Metodi Matematici per la Fisica

Prova scritta del 4 settembre 2020

Si risolvano cortesemente i seguenti problemi, sapendo che soltanto due problemi, uno dei primi tre e uno degli ultimi tre, che il candidato sceglierà prima della chiusura della prova, saranno oggetto di valutazione. A ciascun problema è assegnato un punteggio che varia nell'intervallo $[0, 15/30]$ ed è stabilito in base ai seguenti criteri:

1. la correttezza del risultato ottenuto e della procedura utilizzata;
2. la completezza dei passaggi riportati;
3. il livello di esemplificazione con cui sono espressi i risultati (ad esempio un risultato numerico reale non deve contenere l'unità immaginaria);
4. la correttezza del formalismo utilizzato;
5. la chiarezza dell'esposizione e la leggibilità del testo;

Inoltre, al fine di favorire una preparazione che copra il maggior numero di argomenti del programma, verranno valutati i contributi relativi, premiando i casi in cui il modulo della differenza tra i punteggi dei due problemi sia minimo.

Primo problema (punteggio massimo: 15/30)

Si calcoli l'integrale

$$C = \oint_{|z|=2} \left[\operatorname{sen}\left(\frac{1}{z-1}\right) + \cos\left(\frac{1}{z}\right)\right]^2 dz\,.$$

Soluzione del primo problema

Il percorso d'integrazione è la circonferenza centrata nell'origine, di raggio 2, che avvolge le due singolarità essenziali della funzione integranda, in $z = 1$, dovuta alla funzione seno e in $z = 0$, dovuta alla funzione coseno. La funzione integranda non ha altre singolarità. Svolgendo il quadrato del binomio e utilizzando le formule di bisezione, nonché il teorema di Cauchy, si ottiene

$$\begin{aligned}
C &= \oint_{|z|=2} \left[\operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{z-1}\right) + \cos^2\left(\frac{1}{z}\right) + 2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{z-1}\right)\cos\left(\frac{1}{z}\right)\right] dz \\
&= \oint_{|z|=2} \left[\frac{1-\cos(2/(z-1))}{2} + \frac{1+\cos(2/z)}{2} + 2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{z-1}\right)\cos\left(\frac{1}{z}\right)\right] dz \\
&= \oint_{|z|=2} \left[-\frac{\cos(2/(z-1))}{2} + \frac{\cos(2/z)}{2} + 2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{z-1}\right)\cos\left(\frac{1}{z}\right)\right] dz \\
&\equiv \quad C_1 + C_2 + C_3\,,
\end{aligned}$$

dove con C_1, C_2 e C_3 indichiamo gli integrali che hanno per funzioni integrande i tre termini della somma tra parentesi quadre. Si ottiene facilmente che i primi due integrali sono nulli. In particolare, per il primo si ha

$$C_1 = -\frac{1}{2}\oint_{|z|=2} \cos\left(\frac{2}{z-1}\right) dz = -i\pi \operatorname{Res}\left[\cos\left(\frac{2}{z-1}\right), z=1\right],$$

il residuo si calcola come il coefficiente "-1" della serie di Laurent della funzione integranda centrata in $z = 1$, ovvero

$$\cos\left(\frac{2}{z-1}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} T_k (z-1)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(z-1)^{-2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{(z-1)^{-2}}{2!} + \frac{(z-1)^{-4}}{4!} + \cdots\,,$$

dove $\{T_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ rappresenta l'insieme dei coefficienti di Laurent. Dalla seconda identità seguono

$$T_{k+1} = T_{-2k-1} = 0\,, \qquad T_{-2k} = \frac{(-1)^k}{(2k)!}\,, \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}\cup\{0\}\,,$$

quindi, gli unici coefficienti non nulli sono quelli pari della parte principale e il primo della parte regolare. Ne consegue che

$$T_{-1} = \mathrm{Res}\left[\cos\left(\frac{2}{z-1}\right), z=1\right] = 0\,,$$

quindi il residuo, che coincide con lo stesso coefficiente e anche l'integrale, che è proporzionale al residuo, sono nulli, ovvero $C_1 = -i\pi T_{-1} = 0$.
Per il calcolo dell'integrale C_2 usiamo gli stessi argomenti, si ha

$$C_2 = \frac{1}{2}\oint_{|z|=2} \cos\left(\frac{2}{z}\right) dz = i\pi\,\mathrm{Res}\left[\cos\left(\frac{2}{z}\right), z=0\right]\,,$$

