z^2 + 1/2$. I tre limiti corrispondenti nella variabile w sono

$$\begin{aligned} z \rightarrow z_0^+ = \sqrt{-1/2} &\Leftrightarrow w \rightarrow 0, \\ z \rightarrow z_{-1}^+ = \sqrt{-\pi - 1/2} &\Leftrightarrow w \rightarrow -\pi, \\ z \rightarrow z_1^+ = \sqrt{\pi - 1/2} &\Leftrightarrow w \rightarrow \pi. \end{aligned}$$

Quindi si hanno

$$\begin{aligned} \lim_{w \rightarrow z_0^\pm} \mathbb{L}(z) &= \lim_{w \rightarrow 0} \mathbb{L}(z(w)) \lim_{w \rightarrow 0} \left(1 + \frac{w^2 + \pi^2}{(w^2 - \pi^2)w} \text{sen}(w) \right) = 0, \\ \lim_{w \rightarrow z_{-1}^\pm} \mathbb{L}(z) &= \lim_{w \rightarrow -\pi} \mathbb{L}(z(w)) = \lim_{w \rightarrow -\pi} \left(1 + \frac{w^2 + \pi^2}{(w^2 - \pi^2)w} \text{sen}(w) \right) = \lim_{w \rightarrow -\pi} \left(1 + \frac{w^2 + \pi^2}{2w^2} \cos(w) \right) = 0, \\ \lim_{w \rightarrow z_1^\pm} \mathbb{L}(z) &= \lim_{w \rightarrow \pi} \mathbb{L}(z(w)) = \lim_{w \rightarrow \pi} \left(1 + \frac{w^2 + \pi^2}{(w^2 - \pi^2)w} \text{sen}(w) \right) = \lim_{w \rightarrow \pi} \left(1 + \frac{w^2 + \pi^2}{2w^2} \cos(w) \right) = 0, \end{aligned}$$

i limiti esistono e sono nulli come necessario per cancellare le divergenze polari della funzione $\Gamma(z)$. L'esistenza e la finitezza dei limiti dimostra che nei sei punti considerati la funzione $\Gamma(z)$ ha altrettante singolarità eliminabili e che, quindi, questi punti possono essere inclusi nel suo dominio di analiticità.

SECONDO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

Si dimostrino le espressioni integrali della costante di Eulero-Mascheroni

$$\gamma = - \int_0^{\infty} e^{-t} \ln(t) dt, \quad \gamma = \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{e^t - 1} - \frac{e^{-t}}{t} \right) dt.$$

Si ricordi che la costante di Eulero-Mascheroni è anche l'opposto della derivata prima della funzione gamma di Eulero valutata nell'unità, cioè: $\Gamma'(1) = -\gamma$ e che la stessa costante ha la rappresentazione in forma di limite

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{j} - \ln(n) \right).$$

SOLUZIONE DEL SECONDO PROBLEMA

La prima identità si dimostra considerando la rappresentazione integrale della funzione gamma di Eulero

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad \forall z \in \{z : \operatorname{Re}(z) > 0\},$$

avente, come indicato, il semipiano della parti reali positive come dominio di convergenza. In questo dominio la convergenza è uniforme, quindi, la derivata dell'integrale coincide con l'integrale della derivata, cioè

$$\Gamma'(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} \ln(t) t^{z-1} dt, \quad \forall z \in \{z : \operatorname{Re}(z) > 0\}.$$

Valutandola nel punto $z = 1$, si ha

$$\Gamma'(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} \ln(t) dt,$$

ma, poiché $\Gamma'(1) = -\gamma$, come dato dal problema, otteniamo

$$\gamma = - \int_0^{\infty} e^{-t} \ln(t) dt,$$

che è la prima delle identità di cui si richiede la dimostrazione.

Per dimostrare la seconda, partiamo dall'integrale dato, che suddividiamo nei due contributi

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{1}{e^t - 1} - \frac{e^{-t}}{t} \right) dt = g_1 - g_2,$$

con

$$g_1 = \int_0^{\infty} \frac{dt}{e^t - 1}, \quad g_2 = \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt.$$

Le funzioni integrande di entrambi gli integrali g_1 e g_2 hanno una singolarità nell'origine, un polo semplice, le divergenze che si ottengono si cancellano nella differenza, infatti la funzione integranda completa è regolare nell'origine e quindi è ivi integrabile. Al fine di considerare i comportamenti singolari, scriviamo gli integrali in forma di limiti. Per il primo si ha

$$g_1 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{dt}{e^t - 1} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{e^{-t}}{1 - e^{-t}} dt = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \ln(1 - e^{-t}) \Big|_{\epsilon}^{\infty} = - \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \ln(1 - e^{-\epsilon}),$$

l'ultima identità si ottiene valutando la primitiva all'infinito, dove la stessa si annulla.
Per risolvere il secondo integrale, integriamo per parti,

$$g_2 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(e^{-t} \ln(t) \Big|_{\epsilon}^{\infty} + \int_{\epsilon}^{\infty} e^{-t} \ln(t) dt \right) = - \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} e^{-\epsilon} \ln(\epsilon) - \gamma,$$

il primo termine dell'ultimo membro si ottiene valutando all'infinito la primitiva, dove la stessa si annulla, mentre il secondo termine non è altro che l'espressione dell'opposto della costante di Eulero-Mascheroni ricavata in precedenza. Il risultato completo è dato dalla differenza dei due integrali

$$g_1 - g_2 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} (e^{-\epsilon} \ln(\epsilon) - \ln(1 - e^{-\epsilon})) + \gamma.$$

