Metodi Matematici per la Fisica

Prova scritta del 5 febbraio 2020

Si risolvano cortesemente i seguenti problemi, sapendo che verranno valutati:

1. la correttezza del risultato ottenuto e della procedura utilizzata;
2. la completezza dei passaggi riportati;
3. il livello di esemplificazione con cui sono espressi i risultati (ad esempio un risultato numerico reale non deve contenere l'unità immaginaria);
4. la correttezza del formalismo utilizzato;
5. la chiarezza dell'esposizione e la leggibilità del testo.

Primo problema (punteggio: 6/30)

Si calcoli l'integrale

$$S = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^3(ax)}{x\left(x^2+b^2\right)} dx\,,$$

con $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

Soluzione del primo problema

Nell'origine la funzione integranda ha una singolarità eliminabile, infatti, per $b \neq 0$, si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^3(ax)}{x\left(x^2+b^2\right)} = 0\,,$$

mentre per $b=0$ si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^3(ax)}{x^3} = a^3\,.$$

È quindi lecito deformare il percorso di integrazione per aggirare l'origine, ovvero passiamo dall'asse reale al percorso

$$\Gamma = (-\infty, -\epsilon] \cup \left(-\gamma_\epsilon^+\right) \cup [\epsilon, \infty)\,,$$

dove

$$\gamma_\epsilon^+ = \left\{z : z = \epsilon e^{i\theta}, \theta \in [0,\pi]\right\}$$

è la semicirconferenza centrata nell'origine, di raggio ϵ, contenuta nel semipiano superiore. Si tratta dell'asse reale "dentato" nel semipiano superiore intorno all'origine.
Cambiando il percorso di integrazione, come descritto sopra, e usando la formula di Eulero per la funzione seno, l'integrale S può essere ottenuto come somma di quattro contributi, in particolare si ha

$$S = \int_\Gamma \frac{\operatorname{sen}^3(az)}{z\left(z^2+b^2\right)} dz = \frac{i}{8}\int_\Gamma \frac{e^{3iaz} - 3e^{iaz} + 3e^{-iaz} - e^{-3iaz}}{z\left(z^2+b^2\right)} dz = I(3a) - I(-3a) + 3I(-a) - 3I(a)\,,$$

dove $I(s)$ rappresenta l'integrale

$$I(s) = \frac{i}{8}\int_\Gamma \frac{e^{isz}}{z\left(z^2+b^2\right)} dz\,,$$

con $s \in \mathbb{R}$.
Calcoliamo l'integrale $I(s)$ usando il lemma di Jordan, consideriamo, quindi, i due casi: $s>0$ e $s<0$, osservando che la funzione integranda ha tre poli semplici nei punti: $z=0$ e $z=\pm i|b|$.

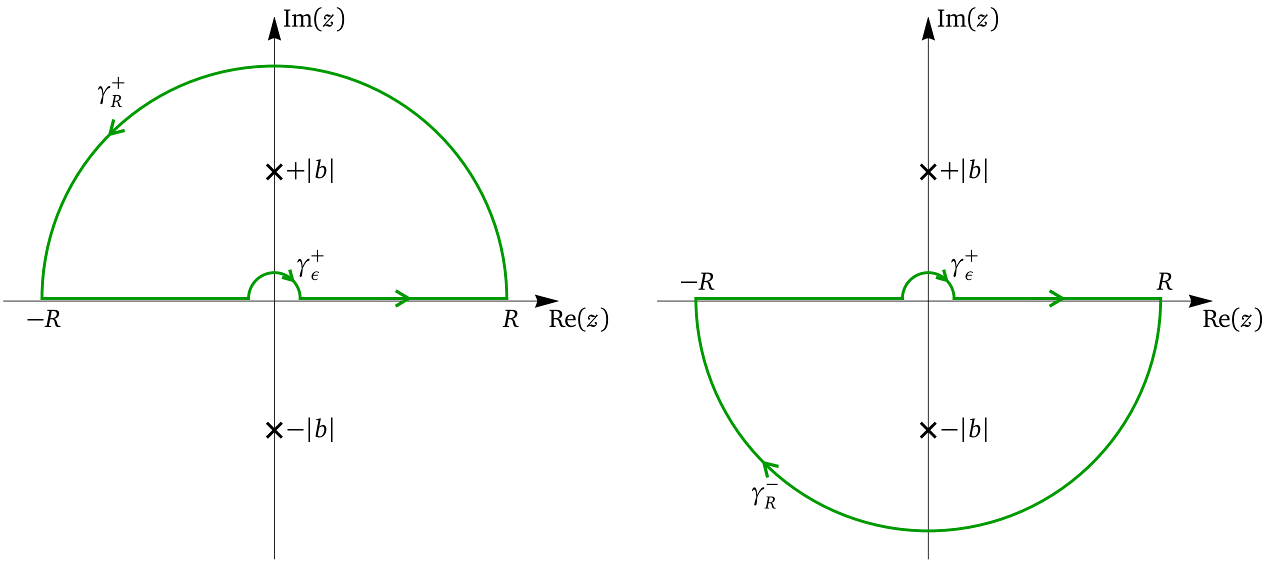
Nel primo caso, $s > 0$, chiudiamo il percorso di integrazione nel semipiano superiore, ovvero consideriamo il percorso mostrato nella figura di sinistra, per cui si ha

