Metodi Matematici per la Fisica

Secondo appello invernale - 5 febbraio 2025

Si risolvano cortesemente i seguenti problemi, sapendo che il punteggio assegnato a ciascuna procedura di risoluzione può variare tra lo zero e il massimo indicato ed è stabilito valutando:

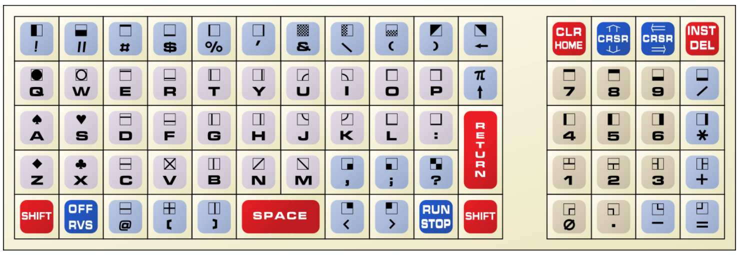
1. la correttezza del risultato ottenuto e della procedura utilizzata;
2. la completezza dei passaggi riportati;
3. il livello di esemplificazione con cui sono espressi i risultati (ad esempio un risultato numerico reale non deve contenere l'unità immaginaria);
4. la correttezza del formalismo utilizzato;
5. la chiarezza dell'esposizione e la leggibilità del testo;
6. la bellezza e l'armonia del tutto.

Primo problema (punteggio massimo: 6/30)

Si dimostri il seguente risultato

$$\bigcirc = \oint_{|z|=1} \sqrt{1-\frac{1}{z}}\,\frac{dz}{z} = 2i\pi\,.$$

Curiosità. Il simbolo $\bigcirc$ è uno dei simboli grafici presenti sui tasti dei computer **Commodore**, questo in particolare era nel tasto della lettera "W", si veda la figura a lato. Tali simboli furono inseriti sin dal 1997 per facilitare la scrittura di programmi con interfacce grafiche con computer che non avevano la possibilità di gestire la cosiddetta grafica *raster*.



Utilità. Potrebbe essere utile usare la rappresentazione in forma di integrale di Eulero di primo tipo della funzione beta.

Soluzione del primo problema

Facciamo la sostituzione $z = e^{i\theta}$, consideriamo cioè la parametrizzazione $\{z : z = e^{i\theta}, \theta \in [0, 2\pi]\}$ della circonferenza unitaria che e il percorso d'integrazione, si ha

$$\bigcirc = i\int_0^{2\pi} \sqrt{1-e^{-i\theta}}\,d\theta\,.$$

Mettiamo in evidenza l'esponenziale $\epsilon^{-i\theta/2}$ e usiamo la formula di Eulero per l'esponenziale e quella di duplicazione per la funzione seno,

$$\begin{aligned}
\bigcirc &= i\int_0^{2\pi} \sqrt{1-e^{-i\theta}}\,d\theta = i\int_0^{2\pi} e^{-i\theta/4}\sqrt{e^{i\theta/2}-e^{-i\theta/2}}\,d\theta \\
&= i\int_0^{2\pi} (\cos(\theta/4) - i\,\mathrm{sen}(\theta/4))\sqrt{2i\,\mathrm{sen}(\theta/2)}\,d\theta && (1)\\
&= 2i^{3/2}\left(\int_0^{2\pi} \cos^{3/2}(\theta/4)\,\mathrm{sen}^{1/2}(\theta/4)\,d\theta - i\int_0^{2\pi}\cos^{1/2}(\theta/4)\,\mathrm{sen}^{3/2}(\theta/4)\,d\theta\right) && (2)\\
&= 8i^{3/2}\left(\int_0^{\pi/2} \cos^{3/2}(\alpha)\,\mathrm{sen}^{1/2}(\alpha)\,d\alpha - i\int_0^{2\pi}\cos^{1/2}(\alpha)\,\mathrm{sen}^{3/2}(\alpha)\,d\alpha\right),
\end{aligned}$$

l'ultima espressione è stata ottenuta con la sostituzione $\alpha = \theta/4$.
Consideriamo la rappresentazione integrale della funzione beta di Eulero

$$\beta(z,u) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{u-1} dt = \frac{\Gamma(z)\Gamma(u)}{\Gamma(z+u)},$$

la rappresentazione converge per (z,u), tale che: $(\mathrm{Re}(z), \mathrm{Re}(u)) \in (0,\infty) \times (0,\infty)$. Facciamo la sostituzione $t = \cos(\beta)$, per cui: $dt = -2\,\mathrm{sen}(\beta)\cos(\beta) d\beta$ e si ha

$$\beta(z,u) = 2\int_0^{\pi/2} \cos^{2z-1}(\beta)\,\mathrm{sen}^{2u-1}(\beta) d\beta\,.$$