Il limite è nullo, infatti, considerando gli sviluppi in serie di Taylor degli esponenziali,

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} (e^{-\epsilon} \ln(\epsilon) - \ln(1 - e^{-\epsilon})) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[\left(1 - \epsilon + \frac{\epsilon^2}{2!} + \mathcal{O}(\epsilon^3) \right) \ln(\epsilon) - \ln \left(\epsilon + \frac{\epsilon^2}{2!} + \mathcal{O}(\epsilon^3) \right) \right] \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} [(1 + \mathcal{O}(\epsilon)) \ln(\epsilon) - \ln(\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon))] \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} (\ln(\epsilon) - \ln(\epsilon)) = 0. \end{aligned}$$

In definitiva,

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{1}{e^t - 1} - \frac{e^{-t}}{t} \right) dt = g_1 - g_2 = \gamma,$$

abbiamo dimostrato la seconda identità richiesta dal problema.

TERZO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

Si calcoli l'integrale in valore principale

$$\text{U} = \text{Pr} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{\sinh(2u) + \cosh(u)}.$$

Curiosità. Il simbolo  rappresenta il pentamino "U". Si veda quanto riportato in calce al primo problema.

SOLUZIONE DEL TERZO PROBLEMA

La funzione integranda è meromorfa in quanto inversa di una funzione intera, che è la somma di funzioni iperboliche. Ha poli semplici in corrispondenza degli zeri semplici di tale funzione. Li calcoliamo usando le formule di Eulero delle funzioni iperboliche, si ha

$$\sinh(2u) + \cosh(u) = \frac{e^{2u} - e^{-2u}}{2} + \frac{e^u + e^{-u}}{2} = \frac{e^{4u} + e^{3u} + e^u - 1}{2e^{2u}} = \{z = e^u\} = \frac{z^4 + z^3 + z - 1}{2z^2} = 0.$$

Una soluzione è suggerita dalla relazione tra funzioni iperboliche e funzioni trigonometriche, le une possono essere ottenute dalle altre moltiplicando gli argomenti per l'unità immaginaria i . Si ha che la funzione seno iperbolico si annulla nei multipli interi di $i\pi$, così come la funzione seno nei multipli interi di π , mentre la funzione coseno iperbolico è nulla nei multipli dispari di $i\pi/2$, essendolo la funzione coseno nei multipli dispari di $\pi/2$. Si osserva quindi che nei punti $u_0^{\pm} = \pm i\pi/2$ la funzione studiata si annulla, cioè

$$(\sinh(2u) + \cosh(u)) \Big|_{u=\pm i\pi/2} = \sinh(\pm i\pi) + \cosh\left(\pm \frac{i\pi}{2}\right) = 0.$$

Fattorizzando i due zeri appena ottenuti nella forma razionale nella variabile z , si ottiene a numeratore il polinomio di secondo grado quoziente, infatti, avendo $z = e^{\pm i\pi/2} = \pm i$,

$$\frac{(z-i)(z+i)(z^2+az-1)}{2z^2} = \frac{(z^2+1)(z^2+az-1)}{2z^2} = \frac{z^4+az^3-1}{2z^2},$$

da cui $a = 1$. Il coefficiente di z^2 del secondo polinomio a numeratore e il suo termine noto, -1 , si ottengono immediatamente dal fatto che il coefficiente della potenza massima z^4 del polinomio originale è unitario e il termine noto è proprio -1 . Gli ultimi due zeri del polinomio a numeratore originale sono gli zeri del polinomio di secondo grado $z^2 + z - 1$, ovvero le soluzioni dell'equazione $z^2 + z - 1 = 0$, che, nelle variabili z e $w = \ln(z)$ sono

$$z_1^\pm = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}, \quad w_0^\pm = \ln\left(-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}\right).$$

Delle due soluzioni logaritmiche la prima, con il segno alto è reale, mentre la seconda ha una parte immaginaria non nulla, cioè