$$
\begin{aligned}
I(s) &= \lim_{R\to\infty} \frac{i}{8} \oint_{(-R,-\epsilon]\cup\left(-\gamma_\epsilon^+\right)\cup[\epsilon,R)\cup\gamma_R^+} \frac{e^{isz}}{z\left(z^2+b^2\right)} dz = 2i\pi \operatorname{Res}\left[\frac{i}{8}\frac{e^{isz}}{z\left(z^2+b^2\right)}, z = i|b|\right] \\
&= 2i\pi \frac{i}{8}\frac{e^{-s|b|}}{i|b|2i|b|} = \frac{\pi}{8b^2} e^{-s|b|},
\end{aligned}
$$

dove $\gamma_R^+ = \left\{z : z = Re^{i\theta}, \theta \in [0,\pi]\right\}$ è la semicirconferenza centrata nell'origine, di raggio R, contenuta nel semipiano superiore. Per il lemma di Jordan, il valore limite per $R \to \infty$ dell'integrale su γ_R^+ è nullo, per cui si ha la prima delle identità dell'espressione precedente.
Nel secondo caso, $s < 0$, consideriamo il percorso di integrazione chiuso nel semipiano inferiore, come mostrato nella figura di destra, si ha

$$
\begin{aligned}
I(s) &= \lim_{R\to\infty} \frac{i}{8} \oint_{(-R,-\epsilon]\cup\left(-\gamma_\epsilon^+\right)\cup[\epsilon,R)\cup\left(-\gamma_R^-\right)} \frac{e^{isz}}{z\left(z^2+b^2\right)} dz \\
&= -2i\pi \left(\operatorname{Res}\left[\frac{i}{8}\frac{e^{isz}}{z\left(z^2+b^2\right)}, z = -i|b|\right] + \operatorname{Res}\left[\frac{i}{8}\frac{e^{isz}}{z\left(z^2+b^2\right)}, z = 0\right]\right) \\
&= -2i\pi \frac{i}{8}\left(\frac{e^{s|b|}}{i|b|2i|b|} + \frac{1}{b^2}\right) = \frac{\pi}{8b^2}\left(-e^{s|b|} + 2\right),
\end{aligned}
$$

dove $\gamma_R^- = \left\{z : z = Re^{i\theta}, \theta \in [\pi, 2\pi]\right\}$ è la semicirconferenza centrata nell'origine, di raggio R, contenuta nel semipiano inferiore e, come nel caso precedente, il valore dell'integrale su questo arco, per il lemma di Jordan, è infinitesimo nel limite $R \to \infty$. Usando queste espressioni del generico integrale $I(s)$, possiamo ottenere il risultato finale.



Consideriamo con una legge duplice i due casi relativi ai valori positive e negativi dell'argomento, abbiamo

$$
\begin{aligned}
S(a,b) &= I(3a) - I(-3a) + 3I(-a) - 3I(a) \\
&= \frac{\pi}{8b^2}\begin{cases} e^{-3a|b|} + e^{-3a|b|} - 2 - 3e^{-a|b|} + 6 - 3e^{-a|b|} = 2e^{-3a|b|} - 6e^{-a|b|} + 4 & a > 0 \\ -e^{3a|b|} + 2 - e^{3a|b|} + 3e^{a|b|} + 3e^{a|b|} - 6 = -2e^{3a|b|} + 6e^{a|b|} - 4 & a < 0 \end{cases} \\
&= \frac{\pi}{4b^2}\begin{cases} e^{-3a|b|} - 3e^{-a|b|} + 2 & a > 0 \\ -e^{3a|b|} + 3e^{a|b|} - 2 & a < 0 \end{cases}.
\end{aligned}
$$

Infine, definendo la funzione "segno" come

$$\operatorname{segno}(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases},$$

scrivere il risultato nella forma compatta

$$S(a,b) = \operatorname{segno}(a)\frac{\pi}{4b^2}\left(e^{-3|ab|} - 3e^{-|ab|} + 2\right).$$

Secondo problema (punteggio 6/30)

Si ottenga l'espressione analitica esplicita della funzione $f(z)$ data dalla rappresentazione

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-k)^2 + \alpha^2},$$

con $\alpha \in \mathbb{C}$.