la serie di Laurent centrata in $z=0$ della funzione integranda è

$$\cos\left(\frac{2}{z}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} S_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{z^{-2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{z^{-2}}{2!} + \frac{z^{-4}}{4!} + \cdots\,,$$

dove abbiamo indicato con $\{S_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ l'insieme dei coefficienti, per i quali si hanno i seguenti valori

$$S_{k+1} = S_{-2k-1} = 0\,, \qquad S_{-2k} = \frac{(-1)^k}{(2k)!}\,, \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}\cup\{0\}\,,$$

in particolare, anche in questo caso, $S_{-1} = 0$, da cui l'annullamento del residuo e dell'integrale, cioè

$$C_2 = 2i\pi\,\mathrm{Res}\left[\cos\left(\frac{2}{z}\right), z=0\right] = 0\,.$$

Infine, per il terzo integrale C_3 si hanno i contributi di due residui, ovvero,

$$\begin{aligned} C_3 &= 2\oint_{|z|=2} \mathrm{sen}\left(\frac{1}{z-1}\right)\cos\left(\frac{1}{z}\right) dz \\ &= 4i\pi\left(\mathrm{Res}\left[\mathrm{sen}\left(\frac{1}{z-1}\right)\cos\left(\frac{1}{z}\right), z=0\right] + \mathrm{Res}\left[\mathrm{sen}\left(\frac{1}{z-1}\right)\cos\left(\frac{1}{z}\right), z=1\right]\right)\,. \end{aligned}$$

Consideriamo gli sviluppi di Laurent della funzione seno e di quella coseno con, rispettivamente, centri in $z=1$ e $z=0$

$$\mathrm{sen}\left(\frac{1}{z-1}\right)\cos\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{k,j=0}^{\infty}(-1)^{j+k}\frac{(z-1)^{-2k-1}z^{-2j}}{(2k+1)!(2j)!}\,,$$

poiché le serie sono uniformemente convergenti scriviamo l'integrale delle serie come le serie degli integrali. In questo modo ciascun integrale avrà una funzione integranda con singolarità polari nei punti $z=1$ e $z=0$, centri degli sviluppi in serie, e potrà essere calcolato come somma dei due residui. In dettaglio abbiamo

$$C_3 = 2\sum_{k,j=0}^{\infty}\frac{(-1)^{j+k}}{(2k+1)!(2j)!}\oint_{|z|=2}\frac{dz}{(z-1)^{2k+1}z^{2j}} = 2\sum_{k,j=0}^{\infty}\frac{(-1)^{j+k}}{(2k+1)!(2j)!}D_{k,j}\,,$$

dove $D_{k,j}$ rappresenta l'integrale

$$D_{k,j} = \oint_{|z|=2}\frac{dz}{(z-1)^{2k+1}z^{2j}}\,, \qquad \forall\,(k,j)\in\mathbb{N}^2\cup\{(0,0)\}\,.$$

Consideriamo a parte il caso banale con $(k,j)=(0,0)$, caso in cui la funzione integranda ha un solo polo semplice con residuo unitario in $z=1$, quindi

$$D_{0,0} = \oint_{|z|=2}\frac{dz}{z-1} = 2i\pi\,\mathrm{Res}\left[\frac{1}{z-1}, z=1\right] = 2i\pi\,.$$

Gli integrali con $k > 0$ e $j = 0$ hanno la forma

$$D_{k,0} = \oint_{|z|=2} \frac{dz}{(z-1)^{2k+1}} = 0\,, \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}\,.$$