I due integrali di $\boxed{\bigcirc}$ possono essere espressi in termini della funzione beta, infatti

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{3/2}(\alpha)\,\mathrm{sen}^{1/2}(\alpha) d\alpha = \frac{1}{2}\beta\left(\frac{5}{4},\frac{3}{4}\right), \qquad \int_0^{\pi/2} \cos^{1/2}(\alpha)\,\mathrm{sen}^{3/2}(\alpha) d\alpha = \frac{1}{2}\beta\left(\frac{3}{4},\frac{5}{4}\right).$$

Poiché la funzione beta è simmetrica rispetto allo scambio delle variabili, i due integrali coincidono e sono

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{3/2}(\alpha)\,\mathrm{sen}^{1/2}(\alpha) d\alpha = \int_0^{\pi/2} \cos^{1/2}(\alpha)\,\mathrm{sen}^{3/2}(\alpha) d\alpha = \frac{1}{2}\beta\left(\frac{5}{4},\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{2}\frac{\Gamma(5/4)\Gamma(3/4)}{\Gamma(2)}.$$

Poniamo $\Gamma(2) = 1! = 1$ e usiamo l'equazione ricorsiva per $\Gamma(5/4)$, cioè

$$\Gamma\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right),$$

si ottiene

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{3/2}(\alpha)\,\mathrm{sen}^{1/2}(\alpha) d\alpha = \int_0^{\pi/2} \cos^{1/2}(\alpha)\,\mathrm{sen}^{3/2}(\alpha) d\alpha = \frac{1}{2}\frac{\Gamma(5/4)\Gamma(3/4)}{\Gamma(2)} = \frac{\Gamma(1/4)\Gamma(3/4)}{8}.$$

Usando la relazione di riflessione della funzione gamma

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\mathrm{sen}(z\pi)},$$

con $z = 1/4$

$$\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{\pi}{\mathrm{sen}(\pi/4)} = \pi\sqrt{2},$$

per l'integrale precedente si ottiene

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{3/2}(\alpha)\,\mathrm{sen}^{1/2}(\alpha) d\alpha = \frac{\Gamma(1/4)\Gamma(3/4)}{8} = \frac{\pi\sqrt{2}}{8}.$$

Sostituiamo questo risultato nell'espressione di $\boxed{\bigcirc}$,

$$\begin{aligned}\boxed{\bigcirc} &= 8i^{3/2}(1-i)\frac{\pi\sqrt{2}}{8} = \left(i^{3/2} - i^{5/2}\right)\pi\sqrt{2} = \left(e^{3i\pi/4} - e^{5i\pi/4}\right)\pi\sqrt{2} = \left(e^{3i\pi/4} - e^{-3i\pi/4}\right)\pi\sqrt{2}\\ &= 2i\,\mathrm{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right)\pi\sqrt{2},\end{aligned}$$

infine, ponendo $\mathrm{sen}(3\pi/4) = 1/\sqrt{2}$, si arriva al valore richiesto, ovvero

$$\boxed{\bigcirc} = 2i\pi\,.$$

Secondo problema (punteggio massimo: 5/30)

Si calcoli l'integrale in valore principale

$$\boxed{\diagdown} = \mathrm{Pr}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^3+1} dx\,.$$

Curiosità. Il simbolo grafico $\boxed{\diagdown}$ è quello presente sul tasto della lettera "I" dei computer **Commodore**, come descritto nel primo problema.

Soluzione del secondo problema

La funzione integranda è polidroma e ha tre poli semplici coincidenti con le tre radici terze di -1, ovvero nei punti dell'insieme $\left\{z_k = e^{(2k+1)i\pi/3}\right\}_{k=0}^{2} = \left\{e^{i\pi/3} = 1/2 + i\sqrt{3}/2, e^{i\pi} = -1, e^{5i\pi/3} = 1/2 - i\sqrt{3}/2\right\}$. Il valore principale si considera rispetto al polo $z_1 = -1$ che appartiene al percorso d'integrazione, l'asse reale.
Con la formula di Sokhotski-Plemelj l'integrale può essere espresso come

$$\boxbslash = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{(x+1+i\epsilon)(x-z_0)(x-z_2)} dx + i\pi \left.\frac{\sqrt{x}}{(x-z_0)(x-z_2)}\right|_{x=-1} .$$