Soluzione del secondo problema

Riscriviamo la serie nella forma

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(k),$$

dove la funzione meromorfa $g(w)$ è così definita

$$g(w) = \frac{1}{(z-w)^2 + \alpha^2}.$$

Per ottenere la somma della serie a segno costante usiamo il metodo basato sull'integrazione nel piano complesso e sul teorema dei residui. A tal fine consideriamo la funzione

$$F(w) = \pi\frac{\cos(\pi w)}{\operatorname{sen}(\pi w)}\, g(w) = \pi\cot(\pi w)\, g(w),$$

che, oltre alle singolarità della funzione $g(w)$, possiede gli infiniti poli semplici della funzione cotangente. L'insieme delle singolarità della funzione $F(w)$ è quindi

$$\left\{w_+ = z + i\alpha, w_- = z - i\alpha\right\} \cup \left\{w_j = j\right\}_{j\in\mathbb{Z}},$$

dove il primo, contenete solo due punti è l'insieme dei poli, anch'essi semplici, della funzione $g(w)$, il secondo è invece l'insieme dei poli della funzione cotangente di argomento πw.
Nel piano complesso w consideriamo la circonferenza $C_k = \{w : |w| = (2k+1)/2\}$, centrata nell'origine e di raggio $(2k+1)/2$, con $k \in \mathbb{N}$. Fissato il valore di z, indichiamo con $k_0 \in \mathbb{N}$ il numero naturale tale che

$$\max\{|z - i\alpha|, |z + i\alpha|\} < \frac{2k+1}{2}, \qquad \forall\, k \geq k_0.$$

Cosicché quella di raggio $(2k_0+1)/2$ sia la circonferenza di raggio minore che avvolge entrambi i poli w_+ e w_-.
L'integrale della funzione $F(w)$ su una circonferenza C_k con $k \geq k_0$ può essere ottenuto con il teorema dei residui e si ha

$$\oint_{C_k} F(w)dw = 2i\pi\left(\operatorname{Res}\left[F(w), w_-\right] + \operatorname{Res}\left[F(w), w_+\right] + \sum_{j=-k}^{k}\operatorname{Res}\left[F(w), j\right]\right).$$

I residui dei poli semplici w_+ e w_- sono

$$\operatorname{Res}\left[F(w), w_\pm\right] = \pm\pi\frac{\cos(\pi w_\pm)}{\operatorname{sen}(\pi w_\pm)}\frac{1}{w_+ - w_-} = \pm\pi\frac{\cos(\pi(z \pm i\alpha))}{\operatorname{sen}(\pi(z \pm i\alpha))}\frac{1}{2i\alpha},$$

mentre quelli dei poli semplici dell'insieme $\{j\}_{j=-k}^{k}$ rappresentano proprio i termini della serie originale, ovvero

$$\operatorname{Res}\left[F(w), j\right] = \frac{1}{(z-j)^2+\alpha^2}\,.$$

Nel limite $k \to \infty$ l'integrale tende a zero in quanto, sui punti delle circonferenze C_k,

$$\lim_{k\to\infty} F(w)w \overset{\text{unif.}}{=} 0\,.$$

Questo risultato può essere ricavato osservando che, posto $|w| = (2k+1)/2 \equiv r_k$ e anche $w = a + ib$ con $\operatorname{Re}(w) = a$ e $\operatorname{Im}(w) = b$, si ha

$$\begin{aligned}
|F(w)w| &= |F(w)|\, r_k = \frac{\pi\, r_k}{\left|(z-w)^2+\alpha^2\right|}\frac{|\cos(\pi w)|}{|\operatorname{sen}(\pi w)|} = \frac{\pi\, r_k}{\left|w-w_+\right|\left|w-w_-\right|}\frac{\left|e^{i\pi w}+e^{-i\pi w}\right|}{\left|e^{i\pi w}-e^{-i\pi w}\right|} \\
&\le \frac{\pi\, r_k}{\left(r_k-|w_+|\right)\left(r_k-|w_-|\right)}\frac{\left|e^{i\pi a-\pi b}+e^{-i\pi a+\pi b}\right|}{\left|e^{i\pi a-\pi b}-e^{-i\pi a+\pi b}\right|} = \frac{\pi\, r_k}{\left(r_k-|w_+|\right)\left(r_k-|w_-|\right)}\frac{\left|e^{-2\pi b}+e^{-2i\pi a}\right|}{\left|e^{-2\pi b}-e^{-2i\pi a}\right|} \\
&\underset{k\to\infty}{\sim} \begin{cases} O(r_k^{-1}) & \text{se: } b \neq 0.\ \text{ovvero se: } b \to \pm\infty \\[2ex] O(r_k^{-1})\dfrac{1+e^{\mp i\pi(2k+1)}}{1-e^{\mp i\pi(2k+1)}} = O(r_k^{-1})\dfrac{1+(-1)}{1-(-1)} = 0 & \text{se: } b = 0, \text{ allora } a = \pm r_k = \pm(2k+1)/2 \end{cases} .
\end{aligned}$$