Gli integrali $D_{k,j}$ con $j > 0$ sono tutti nulli, infatti

$$\begin{aligned}
D_{k,j} &= 2i\pi \left(\operatorname{Res}\left[\frac{1}{(z-1)^{2k+1} z^{2j}}, z = 0 \right] + \operatorname{Res}\left[\frac{1}{(z-1)^{2k+1} z^{2j}}, z = 1 \right] \right) \\
&= 2i\pi \left(\frac{1}{(2j-1)!} \frac{d^{2j-1}}{dz^{2j-1}} \frac{1}{(z-1)^{2k+1}} \bigg|_{z=0} + \frac{1}{(2k)!} \frac{d^{2k}}{dz^{2k}} \frac{1}{z^{2j}} \bigg|_{z=1} \right) \\
&= 2i\pi \left((-1)^{2j-1} \frac{(2k+1)(2k+2)\cdots(2k+2j-1)}{(2j-1)!} (z-1)^{-2k-2j} \bigg|_{z=0} \right. \\
&\qquad \left. + (-1)^{2k} \frac{2j(2j+1)\cdots(2j+2k-1)}{(2k)!} z^{-2j-2k} \bigg|_{z=1} \right) \\
&= 2i\pi \left(-\frac{(2k+1)(2k+2)\cdots(2k+2j-1)}{(2j-1)!} + \frac{2j(2j+1)\cdots(2j+2k-1)}{(2k)!} \right) \\
&= 2i\pi \left(-\frac{(2k)!(2k+1)(2k+2)\cdots(2k+2j-1)}{(2j-1)!(2k)!} + \frac{(2j-1)!2j(2j+1)\cdots(2j+2k-1)}{(2k)!(2j-1)!} \right) \\
&= 2i\pi \left(-\frac{(2k+2j-1)!}{(2j-1)!(2k)!} + \frac{(2j+2k-1)!}{(2k)!(2j-1)!} \right) = 0\,, \qquad \forall\, j \in \mathbb{N}\,.
\end{aligned}$$

Ne consegue che l'unico integrale non nullo è $D_{0,0}$ ed è pari a $2i\pi$, quindi per l'integrale cercato si ha

$$C = C_1 + C_2 + C_3 = C_3 = 2 \sum_{k,j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{j+k}}{(2k+1)!(2j)!} D_{k,j} = 2D_{0,0} = 4i\pi\,.$$

Secondo problema (punteggio massimo: 15/30)

Si determini la parte principale della serie di Laurent centrata nell'origine e convergente nel punto $z_0 = e^{i\pi/4}/2$ della funzione

$$f(z) = \frac{1}{\left(1+z^2\right)^2 \operatorname{sen}(z^n)}\,,$$

con $n \in \mathbb{N}$.

Soluzione del secondo problema

Le singolarità della funzione sono in corrispondenza degli zeri, elementi dell'insieme $\{p_j\}_{j=1}^4$, del polinomio di quarto grado a denominatore e da quelli della funzione seno, elementi dell'insieme $\{z_{m,k}\}_{m=0,k\in\mathbb{Z}}^{n-1}$, anch'essa a denominatore, in particolare si hanno

$$p_1 = p_3 = i\,, \quad p_2 = p_4 = -i\,; \qquad z_{m,k} = (k\pi)^{1/n} e^{2im\pi/n}\,, \qquad (m,k) \in \{0,1,\ldots,n-1\} \times \mathbb{Z}\,,$$

gli zeri in $z = \pm i$ sono poli doppi mentre quelli nei punti $z = z_{m,k}$, con $(m,k) \in \{0,1,\ldots,n-1\} \times \mathbb{Z}$, sono tutti poli semplici ad eccezione dell'origine, $z_{m,0} = 0$, $\forall\, m \in \{0,1,\ldots,n-1\}$, che è invece un polo di ordine n. Si hanno quindi infinite serie di Laurent centrate dell'origine convergenti nelle infinite corone circolari

$$C = \{z : 0 < |z| < 1\}\,, \qquad C_0 = \{z : 1 < |z| < \pi^{1/n}\}\,, \qquad C_l = \{z : (l\pi)^{1/n} < |z| < [\pi(l+1)]^{1/n}\}\,, \quad l \in \mathbb{N}\,.$$

Poiché il punto z_0 ha modulo pari a $1/2$, quindi $0 < |z_0| < 1$, esso appartiene alla corona circolare C e quindi la serie di Laurent da considerare è quella convergente in C.
Fattorizziamo la funzione come

$$f(z) = \frac{1}{\left(1+z^2\right)^2} \frac{1}{\operatorname{sen}(z^n)}$$

e usiamo gli sviluppi in serie noti. Per il primo fattore si ha

$$\frac{1}{\left(1+z^2\right)^2}=-\frac{d}{dz^2}\frac{1}{1+z^2}=-\frac{1}{2z}\frac{d}{dz}\frac{1}{1+z^2}\,,$$

infatti, nella corona circolare C si ha la condizione $0<|z|<1$, da cui segue anche $0<|z|^2<1$, la funzione di cui si sta facendo la derivata coincide con la somma della serie geometrica di ragione $-z^2$, ovvero

$$\frac{1}{\left(1+z^2\right)^2}=-\frac{1}{2z}\frac{d}{dz}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k z^{2k}=\frac{1}{z}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}k\,z^{2k-1}\,,$$