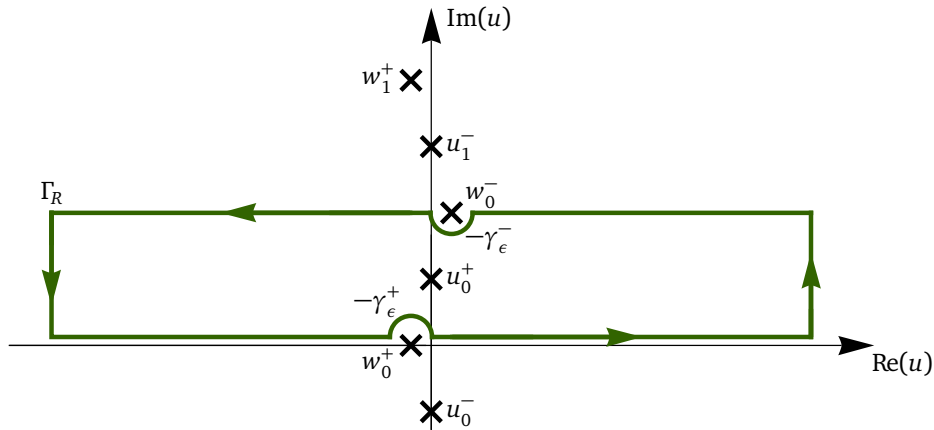
$$w_0^+ = \ln\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right), \quad w_0^- = \ln\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right) = \ln\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right) + i\pi = -\ln\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right) + i\pi.$$

Considerando la periodicità delle funzioni iperboliche, si ottengono le successioni di poli

$$\left\{u_k^\pm = i\pi\left(\pm\frac{1}{2} + 2k\right)\right\}_{k \in \mathbb{Z}}, \quad \left\{w_k^+ = \ln\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right) + 2ki\pi\right\}_{k \in \mathbb{Z}}, \quad \left\{w_k^- = -\ln\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right) + (2k+1)i\pi\right\}_{k \in \mathbb{Z}}.$$

Gli zeri sono mostrati in figura, indicati dal simbolo “ $\times$ ”. L'unico zero reale è $w_0^+ = \ln(-1/2 + \sqrt{5}/2) \simeq -0,48$ ed è rispetto a esso che va calcolato il valore principale, cioè

$$\blacksquare = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{-\infty}^{w_0^+ - \epsilon} \frac{du}{\sinh(2u) + \cosh(u)} + \int_{w_0^+ + \epsilon}^{\infty} \frac{du}{\sinh(2u) + \cosh(u)} \right).$$



D'altro canto, facendo il cambiamento di variabile $u' = -u$, si ottiene

$$\blacksquare = \text{Pr} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du'}{-\sinh(2u') + \cosh(u')}.$$

Il polo reale in questo caso è l'opposto del precedente, $-w_0^+$, quindi il valore principale può essere calcolato esplicitamente come

$$\blacksquare = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{-\infty}^{-w_0^+ - \epsilon} \frac{du'}{-\sinh(2u') + \cosh(u')} + \int_{-w_0^+ + \epsilon}^{\infty} \frac{du'}{-\sinh(2u') + \cosh(u')} \right).$$

Consideriamo il percorso chiuso rettangolare dentato Γ_R , rappresentato in verde nella figura. È l'unione di sei tratti rettilinei e di due archi, cioè

$$\begin{aligned} \Gamma_R = & [-R, w_0^+ - \epsilon] \cup (-\{u : u = w_0^+ + \epsilon e^{i\theta}, \theta \in [0, \pi]\}) \cup [w_0^+ + \epsilon, R] \cup [R, R + i\pi] \cup [R + i\pi, w_0^- - \epsilon] \\ & \cup (-\{u : u = w_0^- + \epsilon e^{i\theta}, \theta \in [\pi, 2\pi]\}) \cup [w_0^- + \epsilon, -R + i\pi] \cup [-R + i\pi, -R] \cup [-R, w_0^+ - \epsilon], \end{aligned}$$

dove si è usato il simbolo $[a_1, a_2]$ per indicare il segmento rettilineo avente per estremi i punti a_1 e a_2 , orientato nel verso che va dal primo al secondo. L'integrale della funzione integranda data dal problema su questo percorso chiuso, che avvolge un unico polo, u_0^+ , e lo fa una sola volta, si calcola con il teorema dei residui e vale

$$\oint_{\Gamma_R} \frac{du}{\sinh(2u) + \cosh(u)} = 2i\pi \operatorname{Res} \left[\frac{du}{\sinh(2u) + \cosh(u)}, u_0^+ \right],$$

questo valore è indipendente da R , cioè vale $\forall R \in (0, \infty)$.