Alla luce di questo risultato, nel limite $k \to \infty$ l'integrale su C_k tende a zero e quindi si ottiene l'identità

$$\begin{aligned}
0 = \lim_{k\to\infty}\oint_{C_k} F(w)dw &= 2i\pi\left(\operatorname{Res}\left[F(w), w_-\right] + \operatorname{Res}\left[F(w), w_+\right] + \sum_{j=-\infty}^{\infty}\operatorname{Res}\left[F(w), j\right]\right) \\
&= 2i\pi\left(\pi\frac{\cos\left(\pi(z+i\alpha)\right)}{\operatorname{sen}\left(\pi(z+i\alpha)\right)}\frac{1}{2i\alpha} - \pi\frac{\cos\left(\pi(z-i\alpha)\right)}{\operatorname{sen}\left(\pi(z-i\alpha)\right)}\frac{1}{2i\alpha} + \sum_{j=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(z-j)^2+\alpha^2}\right),
\end{aligned}$$

da cui si ricava la somma della serie come

$$\begin{aligned}
\sum_{j=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(z-j)^2+\alpha^2} &= -\frac{\pi}{2i\alpha}\left(\frac{\cos\left(\pi(z+i\alpha)\right)}{\operatorname{sen}\left(\pi(z+i\alpha)\right)} - \frac{\cos\left(\pi(z-i\alpha)\right)}{\operatorname{sen}\left(\pi(z-i\alpha)\right)}\right) \\
&= \frac{2\pi}{i\alpha}\frac{\cos\left(\pi(z+i\alpha)\right)\operatorname{sen}\left(\pi(z-i\alpha)\right) - \cos\left(\pi(z-i\alpha)\right)\operatorname{sen}\left(\pi(z-i\alpha)\right)}{\left(e^{i\pi(z+i\alpha)}-e^{-i\pi(z+i\alpha)}\right)\left(e^{i\pi(z-i\alpha)}-e^{-i\pi(z-i\alpha)}\right)} \\
&= \frac{2\pi}{i\alpha}\frac{\operatorname{sen}\left(\pi(z-i\alpha)-\pi(z+i\alpha)\right)}{e^{2i\pi z}+e^{-2i\pi z}-e^{-2\pi\alpha}-e^{2\pi\alpha}} \\
&= \frac{2\pi}{i\alpha}\frac{\operatorname{sen}(-2i\pi\alpha)}{2\cos(2\pi z)-2\cosh(2\pi\alpha)} \\
&= \frac{\pi}{\alpha}\frac{-\operatorname{senh}(2\pi\alpha)}{\cos(2\pi z)-\cosh(2\pi\alpha)}\,.
\end{aligned}$$

Di conseguenza l'espressione analitica delle funzione $f(z)$ è

$$f(z) = \frac{\pi}{\alpha}\frac{\operatorname{senh}(2\pi\alpha)}{\cosh(2\pi\alpha)-\cos(2\pi z)}\,.$$

Terzo problema (punteggio 6/30)

Dopo aver identificato il dominio di convergenza della rappresentazione integrale

$$F(z) = \int_0^\infty e^{-s^2}s^{z^2}\,ds\,,$$

si determinino i poli ed residui della funzione $F(z)$.

Soluzione del terzo problema

Come nel caso della rappresentazione integrale della funzione Gamma di Eulero, la funzione integranda non ha singolarità lungo il percorso di integrazione. All'infinito l'integrabilità è garantita dall'esponenziale, invece nell'origine il comportamento della funzione integranda è determinato dalla potenza s^{z^2}, infatti l'esponenziale tende all'unità nel limite $s \to 0^+$.

Si ha integrabilità nell'origine se

$$\mathrm{Re}\left(z^2\right) = x^2 - y^2 > -1\,,$$

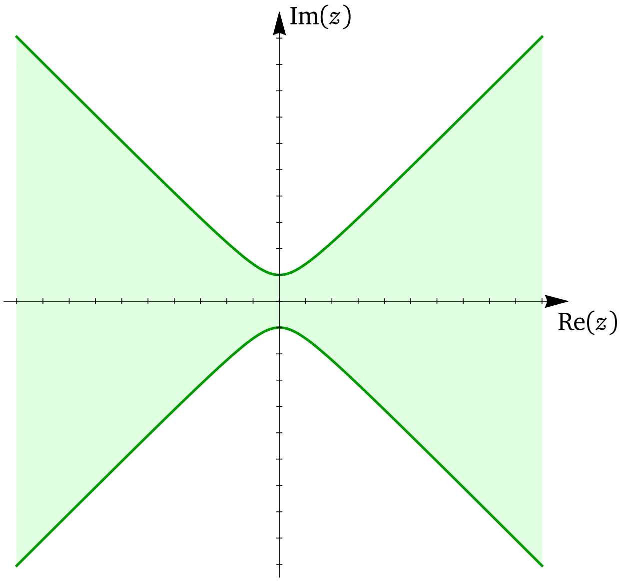
ovvero

$$-\sqrt{1+x^2} < y < \sqrt{1+x^2}\,,$$

dove abbiamo posto: $\mathrm{Re}(z) = x$ e $\mathrm{Im}(z) = y$. Il dominio di convergenza è quindi

$$D = \left\{ z = x + iy : -\sqrt{1+x^2} < y < \sqrt{1+x^2} \right\}\,,$$

ovvero la regione di piano compresa tra i rami dell'iperbole di equazione $x^2 - y^2 = -1$, colorata in verde nella figura.