dove la derivazione termine a termine è lecita in virtù della convergenza uniforme in ogni insieme chiuso contenuto nella corona circolare D.
Per la seconda funzione usiamo la serie di Taylor della funzione seno

$$\begin{aligned}\frac{1}{\operatorname{sen}(z^n)}&=\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^{n(2k+1)}}{(2k+1)!}\right)^{-1}=\left(z^n-\frac{z^{3n}}{3!}+\frac{z^{5n}}{5!}+O\left(z^{7n}\right)\right)^{-1}=\frac{1}{z^n}\left(1-\frac{z^{2n}}{3!}+\frac{z^{4n}}{5!}+O\left(z^{6n}\right)\right)^{-1}\\&=\frac{1}{z^n}\left[1+\left(\frac{z^{2n}}{3!}-\frac{z^{4n}}{5!}+O\left(z^{6n}\right)\right)+\left(\frac{z^{2n}}{3!}-\frac{z^{4n}}{5!}+O\left(z^{6n}\right)\right)^2+\cdots\right]\,,\end{aligned}$$

dove abbiamo interpretato il secondo fattore dell'ultimo membro della prima riga come somma della serie geometrica di ragione $\left(z^{2n}/3!-z^{4n}/5!+O\left(z^{6n}\right)\right)=\operatorname{sen}(z^n)/z^n-1$, che converge per $|z|<1$.
Alla luce dei due risultati, per la funzione completa si ha

$$\begin{aligned}f(z)&=\frac{1}{z^n}\left[1+\left(\frac{z^{2n}}{3!}-\frac{z^{4n}}{5!}+O\left(z^{6n}\right)\right)+\left(\frac{z^{2n}}{3!}-\frac{z^{4n}}{5!}+O\left(z^{6n}\right)\right)^2+\cdots\right]\frac{1}{z}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}k\,z^{2k-1}\\&=\left[1+\left(\frac{z^{2n}}{3!}-\frac{z^{4n}}{5!}+O\left(z^{6n}\right)\right)+\left(\frac{z^{2n}}{3!}-\frac{z^{4n}}{5!}+O\left(z^{6n}\right)\right)^2+\cdots\right]\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}k\,z^{2k-n-2}\,,\end{aligned}$$

la parte principale si ottiene dal prodotto dell'unità che compare come primo termine della serie geometrica in parentesi quadra per la somma parziale della seconda serie contenente solo potenze negative. Infatti, moltiplicando la potenza più bassa non costante della prima serie, cioè $z^{2n}/3!$ per la seconda serie, si ha

$$\frac{1}{3!}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}k\,z^{2k-2}=\frac{1}{3!}\left(1-2z^2+O\left(z^4\right)\right)\,,$$

ovvero una serie di sole potenze non negative, che quindi contribuisce alla parte regolare e non a quella principale della serie di Laurent.
In definitiva la parte principale della serie di Laurent della funzione $f(z)$ centrata nell'origine e convergente nella corona circolare C è

$$p(z)=\sum_{k=1}^{\mathrm{Int}[n/2]}(-1)^{k-1}k\,z^{2k-n-2}=\sum_{m=-n}^{-1}C_m z^m\,,$$

dove i coefficienti di Laurent sono definiti come

$$C_m=\begin{cases}(-1)^{(m+n)/2}\left(\dfrac{m+n}{2}+1\right) & \text{se } m+n \text{ è pari}\,,\\ 0 & \text{se } m+n \text{ è dispari}\,,\end{cases}\qquad;\qquad (m,n)\in\{-n,-n+1,\ldots,-1\}\times\mathbb{N}\,.$$

Terzo problema (punteggio massimo: 15/30)

Si calcoli l'integrale

$$U = \oint_{\Sigma} \frac{dz}{z^{10}+1}\,.$$

Il percorso di integrazione è definito dall'unione di cinque tratti rettilinei, ovvero

$$\Sigma = \bigcup_{j=0}^{4} S\left[2\exp\left(i\pi\left(\frac{1}{2}+\frac{4j}{5}\right)\right), 2\exp\left(i\pi\left(\frac{1}{2}+\frac{4j+4}{5}\right)\right)\right],$$

dove, con il simbolo $S[z_1, z_2]$ si indica il segmento di retta che ha per estremi i punti z_1 e z_2 ed è orientato nel verso che va dal primo al secondo punto.