Lo stesso integrale in termini dei singoli contributi si può scrivere come

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma_R} \frac{du}{\sinh(2u) + \cosh(u)} &= \int_{-R}^{w_0^+ - \epsilon} \frac{du}{\sinh(2u) + \cosh(u)} + \int_{w_0^+ + \epsilon}^R \frac{du}{\sinh(2u) + \cosh(u)} \\ &\quad + \int_R^{\operatorname{Re}(w_0^-) + \epsilon} \frac{du}{\sinh(2u + 2i\pi) + \cosh(u + i\pi)} + \int_{\operatorname{Re}(w_0^-) - \epsilon}^{-R} \frac{du}{\sinh(2u + 2i\pi) + \cosh(u + i\pi)} \\ &\quad + i \int_0^\pi \frac{du}{\sinh(2R + 2iu) + \cosh(R + iu)} + i \int_\pi^0 \frac{du}{\sinh(-2R + 2iu) + \cosh(-R + iu)} \\ &\quad - \int_{\gamma_\epsilon^-} \frac{du}{\sinh(2u) + \cosh(u)} - \int_{\gamma_\epsilon^+} \frac{dz}{\sinh(2u) + \cosh(u)}, \\ &= \int_{-R}^{w_0^+ - \epsilon} \frac{du}{\sinh(2u) + \cosh(u)} + \int_{w_0^+ + \epsilon}^R \frac{du}{\sinh(2u) + \cosh(u)} \\ &\quad + \int_{-w_0^+ + \epsilon}^R \frac{du}{-\sinh(2u) + \cosh(u)} + \int_{-R}^{-w_0^+ - \epsilon} \frac{du}{-\sinh(2u) + \cosh(u)} \\ &\quad + i \int_0^\pi \frac{du}{\sinh(2R + 2iu) + \cosh(R + iu)} + i \int_\pi^0 \frac{du}{\sinh(-2R + 2iu) + \cosh(-R + iu)} \\ &\quad - \int_{\gamma_\epsilon^-} \frac{du}{\sinh(2u) + \cosh(u)} - \int_{\gamma_\epsilon^+} \frac{du}{\sinh(2u) + \cosh(u)}, \end{aligned}$$

dove i primi quattro integrali sono i contributi sui tratti rettilinei orizzontali, il quinto e il sesto sono i contributi dei due tratti verticali, mentre gli ultimi due sono i contributi degli archi, in cui abbiamo usato i simboli

$$\gamma_\epsilon^- = \{u : u = w_0^- + \epsilon e^{i\theta}, \theta \in [\pi, 2\pi]\}, \quad \gamma_\epsilon^+ = \{u : u = w_0^+ + \epsilon e^{i\theta}, \theta \in [0, \pi]\}.$$

Si noti, inoltre, che negli integrali dell'espressione precedente è stata usata sempre la variabile u , che si assume reale sui tratti rettilinei, complessa sugli archi.

Calcoliamo i limiti per $R \rightarrow \infty$ e $\epsilon \rightarrow 0^+$ dei valori di questi contributi. I primi quattro integrali, usando la definizione di integrale in valore principale originale e considerando il risultato ottenuto con la sostituzione $u' = -u$ riportato alla fine della pagina precedente, coincidono con il doppio dell'integrale cercato, ovvero

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} &\left(\int_{-R}^{w_0^+ - \epsilon} \frac{du}{\sinh(2u) + \cosh(u)} + \int_{w_0^+ + \epsilon}^R \frac{du}{\sinh(2u) + \cosh(u)} \right. \\ &\quad \left. + \int_{-w_0^+ + \epsilon}^R \frac{du}{-\sinh(2u) + \cosh(u)} + \int_{-R}^{-w_0^+ - \epsilon} \frac{du}{-\sinh(2u) + \cosh(u)} \right) = 2 \blacksquare. \end{aligned}$$

Dimostriamo che, per $R \rightarrow \infty$, i limiti dei contributi sui tratti verticali sono nulli. A tal fine, usiamo la disuguaglianza di Darboux per limitare i moduli degli stessi integrali, cioè

$$\begin{aligned} \left| \pm i \int_0^\pi \frac{du}{\sinh(\pm 2R + 2iu) + \cosh(\pm R + iu)} \right| &\leq \int_0^\pi \frac{2 du}{|e^{\pm 2R + 2iu} - e^{\mp 2R - 2iu} + e^{\pm R + iu} + e^{\mp R - iy}|} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{e^{2R}} \int_0^\pi \frac{2 du}{|e^{2iu} - e^{-4R - 2iu} + e^{-R + iu} + e^{-3R - iu}|} \\ \frac{1}{e^{2R}} \int_0^\pi \frac{2 du}{|e^{-4R + 2iu} - e^{-2iu} + e^{-3R + iu} + e^{-R - iu}|} \end{cases} \\ &\leq \begin{cases} \frac{1}{e^{2R}} \int_0^\pi \frac{2 du}{|1 - |e^{-4R - 2iu} + e^{-R + iu} + e^{-3R - iu}||} \\ \frac{1}{e^{2R}} \int_0^\pi \frac{2 du}{|1 - |e^{-4R + 2iu} + e^{-3R + iu} + e^{-R - iu}||} \end{cases}, \end{aligned}$$