Procediamo seguendo quanto fatto per la funzione Gamma di Eulero, dividiamo l'intervallo di integrazione come segue

$$F(z) = \int_0^1 e^{-s^2} s^{z^2} ds + \int_1^\infty e^{-s^2} s^{z^2} ds \equiv \int_0^1 e^{-s^2} s^{z^2} ds + \phi(z)$$

e osserviamo che il secondo integrale, $\phi(z)$, rappresenta una funzione intera in z, in quanto non si hanno più singolarità lungo il percorso di integrazione, che infatti non contiene l'origine. Per calcolare il primo integrale usiamo la serie di Taylor dell'esponenziale che, come è noto, ha raggio di convergenza infinito e quindi converge uniformemente in ogni chiuso, per cui è possibile estrarre la serie dall'integrale e si ha

$$F(z) = \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^1 s^{2k+z^2} ds + \phi(z)\,.$$

Per ogni $z \in D$ gli integrali sono convergenti, in particolare le funzioni integrande, che sono delle potenze di s, risultano integrabili nell'origine, infatti si ha la limitazione della parte reale dell'esponente

$$\mathrm{Re}\left(2k + z^2\right) = 2k + x^2 - y^2 > -1\,, \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Integrando esplicitamente e manipolando il polo semplice in z^2 per scriverlo come somma di poli semplici in z, otteniamo

$$\begin{aligned} F(z) &= \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{k!} \left.\frac{s^{2k+z^2+1}}{2k+z^2+1}\right|_0^1 + \phi(z) = \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{k!} \frac{1}{2k+z^2+1} + \phi(z) \\ &= \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{k!} \frac{1}{\left(z + i\sqrt{2k+1}\right)\left(z - i\sqrt{2k+1}\right)} + \phi(z) \\ &= \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{2i\,k!\sqrt{2k+1}} \left(\frac{1}{z + i\sqrt{2k+1}} - \frac{1}{z - i\sqrt{2k+1}} \right) + \phi(z)\,. \end{aligned}$$

Questa espressione rappresenta lo sviluppo di Mittag-Leffler della funzione $F(z)$ e quindi la serie ha come termini le parti principali delle serie di Laurent in ciascun polo della funzione stessa. Ne consegue che si hanno solo poli semplici nei punti dell'insieme $\left\{z_k^+, z_k^-\right\}_{k=0}^\infty$ con

$$z_k^\pm = \pm i\sqrt{2k+1}$$

e che il polo $z_k^{\pm}$, con $k \in \mathbb{N}$, ha residuo

$$R_k^{\pm} = \pm \frac{(-1)^k}{2i\, k! \sqrt{2k+1}} \,.$$

Quarto problema (punteggio 6/30)

Si determinino gli autovalori e gli autovettori della matrice $n \times n$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

che ha tutti gli elementi uguali ad uno.
Suggerimento. È possibile ottenere lo spettro discreto e gli autovettori senza risolvere l'equazione secolare, bensì studiando le potenze intere della matrice A.

Soluzione del quarto problema

Come suggerito, iniziamo calcolando il quadrato della matrice A per cui si ha

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & n & \cdots & n \\ n & n & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & \cdots & n \end{pmatrix} = n \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = nA\,.$$

Si ottiene che il quadrato della matrice A è pari a n volte la stessa matrice. Ne consegue che la potenza N-esima, con $N \in \mathbb{N}$, vale

$$A^N = n^{N-1} A\,.$$

Sfruttiamo questa relazione tra la matrice A e le sue potenze intere per ottenerne gli autovalori. Innanzitutto, osserviamo che essendo simmetrica e reale la matrice è hermitiana, quindi è diagonalizzabile e verifica il teorema spettrale. In particolare ci interessa la tesi del teorema per la quale la potenza k-esima della matrice rappresenta una matrice che ha gli stessi autovettori di A e come autovalori le potenze k-esime degli autovalori di A.
Consideriamo allora le equazioni agli autovalori per A e per A^2

$$A u = \lambda\, u\,, \qquad A^2 u = \lambda^2 u\,,$$

ma, dalla relazione precedente, il primo membro della seconda equazione può essere scritto come

$$\lambda^2 u = A^2 u = nAu = n\lambda\, u\,,$$

da cui si ottiene l'equazione di secondo grado per gli autovalori

$$\lambda^2 - n\lambda = 0\,,$$

che ha, ovviamente, due soluzioni, cioè

$$\lambda_1 = n\,, \qquad \lambda_0 = 0\,.$$

Sicuramente lo spettro discreto di A contiene questi due elementi.
Per ottenere l'autovettore u_1, corrispondente all'autovalore $\lambda_1 = n$, partiamo dall'equazione agli autovalori

$$A u_1 = n\, u_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{(1)}^1 \\ u_{(1)}^2 \\ \vdots \\ u_{(1)}^n \end{pmatrix} = n \begin{pmatrix} u_{(1)}^1 \\ u_{(1)}^2 \\ \vdots \\ u_{(1)}^n \end{pmatrix},$$

da cui si ottiene il sistema lineare

$$\begin{cases} u^1_{(1)} + u^2_{(1)} + \cdots + u^n_{(1)} = n\, u^1_{(1)} \\ u^1_{(1)} + u^2_{(1)} + \cdots + u^n_{(1)} = n\, u^2_{(1)} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ u^1_{(1)} + u^2_{(1)} + \cdots + u^n_{(1)} = n\, u^n_{(1)} \end{cases}$$

che ha come incognite le componenti dell'autovettore. Sottraendo membro a membro la j-esima e la k-esima, $\forall\, j,k \in \{1,2,\ldots,n\}$, essendo i primi membri tutti uguali, si ha

$$0 = n\left(u^j_{(0)} - u^k_{(0)}\right) \qquad \Rightarrow \qquad u^j_{(0)} = u^k_{(0)}\,.$$