Soluzione del terzo problema

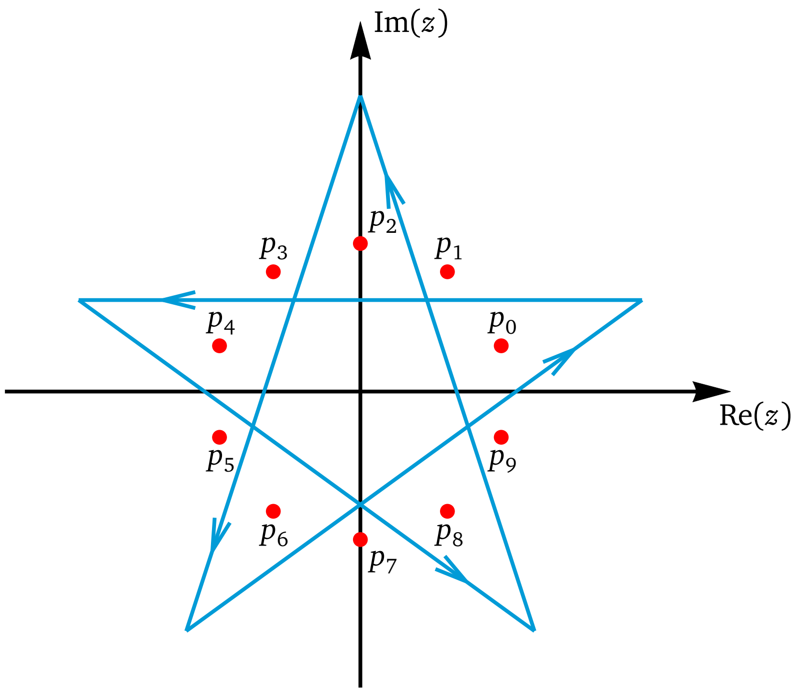
La funzione integranda ha dieci poli semplici, rappresentati da dischi rossi nella figura, sono i punti dell'insieme $\{p_k\}_{k=0}^{9}$ con

$$p_k = e^{(2k+1)i\pi/10}, \qquad k \in \{0, 1, \dots, 9\}\,.$$

Poiché soltanto i cinque poli semplici con indice pari o nullo sono avvolti una sola volta dal percorso d'integrazione Σ, rappresentato dalla spezzata celeste nella figura, l'integrale vale

$$U = 2i\pi \sum_{k=0}^{4} \mathrm{Res}\left[\frac{1}{z^{10}+1}, z = p_{2k}\right] = 2i\pi \sum_{k=0}^{4} \lim_{z\to p_{2k}} \frac{z-p_{2k}}{z^{10}+1} = 2i\pi \sum_{k=0}^{4} \frac{1}{10\,p_{2k}^{9}} = \frac{i\pi}{5}\sum_{k=0}^{4} e^{-9(4k+1)i\pi/10}$$
$$= \frac{i\pi e^{-9i\pi/10}}{5}\sum_{k=0}^{4}\left(e^{-18i\pi/5}\right)^k = \frac{i\pi e^{-9i\pi/10}}{5}\sum_{k=0}^{4}\left(e^{2i\pi/5}\right)^k = \frac{i\pi e^{-9i\pi/10}}{5}\,\frac{1-e^{10i\pi/5}}{1-e^{2i\pi/5}} = 0\,,$$

ovvero l'integrale cercato è nullo.



Quarto problema (punteggio massimo: 15/30)

Siano $\hat{A}$ e $\hat{B}$ due operatori agenti in uno spazio di Hilbert a dimensione finita, si dimostri che i due operatori prodotto $\hat{R} = \hat{A}\hat{B}$ e $\hat{S} = \hat{B}\hat{A}$ hanno lo stesso spettro discreto e si determini la relazione tra i loro autovettori.
Si ottengano quindi, le rappresentazioni matriciali e lo spettro discreto degli operatori $\hat{R}$ e $\hat{S}$ rispetto alla base ortonormale $\{|e_k\rangle\}_{k=1,2}$, nel caso in cui gli stessi operatori $\hat{A}$ e $\hat{B}$ siano hermitiani, definiti nello spazio di Hilbert a due dimensioni E_2, tali che

$$\mathrm{Tr}(\hat{A}) = \mathrm{Tr}(\hat{B}) = 0\,, \qquad 4\det(\hat{A}) = \det(\hat{B}) = -5$$