Per l'integrale si può usare il lemma di Jordan e il teorema dei residui chiudendo il percorso indifferentemente nel semipiano della parti immaginarie positive o negative. Scegliamo il primo, poiché in questo caso si ha un solo residuo, quello nel polo $z_0 = e^{i\pi/3}$. Calcoliamo sia il residuo che il valore della funzione in $x = -1$ avvalendoci delle formule di Eulero per le funzione seno e coseno, otteniamo

$$\begin{aligned}
\boxbslash &= 2i\pi \operatorname{Res}\left[\frac{\sqrt{z}}{(z+1+i\epsilon)(z-z_0)(z-z_2)}, z_0\right] + i\pi \frac{e^{i\pi/2}}{(-1-e^{i\pi/3})(-1-e^{5i\pi/3})} \\
&= 2i\pi \frac{e^{i\pi/6}}{\left(e^{i\pi/3}+1\right)\left(e^{i\pi/3}-e^{5i\pi/3}\right)} + i\pi \frac{e^{i\pi/2}}{\left(1+e^{i\pi/3}\right)\left(1+e^{5i\pi/3}\right)} \\
&= 2i\pi \frac{e^{i\pi/6}}{e^{i\pi/6}\left(e^{i\pi/6}+e^{-i\pi/6}\right)e^{i\pi}\left(e^{-2i\pi/3}-e^{2i\pi/3}\right)} + i\pi \frac{e^{i\pi/2}}{e^{i\pi/6}\left(e^{-i\pi/6}+e^{i\pi/6}\right)e^{5i\pi/6}\left(e^{-5i\pi/6}+e^{5i\pi/6}\right)} \\
&= 2\pi \frac{1}{4\cos(\pi/6)\operatorname{sen}(2\pi/3)} + i\pi \frac{-i}{4\cos(\pi/6)\cos(5\pi/6)} \\
&= 2\pi\frac{1}{3} - \pi\frac{1}{3} .
\end{aligned}$$

Il risultato finale è

$$\boxbslash = \frac{\pi}{3} .$$

Terzo problema (punteggio massimo: 5/30)

Dopo aver definito il dominio di convergenza nel piano complesso z della rappresentazione in forma di serie

$$\boxdot(z) = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j j^{-z} ,$$

si ottenga l'espressione della funzione $\boxdot(z)$ in termini della funzione zeta di Riemann.

Curiosità. Il simbolo grafico $\boxdot$ è quello presente sul tasto del numero "0" dei computer **Commodore**, come descritto nel primo problema.

Soluzione del terzo problema

Possiamo utilizzare la rappresentazione in forma di serie della funzione zeta di Riemann

$$\zeta(z) = \sum_{j=1}^{\infty} j^{-z} ,$$

per ottenere il dominio di convergenza della rappresentazione data. Poiché, $\forall\, j \in \mathbb{N}$, il modulo del termine j-esimo termine della serie data è uguale a quello del suo omologo della serie che rappresenta la funzione zeta di Riemann, si ha che i domini di convergenza sono gli stessi. In particolare le due serie convergono per ogni $z \in D$, con

$$D = \{z : \operatorname{Re}(z) > 1\} .$$

Separiamo i termini pari e dispari della serie data, i primi sono positivi, i secondi negativi, si ha

$$\boxdot(z) = \sum_{j=1}^{\infty} (2j)^{-z} - \sum_{j=0}^{\infty} (2j+1)^{-z} .$$

La prima serie può essere espressa in termini della funzione zeta di Riemann, infatti

$$\blacksquare(z) = 2^{-z} \sum_{j=1}^{\infty} j^{-z} - \sum_{j=0}^{\infty} (2j+1)^{-z} = 2^{-z}\zeta(z) - \sum_{j=0}^{\infty}(2j+1)^{-z} \,.$$

Consideriamo la stessa separazione per la serie che rappresenta la funzione zeta di Riemann

$$\zeta(z) = \sum_{j=1}^{\infty}(2j)^{-z} + \sum_{j=0}^{\infty}(2j+1)^{-z} = 2^{-z}\sum_{j=1}^{\infty} j^{-z} + \sum_{j=0}^{\infty}(2j+1)^{-z} = 2^{-z}\zeta(z) + \sum_{j=0}^{\infty}(2j+1)^{-z} \,.$$