Il fatto che l'ultima identità valga per una coppia generica di indici j e k implica che tutte le componenti dell'autovettore siano uguali, ovvero che l'autovettore normalizzato sia

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Per ciò che riguarda l'autovettore relativo all'autovalore nullo è sufficiente considerare un generico vettore ortogonale a u_1. Infatti, preso il vettore

$$u_0 = \begin{pmatrix} u^1_{(0)} \\ u^2_{(0)} \\ \vdots \\ u^n_{(0)} \end{pmatrix}$$

ortogonale a u_1, cioè tale che

$$u_0^\dagger u_1 = u_1^\dagger u_0 = \sum_{j=1}^{n} u^{j*}_{(0)} u^j_{(1)} = \sum_{j=1}^{n} u^{j*}_{(1)} u^j_{(0)} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} u^j_{(0)} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} u^{j*}_{(0)} = 0\,,$$

si ha anche

$$A u_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^1_{(0)} \\ u^2_{(0)} \\ \vdots \\ u^n_{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

ovvero il prodotto della matrice A per il vettore colonna u_0 dà il vettore nullo. Ciò consegue dal fatto che, a meno del fattore $1/\sqrt{n}$, gli elementi di ogni riga della matrice A coincidono con quelli del vettore u_1 che è ortogonale a u_0. In particolare il k-esimo elemento del vettore $A u_0$ è

$$\left(A u_0\right)^k = A^k_j u^j_{(0)} = \sum_{j=1}^{n} u^j_{(0)} = 0\,, \qquad k \in \{1,2,\ldots,n\}\,,$$

dove abbiamo usato $A^k_j = 1$, $\forall\,(j,t) \in \{1,2,\ldots,n\}^2$ e l'ortogonalità tra u_0 e u_1, ovvero $u_0^\dagger u_1 = u_1^\dagger u_0 = 0$.
Quello dei vettori colonna $n \times 1$ è uno spazio vettoriale di Hilbert a n dimensioni, possiamo definire la base ortonormale $\left\{u_j\right\}_{j=1}^{n}$, dove il primo vettore u_1 è proprio l'autovettore relativo all'autovalore $\lambda_1 = n$. Gli $n-1$ vettori u_j con $j = 2,3,\ldots,n$, essendo ortogonali a u_1 verificano tutti l'equazione

$$A u_j = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot u_j = \lambda_0\, u_j\,, \qquad j = 2,3,\ldots,n\,,$$

sono autovettori relativi allo stesso autovalore, quello nullo $\lambda_0 = 0$.
Con ciò si è dimostrato che lo spettro discreto della matrice A contiene solo due autovalori distinti: $\lambda_1 = n$, non degenere e $\lambda_0 = 0$, degenere con ordine di degenerazione pari a $n-1$, infatti i suoi autovettori generano un sottospazio di dimensione $n-1$, essendo un insieme di $n-1$ vettori ortonormali.

Quinto problema (punteggio 6/30)

Data la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

si ottenga

$$C = \cos\left(\pi B^3\right).$$

Soluzione del quinto problema

La matrice B è normale in quanto hermitiana, inoltre può essere scritta come

$$B = A - I,$$

dove I è la matrice identità ed A è la matrice che tutti gli elementi uguali all'unità anch'essa hermitiana. Quest'ultima, come visto nel precedente problema, ha come autovalori: $\alpha_1 = 4$, non degenere e $\alpha_0 = 0$ con ordine di degenerazione pari a $3 = 4-1$. L'autovettore di A relativo all'autovalore $\alpha_1 = 4$ è

$$u_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Mentre gli autovettori, sempre della matrice A, relativi all'autovalore nullo sono tutti quelli ortogonali a u_1. Vogliamo un insieme ortonormale di autovettori, A, in quanto matrice hermitiana, è normale e possiede un tale insieme di autovettori. Per trovare questi autovettori potremmo, innanzitutto definire un insieme di vettori linearmente indipendenti contenente l'autovettore u_1 e con i restanti quattro vettori tutti ortogonali a u_1. A tal fine possiamo scegliere una quaterna di vettori con solo due elementi non nulli ed opposti, cosicché il prodotto scalare con u_1, che ha, invece, tutti gli elementi non nulli e uguali tra loro, sarà necessariamente nullo. Consideriamo ad esempio