e sapendo, infine, che

$$|a_1\rangle \quad \overset{e}{\hookleftarrow} \quad a_1 = \frac{1}{\sqrt{10+4\sqrt{5}}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2-\sqrt{5} \end{pmatrix}, \qquad |b_1\rangle \quad \overset{e}{\hookleftarrow} \quad b_1 = \frac{1}{\sqrt{10+4\sqrt{5}}}\begin{pmatrix} 1 \\ i\left(2+\sqrt{5}\right) \end{pmatrix},$$

dove $|a_1\rangle$ e $|b_1\rangle$ sono rispettivamente gli autovettori degli operatori $\hat{A}$ e $\hat{B}$ relativi agli autovalori minori α_1 e β_1. Si hanno cioè le equazioni agli autovalori

$$\hat{A}|a_k\rangle = \alpha_k|a_k\rangle\,, \qquad \hat{B}|b_k\rangle = \beta_k|b_k\rangle\,, \qquad k = 1,2\,,$$

con $\alpha_1 < \alpha_2$ e $\beta_1 < \beta_2$.

Soluzione del quarto problema

Consideriamo le equazioni agli autovalori degli operatori $\hat{R} = \hat{A}\hat{B}$ e $\hat{S} = \hat{B}\hat{A}$

$$\hat{R}|r_j\rangle = \hat{A}\hat{B}|r_j\rangle = \rho_j|r_j\rangle\,, \qquad \hat{S}|s_j\rangle = \hat{B}\hat{A}|s_j\rangle = \sigma_j|s_j\rangle\,, \qquad j \in \{1,2,\ldots,N\}\,,$$

dove N è la dimensione dello spazio di Hilbert, $\{|r_j\rangle\}_{j=1}^N$ e $\{|s_j\rangle\}_{j=1}^N$ sono gli insiemi degli autovettori, mentre $\{\rho_j\}_{j=1}^N$ e $\{\sigma_j\}_{j=1}^N$ sono gli insiemi degli autovalori corrispondenti. Consideriamo, ad esempio, i vettori che si ottengono facendo agire l'operatore $\hat{B}$ sugli autovettori dell'operatore $\hat{R}$

$$\hat{B}|r_j\rangle = |r'_j\rangle\,, \qquad j \in \{1,2,\ldots,N\}\,,$$

è facile verificare che questi vettori $|r'_j\rangle$, con $j \in \{1,2,\ldots,N\}$, sono autovettori dell'operatore $\hat{S}$. Infatti, facendo agire tale operatore si ha

$$\hat{S}|r'_j\rangle = \hat{B}\underbrace{\hat{A}\hat{B}}_{=\hat{R}}|r_j\rangle = \hat{B}\underbrace{\hat{R}|r_j\rangle}_{=\rho_j|r_j\rangle} = \rho_j\underbrace{\hat{B}|r_j\rangle}_{=|r'_j\rangle} = \rho_j|r'_j\rangle\,, \qquad j \in \{1,2,\ldots,N\}\,.$$

Le precedenti non sono altro che le N equazioni agli autovalori per l'operatore $\hat{S}$ e quindi l'insieme $\{\rho_j\}_{j=1}^N$ coincide con l'insieme dei sui autovalori $\{\sigma_j\}_{j=1}^N$. Inoltre i vettori dell'insieme $\{|r'_j\rangle\}_{j=1}^N$ sono proporzionali agli omologhi dell'insieme $\{|s_j\rangle\}_{j=1}^N$, che è appunto l'insieme degli autovettori dell'operatore $\hat{S}$, cioè

$$|r'_j\rangle = f_j|s_j\rangle\,, \qquad j \in \{1,2,\ldots,N\}\,,$$

dove $\{f_j\}_{j=1}^N \subset \mathbb{C}$ è l'insieme delle costanti di proporzionalità. La relazione richiesta tra gli autovettori dei due operatori $\hat{S}$ e $\hat{R}$ è la precedente, ovvero a partire dagli autovettori dell'operatore $\hat{R}$ è possibile ottenere gli autovettori dell'operatore $\hat{S}$ attraverso l'azione dell'operatore $\hat{B}$. È immediato osservare che lo stesso può dirsi degli autovettori dell'operatore $\hat{R}$ che possono essere ottenuti dall'azione dell'operatore $\hat{A}$ sugli autovettori dell'operatore $\hat{S}$, ovvero

$$|s'_j\rangle = \hat{A}|s_j\rangle = g_j|r_j\rangle\,, \qquad j \in \{1,2,\ldots,N\}\,,$$

dove ora è $\{g_j\}_{j=1}^N \subset \mathbb{C}$ l'insieme delle costanti di proporzionalità. Ne consegue che valgono le equazioni agli autovalori

$$\hat{R}|s'_j\rangle = \sigma_j|s'_j\rangle\,, \qquad j \in \{1,2,\ldots,N\}\,.$$

È importante ribadire che gli autovettori sono definiti a meno di una costante moltiplicativa come conseguenza della omogeneità dell'equazione agli autovalori.