Sommiamo membro a membro le due espressioni

$$\begin{aligned} \blacksquare(z) &= 2^{-z}\zeta(z) - \sum_{j=0}^{\infty}(2j+1)^{-z} \,, \\ \zeta(z) &= 2^{-z}\zeta(z) + \sum_{j=0}^{\infty}(2j+1)^{-z} \,, \end{aligned}$$

si ottiene l'equazione

$$\blacksquare(z) + \zeta(z) = 2^{-z+1}\zeta(z) \,,$$

che dà l'espressione cercata, cioè

$$\blacksquare(z) = \left(2^{-z+1} - 1\right)\zeta(z) \,.$$

Quarto problema (punteggio massimo: 6/30)

Nello spazio di Hilbert H_{2N} a $2N$ dimensioni, con $N \in \mathbb{N}$, è definito l'operatore

$$\hat{@} = \sum_{j=1}^{2N} |e_j\rangle\langle e_{2N-j+1}| \,,$$

dove $\left\{|e_j\rangle\right\}_{j=1}^{2N} \subset H_{2N}$ è una base ortonormale dello spazio H_{2N}.
Dopo aver classificato l'operatore $\hat{@}$, si ottengano:

- l'espressione dell'operatore $\hat{\&} = \widehat{\arctan}\left(\hat{@}\right)$ in funzione dell'operatore $\hat{@}$;
- gli autovalori dell'operatore $\hat{\&}$;
- gli autovettori dell'operatore $\hat{\&}$ come combinazioni dei vettori della base $\left\{|e_j\rangle\right\}_{j=1}^{2N}$.

Soluzione del quarto problema

L'operatore $\hat{@}$ è unitario, infatti l'aggiunto hermitiano è

$$\hat{@}^{\dagger} = \sum_{j=1}^{2N}\left(|e_j\rangle\langle e_{2N-j+1}|\right)^{\dagger} = \sum_{j=1}^{2N}|e_{2N-j+1}\rangle\langle e_j| \,,$$

allora i prodotti $\hat{@}\hat{@}^{\dagger}$ e $\hat{@}^{\dagger}\hat{@}$ sono

$$\begin{aligned} \hat{@}\hat{@}^{\dagger} &= \sum_{j,k=1}^{2N} |e_j\rangle \underbrace{\langle e_{2N-j+1}|e_{2N-k+1}\rangle}_{\delta^j_k} \langle e_k| = \sum_{j=1}^{N}|e_j\rangle\langle e_j| = \hat{I} \,, \\ \hat{@}^{\dagger}\hat{@} &= \sum_{j,k=1}^{2N} |e_{2N-j+1}\rangle \underbrace{\langle e_j|e_k\rangle}_{\delta^j_k} \langle e_{2N-k+1}| = \sum_{j=1}^{N}|e_{2N-j+1}\rangle\langle e_{2N-j+1}| = \hat{I} \,, \end{aligned}$$

dove l'operatore identità si ottiene dalla relazione di completezza della base ortonormale.
Per calcolare l'espressione dell'operatore $\hat{\&}$ usiamo la serie di Taylor della funzione arcotangente centrata nell'origine. Patendo dalla derivata prima

$$\frac{d}{dx}\arctan(x) = \frac{1}{x^2+1}\,,$$

nel limite $x \to 0$, si può usare la somma della serie geometrica di ragione $-x^2$, quindi

$$\frac{d}{dx}\arctan(x) = \frac{1}{x^2+1} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{2k}\,,$$

da cui integrando in dx' tra 0 e x,

$$\int_0^x \frac{d}{dx'}\arctan(x')dx' = \arctan(x) = \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x'^{2k} dx' = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \int_0^x x'^{2k} dx' = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}\,,$$

dove, l'identità tra l'integrale della serie e la serie degli integrali segue dalla convergenza uniforma della stessa serie. Quindi di ha

$$\arctan(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \mathcal{O}\left(x^7\right)\,,$$

ci sono solo potenze dispari. Calcoliamo le potenze dell'operatore $\hat{@}$, partendo dal quadrato

$$\hat{@}^2 = \sum_{j,k=1}^{2N} |e_j\rangle\langle e_{2N-j+1}|e_k\rangle\langle e_{2N-k+1}| = \sum_{j,k=1}^{2N} |e_j\rangle\delta_k^{2N-j+1}\langle e_{2N-k+1}| = \sum_{j=1}^{2N}|e_j\rangle\langle e_j| = \hat{I}\,,$$

anche in questo caso l'operatore identità è dato dalle relazione di completezza dei vettori della base ortonormale. Da questo risultato si evince che tutte le potenze pari dell'operatore $\hat{@}$ sono uguali all'operatore identità, quindi le potenze dispari coincidono tutte con lo stesso operatore $\hat{@}$. Infatti, $\forall\, j \in \mathbb{N}\cup\{0\}$,

$$\hat{@}^{2j+1} = \underbrace{\hat{@}^{2j}}_{=\hat{I}}\hat{@} = \hat{@}\,.$$

Per l'operatore arcotangente si

$$\hat{\&} = \widehat{\arctan\left(@\right)} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{\hat{@}^{2k+1}}{2k+1} = \hat{@}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{2k+1} = \arctan(1)\hat{@} = \frac{\pi}{4}\hat{@}\,.$$