$$u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

è immediato verificare che

$$u_1^\dagger u_j = u_j^\dagger u_1 = 0, \qquad j = 2,3,4$$

e che i quattro vettori dell'insieme $\left\{u_j\right\}_{j=1}^4$ sono linearmente indipendenti. Usiamo il metodi di Gram-Schmidt per ottenere, a partire da questo insieme un insieme ortonormale mantenendo u_1 come primo vettore. Indichiamo con $\left\{v_j\right\}_{j=1}^4$ l'insieme ortonormale e otteniamo inizialmente l'insieme ortogonale $\left\{v_j'\right\}_{j=1}^4$, che poi normalizziamo, si hanno

$$v_1' = u_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \qquad v_2' = u_2 - \frac{v_1'^\dagger u_2}{v_1'^\dagger v_1'} v_1' = u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$v'_3 = u_3 - \frac{v'^\dagger_1 u_3}{v'^\dagger_1 v'_1} v'_1 - \frac{v'^\dagger_2 u_3}{v'^\dagger_2 v'_2} v'_2 = u_3 - \frac{v'^\dagger_2 u_3}{v'^\dagger_2 v'_2} v'_2 = u_3 - \frac{1}{2} v'_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} ;$$

$$v'_4 = u_4 - \frac{v'^\dagger_2 u_4}{v'^\dagger_2 v'_2} v'_2 - \frac{v'^\dagger_3 u_4}{v'^\dagger_3 v'_3} v'_3 = u_4 - \frac{1}{2} v'_2 - \frac{1/4}{3/4} v'_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{6\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} .$$

Infine, normalizziamo, i primi due vettori sono già normalizzati, quindi

$$v_1 = v'_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} , \; v_2 = v'_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \; v_3 = \frac{v'_3}{\sqrt{v'^\dagger_3 v'_3}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} , \; v_4 = \frac{v'_4}{\sqrt{v'^\dagger_4 v'_4}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} .$$

La matrice B ha gli stessi autovettori di A, infatti si ha l'equazione agli autovalori

$$B v_j = (A - I) v_j = A v_j - v_j = \left(\alpha_j - 1 \right) v_j \equiv \beta_j v_j , \qquad j = 1, 2, 3, 4 ,$$

dove abbiamo usato $\alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_0 = 0$ e indicato con β_j il j-esimo autovalore della matrice B, ovvero quello relativo all'autovettore v_j. I quattro autovalori di B sono

$$\beta_1 = \alpha_1 - 1 = 3 , \qquad \beta_2 = \alpha_0 - 1 = -1 , \qquad \beta_3 = \alpha_0 - 1 = -1 , \qquad \beta_4 = \alpha_0 - 1 = -1 ,$$

il primo, $\beta_1 = 3$ è non degenere, mentre gli altri tre sono coincidenti e quindi sono un unico autovalore, $\beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = -1$, che ha ordine di degenerazione pari a 3.
La matrice unitaria diagonalizzante è

$$U = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{12} \\ 1/2 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{12} \\ 1/2 & 0 & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{12} \\ 1/2 & 0 & 0 & -3/\sqrt{12} \end{pmatrix} ,$$

e si hanno le diagonalizzazioni

$$\begin{aligned} A_d &= U^\dagger A U = \operatorname{diag}\left(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \right) = \operatorname{diag}(4, 0, 0, 0) , \\ B_d &= U^\dagger B U = \operatorname{diag}\left(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4 \right) = \operatorname{diag}(3, -1, -1, -1) . \end{aligned}$$

Usando il teorema spettrale si per C la rappresentazione diagonale

$$\begin{aligned} C_d = U^\dagger C U = \operatorname{sen}\left(\pi B_d^3 \right) &= \operatorname{diag}\left(\cos\left(\pi \beta_1^3 \right), \cos\left(\pi \beta_2^3 \right), \cos\left(\pi \beta_3^3 \right), \cos\left(\pi \beta_4^3 \right) \right) \\ &= \operatorname{diag}\left(\cos(9\pi), \cos(-\pi), \cos(-\pi), \cos(-\pi) \right) \\ &= -\operatorname{diag}(1, 1, 1, 1) , \end{aligned}$$

ovvero C_d è l'opposto della matrice identità, ne consegue che

$$C = U C_d U^\dagger = -I .$$

Sesto problema (punteggio 6/30)

Senza calcolare esplicitamente gli integrali si dimostri l'identità

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(15 - 90x^2 + 60x^4 - 8x^6 \right)^2 e^{-2x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} w^{12} e^{-w^2} dw ,$$

se ne ottenga, quindi, il valore comune.
Suggerimento. Potrebbe essere utile considerare le derivate della funzione gaussiana.