le quantità in modulo, sottratte all'unità in entrambi i denominatori sono infinitesime al divergere di R , si annullano come $\mathcal{O}(e^{-R})$, segue che: $\exists R_0 \in (0, \infty)$, tale che

$$| -e^{-4R - 2iu} + e^{-R + iu} + e^{-3R - iu} |, | e^{-4R + 2iu} + e^{-3R + iu} + e^{-R - iu} | \leq \frac{1}{2}, \quad \forall R \geq R_0,$$

sotto questa condizione si ha anche

$$\begin{aligned} \left| \pm i \int_0^\pi \frac{du}{\sinh(\pm 2R + 2iu) + \cosh(\pm R + iu)} \right| &\leq \begin{cases} \frac{1}{e^{2R}} \int_0^\pi \frac{2 du}{|1 - |e^{-4R - 2iu} + e^{-R + iu} + e^{-3R - iu}||} \\ \frac{1}{e^{2R}} \int_0^\pi \frac{2 du}{|1 - |e^{-4R + 2iu} + e^{-3R + iu} + e^{-R - iu}||} \end{cases} \\ &\leq \frac{1}{e^{2R}} \int_0^\pi \frac{2 du}{1/2} = \frac{4\pi}{e^{2R}} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Rimangono i contributi sugli archi γ_ϵ^+ e γ_ϵ^- , da calcolare nel limite $\epsilon \rightarrow 0^+$. Usando i lemmi di integrazione sugli archi, si hanno

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\gamma_\epsilon^\pm} \frac{du}{\sinh(2u) + \cosh(u)} &= i\pi \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{u - w_0^\pm}{\sinh(2u) + \cosh(u)} = i\pi \frac{1}{2 \cosh(2w_0^\pm) + \sinh(w_0^\pm)} \\ &= i\pi \frac{1}{e^{2w_0^\pm} + e^{-2w_0^\pm} + (e^{w_0^\pm} - e^{-w_0^\pm})/2}, \end{aligned}$$

avendo che $w_0^\pm = \ln(-1/2 \pm \sqrt{5}/2)$,

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\gamma_\epsilon^\pm} \frac{du}{\sinh(2u) + \cosh(u)} &= i\pi \frac{1}{e^{2w_0^\pm} + e^{-2w_0^\pm} + (e^{w_0^\pm} - e^{-w_0^\pm})/2} \\ &= i\pi \frac{1}{\left(-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}\right)^{-2} + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2} - \left(-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}\right)^{-1}\right)} \\ &= i\pi \frac{1}{\left(-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2} - \left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}\right)\right)} \\ &= i\pi \frac{2}{5}, \end{aligned}$$

si noti che i due contributi sono uguali.

Possiamo calcolare il limite completo, che è lo somma dei precedenti, come

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \oint_{\Gamma_R} \frac{du}{\sinh(2u) + \cosh(u)} = 2 \blacksquare - \frac{4i\pi}{5},$$

dove il segno meno dell'ultimo termine segue dal verso di percorrenza negativo degli archi.
Questo valore coincide con $2i\pi$ volte il residuo in $u = u_0^+ = i\pi/2$, cioè

$$2i\pi \operatorname{Res} \left[\frac{1}{\sinh(2u) + \cosh(u)}, u_0^+ \right] = 2 \text{W} - \frac{4i\pi}{5},$$

da cui

$$\text{W} = \frac{2i\pi}{5} + i\pi \operatorname{Res} \left[\frac{1}{\sinh(2u) + \cosh(u)}, u_0^+ \right].$$

Calcoliamo il residuo in u_0^+ ,

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} \left[\frac{1}{\sinh(2u) + \cosh(u)}, u_0^+ \right] &= \operatorname{Res} \left[\frac{1}{\sinh(2u) + \cosh(u)}, \frac{i\pi}{2} \right] = \frac{1}{2 \cosh(2u_0^+) + \sinh(u_0^+)} \\ &= \frac{1}{2 \cosh(i\pi) + \sinh(i\pi/2)} = \frac{1}{-2 + i}, \end{aligned}$$

da cui

$$\operatorname{Res} \left[\frac{1}{\sinh(2u) + \cosh(u)}, u_0^+ \right] = \frac{-2 - i}{5}.$$

Sostituiamo nell'espressione precedente di W e otteniamo il risultato finale

$$\text{W} = \frac{2i\pi}{5} + \frac{-2i\pi + \pi}{5} = \frac{\pi}{5}.$$

QUARTO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

Si dimostri che, per ogni matrice 2×2 a elementi complessi con traccia nulla, esistono due matrici 2×2 a elementi complessi, tali che il loro commutatore coincide con la matrice data.

Indicando con $M_{\mathbb{C}}(2 \times 2)$ lo spazio vettoriale della matrici 2×2 a elementi complessi, la proposizione da dimostrare è: $\forall \text{W} \in M_{\mathbb{C}}(2 \times 2)$, con $\operatorname{Tr}(\text{W}) = 0$, $\exists \text{X}, \text{Z} \in M_{\mathbb{C}}(2 \times 2)$, tali che: $\text{W} = [\text{X}, \text{Z}]$.