È proporzionale all'operatore $\hat{@}$, di conseguenza, ha gli stessi autovettori con autovalori proporzionali a quelli dell'operatore $\hat{@}$ tramite lo stesso fatto $\pi/4$. Ovvero le equazioni agli autovalori sono

$$\hat{@}|a_k\rangle = \alpha_k|a_k\rangle\,,\qquad \hat{\&}|a_k\rangle = \epsilon_k|a_k\rangle\,,\qquad \epsilon_k = \frac{\pi}{4}\alpha_k\,,\qquad \forall\, k \in \{1,2,\ldots,2N\}\,.$$

Gli autovalori si possono ottenere direttamente dell'equazione agli autovalori generica

$$\hat{@}|x\rangle = \alpha|x\rangle\,,$$

dove $|x\rangle$ è l'autovettore con autovalore α, usando la definizione dell'operatore si ha

$$\hat{@}|x\rangle = \sum_{j=1}^{2N}|e_j\rangle\langle e_{2N-j+1}|x\rangle = x^{2N-j+1}|e_j\rangle = \alpha x^k|e_k\rangle\,,$$

dove x^j è la componente j-esima dell'autovettore $|x\rangle$, con $j \in \{1,2,\ldots,2N\}$ e negli ultimi due membri ci sono somme sottintese sugli indici $j,k \in \{1,2,\ldots,2N\}$. Dall'eguaglianza delle combinazioni dei vettori della base seguono quelle dei coefficienti omologhi, si hanno

$$x^{2N-k+1} = \alpha x^k\,,\qquad \forall\, k \in \{1,2,\ldots,2N\}\,.$$

Da cui si ottengono N sistemi omogenei disgiunti

$$\begin{cases} -\alpha x^k + x^{2N-k+1} = 0 \\ x^k - \alpha x^{2N-k+1} = 0 \end{cases}, \qquad \forall\, k \in \{1,2,\dots,N\}.$$

Hanno tutti la stessa matrice dei coefficienti

$$\begin{pmatrix} -\alpha & 1 \\ 1 & -\alpha \end{pmatrix}$$

e la condizione di non invertibilità, ovvero di esistenza di soluzioni non banali è l'equazione secolare

$$\det\begin{pmatrix} -\alpha & 1 \\ 1 & -\alpha \end{pmatrix} = 0$$
$$\alpha^2 - 1 = 0,$$

da cui si hanno gli autovalori $\alpha_{k\pm} = \pm 1$, con $k \in \{1,2,\dots,N\}$. Sono degeneri con molteplicità N, ovvero gli N autovalori "più" sono tutti uguali a uno, $k_{1+} = k_{2+} = \cdots = k_{N+} = 1$, gli N "meno" sono tutti uguali a meno uno, cioè: $k_{1-} = k_{2-} = \cdots = k_{N-} = -1$. Le componenti contro-varianti dei vettori che rappresentano gli autovettori si ottengono come soluzioni dei sistemi. La soluzione del k-esimo sistema, con $k \in \{1,2,\dots,N\}$, dà le componenti $x_\pm^k$ e $x_\pm^{2N-k+1}$ dei due autovettori relativi agli autovalori $\alpha_{k\pm}$ e, poiché i sistemi sono disgiunti, le altre $2N-2$ componenti sono nulle. In particolare, posto $x_+^k = x_-^k = \bar{x}$, dalla prima equazione si ha

$$\mp x_\pm^k + x_\pm^{2N-k+1} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x_\pm^{2N-k+1} = \pm\bar{x} \qquad \forall\, k \in \{1,2,\dots,N\}.$$

Quindi, i vettori $2N \times 1$ che rappresentano i due autovettori relativi agli autovalori $\alpha_{k+} = 1$ e $\alpha_{k-} = -1$, con $k \in \{1,2,\dots,N\}$ sono

$$x_{k+} = \frac{\bar{x}}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad x_{k-} = \frac{\bar{x}}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow k\text{-esima posizione} \\ \\ \\ \\ \leftarrow (2N-k+1)\text{-esima posizione} \\ \\ \\ \\ \end{array}.$$