Soluzione del sesto Problema

Consideriamo, come suggerito le derivate della funzione gaussiana $g(x) = e^{-x^2}$, si hanno

$$\begin{aligned}
\frac{dg}{dx} &= -2xe^{-x^2};\\
\frac{d^2g}{dx^2} &= 2\left(-1+2x^2\right)e^{-x^2};\\
\frac{d^3g}{dx^3} &= 4x\left(-3+2x^2\right)e^{-x^2};\\
\frac{d^4g}{dx^4} &= 4\left(3-12x^2+4x^4\right)e^{-x^2};\\
\frac{d^5g}{dx^5} &= -8x\left(15-20x^2+4x^4\right)e^{-x^2};\\
\frac{d^6g}{dx^6} &= 8\left(-15+90x^2-60x^4+8x^6\right)e^{-x^2}.
\end{aligned}$$

È facile vedere come la funzione integranda del primo integrale sia proporzionale al quadrato della derivata sesta della funzione gaussiana, in particolare si ha

$$[\text{membro sinistro}] = \int_{-\infty}^{\infty}\left(15-90x^2+60x^4-8x^6\right)^2 e^{-2x^2}dx = \frac{1}{8^2}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{d^6g}{dx^6}\right)^2 dx = \frac{1}{64}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{d^6g}{dx^6}\right|^2 dx\,,$$

l'ultima identità segue dal fatto che la funzione $g(x)$ e le sue derivate sono reali e quindi il loro valore al quadrato è non negativo.
Applichiamo la tesi del teorema di Plancherel per cui, la norma di una funzione a quadrato sommabile in $\mathbb{R}$ coincide con quella della sua trasformata di Fourier, ovvero $\forall\, f(x) \in L^2(\mathbb{R})$ si ha

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2dx = \int_{-\infty}^{\infty}\left|\mathscr{F}_k\left[f\right]\right|^2 dk\,.$$

Ogni derivata delle funzione gaussiana è una funzione a quadrato sommabile, per cui

$$[\text{membro sinistro}] = \frac{1}{64}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{d^6g}{dx^6}\right|^2 dx = \frac{1}{64}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\mathscr{F}_k\left[\frac{d^6g}{dx^6}\right]\right|^2 dk\,,$$

applicando la proprietà delle trasformate di Fourier per cui la trasformata di Fourier della derivata n-esima è pari $(ik)^n$ volte la trasformata di Fourier della funzione, si ha

$$[\text{membro sinistro}] = \frac{1}{64}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\mathscr{F}_k\left[\frac{d^6g}{dx^6}\right]\right|^2 dk = \frac{1}{64}\int_{-\infty}^{\infty}k^{12}\left|\mathscr{F}_k\left[g\right]\right|^2 dk\,.$$

La trasformata di Fourier della funzione gaussiana è nota e vale

$$\mathscr{F}_k\left[g\right] = \mathscr{F}_k\left[e^{-x^2}\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-k^2/4}\,,$$

sostituiamo questo risultato nell'espressione precedente e si ha

$$[\text{membro sinistro}] = \frac{1}{64}\int_{-\infty}^{\infty}k^{12}\left|\mathscr{F}_k\left[g\right]\right|^2 dk = \frac{1}{128}\int_{-\infty}^{\infty}k^{12}e^{-k^2/2}dk\,.$$

Con il cambiamento di variabile $k = \sqrt{2}w$ per portare l'esponenziale nella forma di quello del membro di destra dell'indennità che si vuole dimostrare, infatti si ha

$$[\text{membro sinistro}] = \frac{2^6\sqrt{2}}{128}\int_{-\infty}^{\infty}w^{12}e^{-w^2}dw = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{\infty}w^{12}e^{-w^2}dw = [\text{membro destro}]\,,$$

si è quindi fatta la dimostrazione richiesta.
Per calcolare il valore comune dei due integrali, usiamo il secondo. Facendo una serie di integrazioni per parti arriviamo all'integrale della sola funzione gaussiana, infatti

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{\infty} w^{12}e^{-w^2}dw &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Bigg(\underbrace{-w^{11}\frac{e^{-w^2}}{2}\Bigg|_{-\infty}^{\infty}}_{=0}+\frac{11}{2}\int_{-\infty}^{\infty} w^{10}e^{-w^2}dw\Bigg)\\
&= \frac{11}{2\sqrt{2}}\Bigg(\underbrace{-w^{9}\frac{e^{-w^2}}{2}\Bigg|_{-\infty}^{\infty}}_{=0}+\frac{9}{2}\int_{-\infty}^{\infty} w^{8}e^{-w^2}dw\Bigg)\\
&= \frac{11\cdot 9}{2^2\sqrt{2}}\Bigg(\underbrace{-w^{7}\frac{e^{-w^2}}{2}\Bigg|_{-\infty}^{\infty}}_{=0}+\frac{7}{2}\int_{-\infty}^{\infty} w^{6}e^{-w^2}dw\Bigg)\\
&= \cdots\\
&= \frac{11\cdot 9\cdot 7\cdot 5\cdot 3}{2^5\sqrt{2}}\Bigg(\underbrace{-w^{1}\frac{e^{-w^2}}{2}\Bigg|_{-\infty}^{\infty}}_{=0}+\frac{1}{2}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-w^2}dw}_{=\sqrt{\pi}}\Bigg)\\
&= \frac{11\cdot 9\cdot 7\cdot 5\cdot 3}{2^6}\sqrt{\frac{\pi}{2}},
\end{aligned}$$

da cui, calcolando esplicitamente il prodotto a numeratore e la potenza di 2 a denominatore, si ha

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(15-90x^2+60x^4-8x^6\right)^2 e^{-2x^2}dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{\infty} w^{12}e^{-w^2}dw = \frac{10395}{64}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$