Curiosità. I simboli W , X e Z rappresentano rispettivamente i pentamini "W", "X" e "Z". Si veda quanto riportato in calce al primo problema.

SOLUZIONE DEL QUARTO PROBLEMA

Sfruttiamo la base $\{\sigma_k\}_{k=0}^3$ dello spazio vettoriale $M_{\mathbb{C}}(2 \times 2)$, composta dalla matrice identità $\sigma_0 = \operatorname{diag}(1, 1)$ e le tre matrici di Pauli σ_1 , σ_2 e σ_3 . Questa base è ortonormale rispetto al prodotto scalare indotto dalla traccia. Lo definiamo come segue: $\forall A, B \in M_{\mathbb{C}}(2 \times 2)$, il prodotto scalare delle due matrici A e B , indicato dal simbolo (A, B) è

$$(A, B) \equiv \frac{1}{2} \operatorname{Tr}(A^\dagger B),$$

è la metà della traccia del prodotto dell'aggiunto hermitiano della prima matrice, la A e della seconda matrice, la B . Una matrice $\text{W} \in M_{\mathbb{C}}(2 \times 2)$ è rappresentata dalla combinazione lineare

$$\text{W} = \sum_{k=0}^3 w_k \sigma_k,$$

dove le componenti sono date dai prodotti scalari

$$w_k = (\sigma_k, \text{W}) = \frac{1}{2} \operatorname{Tr}(\sigma_k \text{W}), \quad \forall k \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

La condizione di traccia nulla implica $w_0 = 0$, infatti, la nullità della traccia equivale alla nullità del prodotto scalare $(\sigma_0, \mathbb{M})$, che è, appunto, la componente w_0 . Quindi, una generica matrice 2×2 a elementi complessi avente traccia nulla, può essere decomposta come

$$\mathbb{M} = \sum_{k=1}^3 w_k \sigma_k,$$

ovvero è data dalla combinazione delle sole matrici di Pauli.

Assumiamo che esistano le due matrici $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in M_{\mathbb{C}}(2 \times 2)$, tali che $\mathbb{M} = [\mathbb{A}, \mathbb{B}]$, per queste si hanno le decomposizioni

$$\mathbb{A} = \sum_{j=0}^3 x_j \sigma_j, \quad \mathbb{B} = \sum_{j=0}^3 z_j \sigma_j.$$

Imponiamo l'identità cercata al livello delle decomposizioni, si ha

$$\mathbb{M} = \sum_{k=1}^3 w_k \sigma_k = [\mathbb{A}, \mathbb{B}] = \left[\sum_{j=0}^3 x_j \sigma_j, \sum_{l=0}^3 z_l \sigma_l \right] = \sum_{j,l=0}^3 x_j z_l [\sigma_j, \sigma_l].$$

Usando il fatto che la matrice identità abbia commutatore nullo con tutte le matrici e l'algebra delle matrici di Pauli

$$[\sigma_m, \sigma_n] = 2i \epsilon_{mnp} \sigma_p, \quad \forall m, n, p \in \{1, 2, 3\},$$

dove ϵ_{mnp} è il simbolo di Levi-Civita, la precedente relazione può essere riscritta come

$$\sum_{k=1}^3 w_k \sigma_k = \sum_{j,l=0}^3 x_j z_l [\sigma_j, \sigma_l] = \sum_{j,l=1}^3 x_j z_l [\sigma_j, \sigma_l] = 2i \sum_{j,l=1}^3 \epsilon_{jlm} x_j z_l \sigma_m,$$

in termini vettoriali diventa

$$\vec{w} \cdot \vec{\sigma} = 2i (\vec{x} \times \vec{z}) \cdot \vec{\sigma}.$$

Questa identità dimostra l'asserto. Infatti, la proposizione proposta:

$$\forall \mathbb{M} \in M_{\mathbb{C}}(2 \times 2), \exists \mathbb{A}, \mathbb{B} \in M_{\mathbb{C}}(2 \times 2), \text{ tali che: } \mathbb{M} = [\mathbb{A}, \mathbb{B}],$$

può essere riformulata in termini dei quadri-vettori complessi delle componenti, come:

$$\forall \vec{w} \in \mathbb{C}^3, \exists \vec{x}, \vec{z} \in \mathbb{C}^3, \text{ tali che: } \vec{w} = 2i (\vec{x} \times \vec{z}).$$