Poiché gli operatori $\hat{A}$ e $\hat{B}$ sono hermitiani, normali e diagonalizzabili, come tali hanno autovettori ortogonali e autovalori reali. La traccia e il determinante sono rispettivamente la somma e il prodotto degli autovalori, essendo le tracce nulle, gli insiemi degli autovalori, cioè gli spettri discreti sono coppie di numeri reali opposti, ovvero: $\alpha_2 = -\alpha_1$ e $\beta_2 = -\beta_1$. Dai determinanti noti si ha

$$\begin{aligned}
\det(\hat{A}) &= \alpha_1\alpha_2 = -\alpha_1^2 = -\frac{5}{4} \qquad \Rightarrow \qquad \alpha_{1,2} = \mp\frac{\sqrt{5}}{2}\,; \\
\det(\hat{B}) &= \beta_1\beta_2 = -\beta_1^2 = -5 \qquad \Rightarrow \qquad \beta_{1,2} = \mp\sqrt{5}\,,
\end{aligned}$$

l'assegnazione dei segni segue dalla richiesta del problema per cui che il primo degli autovalori debba essere il minore ovvero il negativo dei due.
Inoltre, la condizione di normalità degli operatori permette di calcolare le rappresentazioni matriciali a_2 e b_2, rispetto alla base ortonormale $\{|e_k\rangle\}_{k=1,2}$, dei secondi autovettori $|a_2\rangle$ e $|b_2\rangle$, relativi agli autovalori positivi α_2 e β_2, che devono essere ortogonali ai primi $|a_1\rangle$ e $|b_1\rangle$. Posti

$$a_2 = \frac{1}{\sqrt{|a_2^1|^2 + |a_2^2|^2}} \begin{pmatrix} a_2^1 \\ a_2^2 \end{pmatrix}, \qquad b_2 = \frac{1}{\sqrt{|b_2^1|^2 + |b_2^2|^2}} \begin{pmatrix} b_2^1 \\ b_2^2 \end{pmatrix},$$

cioè, indicando con $a_k^j/\sqrt{|a_k^1|^2 + |a_k^2|^2}$ e $b_k^j/\sqrt{|b_k^1|^2 + |b_k^2|^2}$ le j-esime componenti contro-varianti del k-esimo autovettore degli operatori $\hat{A}$ e $\hat{B}$, con $k, j = 1, 2$. Dalla condizione di ortogonalità e fissando $a_2^1 = b_2^1 = 1$, si hanno

$$\begin{aligned}
0 = a_1^\dagger a_2 &= \frac{1}{\sqrt{10+4\sqrt{5}}} \frac{1}{\sqrt{|a_k^1|^2 + |a_k^2|^2}} \left[1 - a_2^2\left(2+\sqrt{5}\right)\right] \qquad \Rightarrow \qquad a_2^2 = \frac{1}{2+\sqrt{5}} = -2+\sqrt{5}\,, \\
0 = b_1^\dagger b_2 &= \frac{1}{\sqrt{10+4\sqrt{5}}} \frac{1}{\sqrt{|b_k^1|^2 + |b_k^2|^2}} \left[1 - b_2^2\, i\left(2+\sqrt{5}\right)\right] \qquad \Rightarrow \qquad b_2^2 = \frac{-i}{2+\sqrt{5}} = i\left(2-\sqrt{5}\right),
\end{aligned}$$

quindi i secondi autovettori sono

$$a_2 = \frac{1}{\sqrt{10-4\sqrt{5}}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2+\sqrt{5} \end{pmatrix}, \qquad b_2 = \frac{1}{\sqrt{10-4\sqrt{5}}} \begin{pmatrix} 1 \\ i\left(2-\sqrt{5}\right) \end{pmatrix}.$$