Gli autovettori corrispondenti sono

$$|x_{k\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\delta_k^j - \delta_{2N-k+1}^j\right)|e_j\rangle, \qquad \forall\, k \in \{1,2,\dots,N\}.$$

Quinto problema (punteggio massimo: 6/30)

Si ottenga la serie formale di Fourier della funzione gradino

$$f(x) = 2\theta(x) - 1 = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases},$$

rispetto al sistema delle fasi

$$\left\{\frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}\right\}_{k\in\mathbb{Z}} \subset L^2(-\pi,\pi)$$

dove $\theta(x)$ è la funzione di Heaviside.
Si calcoli la somma della serie formale e si dimostri che è definita $\forall\, x \in \mathbb{R}$.
Infine, si verifichi l'identità di Parseval in $L^2(-\pi,\pi)$.

Soluzione del quinto problema

La serie formale di Fourier è

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} f^k \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}},$$

dove il k-esimo coefficiente di Fourier, con $k \neq 0$, è

$$\begin{aligned}
f^k &= \left(\frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}, f\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{0} e^{-ikx} dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\pi} e^{-ikx} dx \\
&= \frac{2i}{k\sqrt{2\pi}} \left(e^{-ik\pi} - 1\right) = \frac{2i}{k\sqrt{2\pi}} \left((-1)^k - 1\right) \\
f^k &= \frac{-4i}{k\sqrt{2\pi}} \begin{cases} 1 & \text{se } k \text{ è dispari} \\ 0 & \text{se } k \text{ è pari} \end{cases}, \qquad \forall\, k \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}.
\end{aligned}$$

Mentre, per $k = 0$ si ha $f^0 = 0$.
La serie formale di Fourier è

$$f(x) \sim \frac{-2i}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(2k+1)x}}{2k+1} \equiv F(x),$$

dove $F(x)$ indica la somma della serie formale, che coincide quasi ovunque con la funzione $f(x)$.
Poiché le fasi sono funzioni periodiche e la serie converge per ogni $x \in (-\pi, \pi)$, per un generico $x' \notin (-\pi, \pi)$, definiamo

$$x'' = \begin{cases} x' - \pi \operatorname{Int}\left(x'/\pi\right) & \text{se } \operatorname{Int}\left(x'/\pi\right) \text{ è pari} \\ x' - \pi\left(\left|\operatorname{Int}\left(x'/\pi\right)\right| + 1\right) \operatorname{Segno}\left(x'\right) & \text{se } \operatorname{Int}\left(x'/\pi\right) \text{ è dispari} \end{cases},$$

si ha che $x'' \in (-\pi, \pi)$ e differisce da x' per un multiplo intero di 2π. Si noti che in entrambi i casi della legge multipla precedente, il coefficiente di π è un numero pari. La funzione $\operatorname{Int}(y)$, usata nella definizione precedente, rappresenta la parte intera con segno del generico numero reale y, quindi $\operatorname{Int}(y) \in \mathbb{Z}$. Ne consegue che, $\forall\, x' \in \mathbb{R} \backslash [-\pi, \pi]$,

$$F(x') = F(x'' + 2m\pi) = F(x''),$$

dove $m \in \mathbb{Z}$ e

$$2m = \begin{cases} \operatorname{Int}\left(x'/\pi\right) & \text{se } \operatorname{Int}\left(x'/\pi\right) \text{ è pari} \\ \left(\left|\operatorname{Int}\left(x'/\pi\right)\right| + 1\right) \operatorname{Segno}\left(x'\right) & \text{se } \operatorname{Int}\left(x'/\pi\right) \text{ è dispari} \end{cases}.$$