Questa tesi è facilmente dimostrabile, infatti esistono infinite coppie di tri-vettori il cui prodotto scalare da un terzo vettore dato. Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} w_1 = x_2 z_3 - x_3 z_2 \\ w_2 = x_3 z_1 - x_1 z_3 \\ w_3 = x_1 z_2 - x_2 z_1 \end{cases},$$

fissiamo le prime due componenti di $\vec{x}$ e la terza di $\vec{z}$ all'unità, cioè poniamo: $x_1 = x_2 = z_3 = 1$ e assumiamo che $w_1 + w_2 \neq 0$ e $w_3 \neq 0$, il sistema per ottenere le tre componenti: x_3, z_1 e z_2 diventa

$$\begin{cases} w_1 = 1 - x_3 z_2 \\ w_2 = x_3 z_1 - z_3 \\ w_3 = z_2 - z_1 \end{cases},$$

si hanno le soluzioni

$$z_1 = -\frac{w_2 + 1}{w_1 + w_2} w_3, \quad z_2 = \frac{w_1 - 1}{w_1 + w_2} w_3, \quad x_3 = -\frac{w_1 + w_2}{w_3}.$$

QUINTO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 5/30)

Si calcolino la traccia e il determinante dell'operatore

$$\widehat{T} = |x\rangle\langle y|$$

con $|x\rangle$ e $|y\rangle$ vettori non ortogonali dello spazio di Hilbert a $N > 1$ dimensioni E_N .

Curiosità. Il simbolo $\widehat{T}$ rappresenta il pentamino "T". Si veda quanto riportato in calce al primo problema.

SOLUZIONE DEL QUINTO PROBLEMA

Usiamo la base ortonormale $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^N$ dello spazio di Hilbert E_N in cui è definito l'operatore $\widehat{T}$, per calcolare la traccia dell'operatore, che, essendo un'invariante, non dipende dalla base scelta. Usando, quindi, la rappresentazione matriciale dell'operatore rispetto a questa base, si ha

$$\text{Tr}(\widehat{T}) = \sum_{k=1}^N \langle e_k | \widehat{T} | e_k \rangle,$$

è la somma degli elementi della diagonale. Sfruttiamo la definizione dell'operatore come prodotto *ket-bra* e la relazione di completezza della base ortonormale

$$\sum_{k=1}^N |e_k\rangle\langle e_k| = \hat{I},$$

dove $\hat{I}$ è l'operatore identità, si ha

$$\text{Tr}(\widehat{T}) = \sum_{k=1}^N \langle e_k | \widehat{T} | e_k \rangle = \sum_{k=1}^N \langle e_k | x \rangle \langle y | e_k \rangle = \sum_{k=1}^N \langle y | e_k \rangle \langle e_k | x \rangle = \langle y | \left(\sum_{k=1}^N |e_k\rangle\langle e_k| \right) | x \rangle = \langle y | x \rangle \neq 0,$$

ovvero la traccia coincide con il prodotto scalare $\langle y | x \rangle$, che è diverso da zero in quanto i vettori, come dato dal problema, non sono ortogonali.

Il determinante coincide con il prodotto degli autovalori dell'operatore. Dalla sua definizione si evince che il vettore $|x\rangle$ è autovettore, infatti applicando l'operatore

$$\widehat{T}|x\rangle = |x\rangle\langle y|x\rangle = \text{Tr}(\widehat{T})|x\rangle,$$

si ottiene che il vettore $|x\rangle$, come intuito, è un autovettore. Inoltre, l'autovalore corrispondente è $\text{Tr}(\widehat{T}) \neq 0$. Consideriamo il sotto-spazio di E_N , $E_{N-1} = \{|v\rangle \in E_N : \langle y|v\rangle = 0\} \subset E_N$, ortogonale al vettore $|y\rangle \in E_N$. Allora, $\forall |u\rangle \in E_{N-1}$,

$$\widehat{T}|u\rangle = |x\rangle\langle y|u\rangle = |0\rangle = 0|u\rangle,$$

dove abbiamo scritto il vettore nullo come prodotto dello scalare zero per il vettore $|u\rangle$. Questo significa che l'operatore ha, oltre all'autovalore non degenere e non nullo $\text{Tr}(\widehat{T})$, anche l'autovalore zero che ha molteplicità geometrica $N - 1 > 0$. Questo è sufficiente ad annullare il determinante, cioè

$$\det(\widehat{T}) = \text{Tr}(\widehat{T}) \cdot 0^{N-1} = 0.$$

Riassumendo, la traccia e il determinante dell'operatore sono

$$\text{Tr}(\widehat{T}) = \langle y|x\rangle \neq 0, \quad \det(\widehat{T}) = 0.$$

SESTO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

Si ottenga, nel dominio $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, l'espressione analitica della funzione $\blacksquare(x, y)$, che ha rappresentazione integrale

$$\blacksquare(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta''\left(\frac{u^2 - x}{y}\right) e^{-u^2} du,$$

dove $\delta(t)$ è la distribuzione delta di Dirac.

Curiosità. Il simbolo $\blacksquare$ rappresenta il pentamino "P". Si veda quanto riportato in calce al primo problema.