L'idea di Parseval è

$$(f, f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left|f^k\right|^2,$$

il membro di sinistra è il prodotto scalare della funzione $f(x)$ per sé stessa, poiché il modulo della funzione è quasi ovunque nell'intervallo $(-\pi, \pi)$ uguale a uno, tale prodotto coincide con la misura dell'intervallo, cioè

$$(f, f) = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi.$$

Il membro di destra dell'identità di Parseval è la serie dei moduli quadri dei coefficienti formali di Fourier,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left|f^k\right|^2 = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left|f^{2j+1}\right|^2 = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left|\frac{-4i}{(2j+1)\sqrt{2\pi}}\right|^2 = \frac{8}{\pi} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2j+1)^2} = \frac{16}{\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j+1)^2},$$

dove si è usata l'espressione dei coefficienti ottenuta in precedenza.
La somma della serie degli inversi dei quadrati dei numeri dispari si può calcolare con il metodo dei residui. Si consideri la funzione

$$g(z) = -\frac{\pi}{2} \frac{\operatorname{sen}(z\pi/2)}{z^2 \cos(z\pi/2)},$$

che ha poli semplici nei punti dell'insieme $\{z_k = 2k+1\}_{k\in\mathbb{Z}}$, dovuti all'annullamento della funzione coseno a denominatore e un polo, anch'esso semplice nell'origine dovuto alla potenza z^2 a denominatore. Tale potenza non genera un polo doppio poiché la funzione seno a numeratore ha uno zero semplice nell'origine. I residui sono

$$\operatorname{Res}\left[-\frac{\pi}{2}\frac{\operatorname{sen}(z\pi/2)}{z^2\cos(z\pi/2)}, z_k\right] = -\frac{\pi}{2}\lim_{z\to z_k}\frac{\operatorname{sen}(z\pi/2)}{z^2\cos(z\pi/2)}(z-z_k) = \frac{1}{z_k^2} = \frac{1}{(2k+1)^2}\,, \qquad \forall\, k\in\mathbb{Z}\,,$$

$$\operatorname{Res}\left[-\frac{\pi}{2}\frac{\operatorname{sen}(z\pi/2)}{z^2\cos(z\pi/2)}, 0\right] = -\frac{\pi}{2}\lim_{z\to 0}\frac{\operatorname{sen}(z\pi/2)}{z\cos(z\pi/2)} = -\frac{\pi^2}{4}\,.$$

Consideriamo il limite per $n\to\infty$, con $n\in\mathbb{N}$, degli integrali

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{\pi}{2}\int_{|z|=2n}\frac{\operatorname{sen}(z\pi/2)}{z^2\cos(z\pi/2)}dz\right) &= 2i\pi\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{k=-2n}^{2n}\operatorname{Res}\left[-\frac{\pi}{2}\frac{\operatorname{sen}(z\pi/2)}{z^2\cos(z\pi/2)}, z_k\right] + \operatorname{Res}\left[-\frac{\pi}{2}\frac{\operatorname{sen}(z\pi/2)}{z^2\cos(z\pi/2)}, 0\right]\right)\\ &= 2i\pi\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{k=-2n}^{2n}\frac{1}{(2k+1)^2} - \frac{\pi^2}{4}\right).\end{aligned}$$

Poiché sulle circonferenze d'integrazione la funzione integranda moltiplicata per la z tende uniformemente a zero, cioè

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{sen}(z\pi/2)}{z\cos(z\pi/2)} \overset{\text{U.}}{=} 0\,,$$

per il lemma sull'integrazione sugli archi, si ha l'annullamento, nello stesso limite, dell'integrale, quindi

$$0 = \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{\pi}{2}\int_{|z|=2n}\frac{\operatorname{sen}(z\pi/2)}{z^2\cos(z\pi/2)}dz\right) = 2i\pi\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{k=-2n}^{2n}\frac{1}{(2k+1)^2} - \frac{\pi^2}{4}\right),$$

da cui

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{4} \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}\,.$$

Con questo risultato la serie dei moduli quadri dei coefficienti formali di Fourier, che rappresenta il membro di destra dell'identità di Parseval è

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left|f^k\right|^2 = \frac{16}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{16}{\pi}\frac{\pi^2}{8} = 2\pi\,,$$

coincide con il prodotto scalare (f,f), abbiamo verificato l'identità di Parseval.

Sesto problema (punteggio massimo: 6/30)

L'operatore hermitiano $\widehat{\text{╤}}$ è definito nello spazio di Hilbert H_3 a tre dimensioni e ha le seguenti proprietà:

- $\sum_{j=1}^{3}\langle x_j|\widehat{\text{╤}}|x_j\rangle = 0$, per ogni insieme $\left\{|x_j\rangle\right\}_{j=1}^{3}$ di vettori linearmente indipendenti dello spazio vettoriale H_3;
- ha l'autovalore $\lambda_1 = 2$ con autovettore $|u_1\rangle\in H_3$;
- $\det\left(\widehat{\text{╤}}\right) = 2$.

Si determinino:

- lo spettro discreto dell'operatore $\widehat{\text{╤}}$;
- i vettori che rappresentano gli autovettori dell'operatore $\widehat{\text{╤}}$ rispetto alla base canonica $\{|s_k\rangle\}_{k=1}^{3}\subset H_3$, sapendo che

$$|u_1\rangle \overset{s}{\longleftrightarrow} u_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix};$$

- la matrice 3×3 O, che rappresenta l'operatore $\widehat{\text{╤}}$ rispetto alla base canonica $\{|s_k\rangle\}_{k=1}^{3}\subset H_3$.

Curiosità. Il simbolo grafico ╤ è quello presente sul tasto del numero "1" dei computer **Commodore**, come descritto nel primo problema.

Soluzione del sesto Problema

Poiché la somma dei tre valori di aspettazione relativi ad altrettanti vettori linearmente indipendenti è nulla, si ha che la traccia dell'operatore $\widehat{\boxplus}$ è anch'essa nulla. Essendo diagonalizzabile si ha che la traccia e il determinante sono rispettivamente la somma e il prodotto degli autovalori, cioè

$$0 = \mathrm{Tr}\left(\widehat{\boxplus}\right) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \,, \qquad 2 = \det\left(\widehat{\boxplus}\right) = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \,.$$

L'autovalore $\lambda_1 = 2$ è noto, quindi, dalle relazioni precedenti si ottengono gli altri due, infatti, dalla condizione sulla traccia si ha $\lambda_3 = -2 - \lambda_2$, che sostituita in quella del determinante dà l'equazione per λ_2

$$\lambda_2^2 + 2\lambda_2 + 1 = (\lambda_2 + 1)^2 = 0.$$

Si ottiene $\lambda_2 = -1$, da cui $\lambda_3 = -2 - \lambda_2 = -1$, ovvero l'autovalore è degenere con ordine di degenerazione 2.
Ne consegue che sono autovettori relativi all'autovalore degenere tutti i vettori del sotto spazio $H_2 \subset H_3$ a due dimensioni e ortogonale al vettore $|u_1\rangle$, cioè

$$H_2 = \{|y\rangle \in H_3 : \langle y|u_1\rangle = \langle u_1|y\rangle = 0\} \,.$$

Scegliamo $|u_2\rangle \in H_2$ tale che la sua rappresentazione rispetto alla base canonica data sia

$$|u_2\rangle \overset{s}{\hookleftarrow} u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

che è evidentemente ortogonale a $|u_1\rangle$. Il vettore $|u_3\rangle$ si ottiene dalle condizioni di ortogonalità a i due vettori $|u_1\rangle$ e $|u_2\rangle$. Consideriamo la rappresentazione

$$|u_3\rangle \overset{s}{\hookleftarrow} u_3 = \begin{pmatrix} u_3^1 \\ u_3^2 \\ u_3^3 \end{pmatrix} ,$$

dove u_3^j, con $j \in \{1,2,3\}$, è la j-esima componente contro-variante, allora le condizioni di ortogonalità a $|u_1\rangle$ e $|u_2\rangle$ danno le equazioni

$$u_3^1 + u_3^2 + u_3^3 = 0 \,, \qquad u_3^1 - u_3^2 = 0 \,,$$

posto $u_3^1 = u$, si hanno

$$u_3^2 = u \,, \qquad u_3^3 = -2u \,.$$

Con l'opportuna normalizzazione all'unità, il terzo autovettore ha rappresentazione

$$|u_3\rangle \overset{s}{\hookleftarrow} u_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} .$$

La terna di autovettori così ottenuti rappresenta una base ortonormale dello spazio vettoriale H_3. È possibile definire la matrice diagonalizzante per l'operatore $\widehat{\boxplus}$ come

$$U = \begin{pmatrix} u_1^1 & u_2^1 & u_3^1 \\ u_1^2 & u_2^2 & u_3^2 \\ u_1^3 & u_2^3 & u_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

ed è tale che

$$\widehat{\boxplus} \overset{s}{\hookleftarrow} O = U O_d U^\dagger \,,$$

dove O_d è la matrice diagonale che rappresenta l'operatore rispetto alla base dei suoi autovettori, cioè

$$\widehat{\boxplus} \overset{u}{\hookleftarrow} O_d = \mathrm{diag}(2, -1, -1) \,.$$

La matrice richiesta è

$$
\begin{aligned}
O &= U O_d U^\dagger \\
&= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/\sqrt{3} & 2/\sqrt{3} & 2/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

da cui

$$
O = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.
$$

È immediato verificare che la traccia è nulla e il determinate è pari a 2.