SOLUZIONE DEL SESTO PROBLEMA

Integriamo per parti due volte, integrando la distribuzione delta di Dirac. A tal fine, moltiplichiamo e dividiamo per la derivata prima dell'argomento della stessa rispetto alla variabile u . La prima integrazione dà

$$\begin{aligned} \blacksquare(x, y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta''\left(\frac{u^2 - x}{y}\right) e^{-u^2} du = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2u}{y} \delta''\left(\frac{u^2 - x}{y}\right) \frac{y}{2u} e^{-u^2} du \\ &= \underbrace{\delta'\left(\frac{u^2 - x}{y}\right) \frac{y}{2u} e^{-u^2}}_{=0} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \frac{y}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \delta'\left(\frac{u^2 - x}{y}\right) \left(-\frac{1}{u^2} - 2\right) e^{-u^2} du \\ &= \frac{y}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \delta'\left(\frac{u^2 - x}{y}\right) \left(\frac{1}{u^2} + 2\right) e^{-u^2} du. \end{aligned}$$

Il primo termine della seconda riga è nullo in quanto, nei limiti $u \rightarrow \pm\infty$, si hanno gli annullamenti della funzione e^{-u^2}/u , che moltiplica la derivata prima della distribuzione delta di Dirac e di questa stessa distribuzione, che ha argomento divergente. La seconda integrazione per parti è

$$\begin{aligned} \blacksquare(x, y) &= \frac{y}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \delta'\left(\frac{u^2 - x}{y}\right) \left(\frac{1}{u^2} + 2\right) e^{-u^2} du \\ &= \frac{y}{2} \left[\underbrace{\delta\left(\frac{u^2 - x}{y}\right) \frac{y}{2u} \left(\frac{1}{u^2} + 2\right) e^{-u^2}}_{=0} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \frac{y}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(\frac{u^2 - x}{y}\right) \left(\frac{3}{u^4} + \frac{4}{u^2} + 4\right) e^{-u^2} du \right] \\ &= \frac{y^2}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(\frac{u^2 - x}{y}\right) \left(\frac{3}{u^4} + \frac{4}{u^2} + 4\right) e^{-u^2} du. \end{aligned}$$

L'annullamento del primo termine della seconda riga si ottiene usando l'argomento del caso precedente. Possiamo definire la funzione

$$f(u) = \frac{u^2 - x}{y},$$

che rappresenta l'argomento della distribuzione delta di Dirac e riscrivere l'integrale come

$$\blacksquare(x, y) = \frac{y^2}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(f(u)) \left(\frac{3}{u^4} + \frac{4}{u^2} + 4\right) e^{-u^2} du.$$

La funzione $f(u)$ ha due zeri semplici in $u_{\pm} = \pm\sqrt{x}$, che sono reali se $x \in (0, \infty) \subset D$, sono immaginari puri, se $x \in (-\infty, 0) \subset D$. Riscriviamo la distribuzione delta di Dirac, che ha per argomento la funzione $f(u)$, come somma di distribuzioni, cioè si ha l'identità formale con legge duplice

$$\delta(f(u)) = \begin{cases} \frac{\delta(u - u_-)}{|f'(u_-)|} + \frac{\delta(u - u_+)}{|f'(u_+)|} = \frac{\delta(u - u_-)}{|2u_-/y|} + \frac{\delta(u - u_+)}{|2u_+/y|} = \frac{\delta(u - u_-) + \delta(u - u_+)}{2|\sqrt{x}/y|} & x \in (0, \infty) \\ 0 & x \in (-\infty, 0) \end{cases}.$$

Il valore nullo nel secondo caso è conseguenza della non realtà degli zeri della funzione $f(u)$, che implica il non annullamento dell'argomento della distribuzione delta di Dirac per ogni $u \in \mathbb{R}$.

Nel primo caso, cioè per ogni $(x, y) \in D \setminus (-\infty, 0)$, si ha

$$\mathbb{H}(x, y) = \frac{y^2}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta(u + \sqrt{x}) + \delta(u - \sqrt{x})}{2|\sqrt{x}/y|} \left(\frac{3}{u^4} + \frac{4}{u^2} + 4 \right) e^{-u^2} du = \frac{|y|^3}{4\sqrt{x}} \left(\frac{3}{x^2} + \frac{4}{x} + 4 \right) e^{-x},$$

dove abbiamo usato: $|\sqrt{x}| = \sqrt{x}$, poiché $x \in (0, \infty)$ e, semplicemente, $y^2|y| = |y|^3$. In definitiva, l'espressione valida nel dominio D è

$$\mathbb{H}(x, y) = \theta(x) \frac{|y|^3}{4\sqrt{x}} \left(\frac{3}{x^2} + \frac{4}{x} + 4 \right) e^{-x},$$

dove è stata inserita la funzione a gradino di Heaviside, il cui simbolo è $\theta(x)$, che annulla la funzione completa per valori negativi di x .