Le matrici diagonalizzanti, che indichiamo rispettivamente con U e V per le matrici A e B, sono unitarie in quanto gli autovettori sono ortonormali, le loro forme esplicite si ottengono allineando i vettori colonna che rappresentano gli autovettori, cioè

$$\begin{aligned}
U &= \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/d_+ & 1/d_- \\ -\left(2+\sqrt{5}\right)/d_+ & -\left(2-\sqrt{5}\right)/d_- \end{pmatrix}, \\
V &= \begin{pmatrix} b_1^1 & b_2^1 \\ b_1^2 & b_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/d_+ & 1/d_- \\ i\left(2+\sqrt{5}\right)/d_+ & i\left(2-\sqrt{5}\right)/d_- \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

dove $d_\pm = \sqrt{10 \pm 4\sqrt{5}}$, per i quali si hanno le ovvie relazioni

$$d_+^2 d_1^2 = d_+^2 + d_-^2 = 20\,, \qquad d_+^2 - d_-^2 = 8\sqrt{5}\,.$$

La matrice A che rappresenta l'operatore $\hat{A}$ rispetto alla base ortonormale $\{|e_k\rangle\}_{k=1,2}$ si ottiene a partire dalla rappresentazione diagonale come

$$
\begin{aligned}
A &= U \operatorname{diag}\left(\alpha_1, \alpha_2\right) U^\dagger \\
&= \begin{pmatrix} 1/d_+ & 1/d_- \\ -\left(2+\sqrt{5}\right)/d_+ & -\left(2-\sqrt{5}\right)/d_- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{5}/2 & 0 \\ 0 & \sqrt{5}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/d_+ & -\left(2+\sqrt{5}\right)/d_+ \\ 1/d_- & -\left(2-\sqrt{5}\right)/d_- \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\sqrt{5}/(2d_+) & \sqrt{5}/(2d_-) \\ \sqrt{5}\left(2+\sqrt{5}\right)/(2d_+) & -\sqrt{5}\left(2-\sqrt{5}\right)/(2d_-) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/d_+ & -\left(2+\sqrt{5}\right)/d_+ \\ 1/d_- & -\left(2-\sqrt{5}\right)/d_- \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\sqrt{5}/(2d_+^2)+\sqrt{5}/(2d_-^2) & \sqrt{5}\left(2+\sqrt{5}\right)/(2d_+^2)-\sqrt{5}\left(2-\sqrt{5}\right)/(2d_-^2) \\ \sqrt{5}\left(2+\sqrt{5}\right)/(2d_+^2)-\sqrt{5}\left(2-\sqrt{5}\right)/(2d_-^2) & -\sqrt{5}\left(2+\sqrt{5}\right)^2/(2d_+^2)+\sqrt{5}\left(2-\sqrt{5}\right)^2/(2d_-^2) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sqrt{5}\left(d_+^2-d_-^2\right)/\left(2d_+^2d_-^2\right) & \left[-2\sqrt{5}\left(d_+^2-d_-^2\right)+5\left(d_+^2+d_-^2\right)\right]/(2d_+^2d_-^2) \\ \left[-2\sqrt{5}\left(d_+^2-d_-^2\right)+5\left(d_+^2+d_-^2\right)\right]/(2d_+^2d_-^2) & \left[9\sqrt{5}\left(d_+^2-d_-^2\right)-20\left(d_+^2+d_-^2\right)\right]/(2d_+^2d_-^2) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & -1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Allo stesso modo, la matrice B che rappresenta l'operatore $\hat{B}$ rispetto alla base ortonormale $\{|e_k\rangle\}_{k=1,2}$ si ottiene a partire dalla rappresentazione diagonale come

$$
\begin{aligned}
B &= V \operatorname{diag}\left(\beta_1, \beta_2\right) V^\dagger \\
&= \begin{pmatrix} 1/d_+ & 1/d_- \\ i\left(2+\sqrt{5}\right)/d_+ & i\left(2-\sqrt{5}\right)/d_- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{5} & 0 \\ 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/d_+ & -i\left(2+\sqrt{5}\right)/d_+ \\ 1/d_- & -i\left(2-\sqrt{5}\right)/d_- \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\sqrt{5}/d_+ & \sqrt{5}/d_- \\ -i\sqrt{5}\left(2+\sqrt{5}\right)/d_+ & i\sqrt{5}\left(2-\sqrt{5}\right)/d_- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/d_+ & -i\left(2+\sqrt{5}\right)/d_+ \\ 1/d_- & -i\left(2-\sqrt{5}\right)/d_- \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sqrt{5}\left(d_+^2-d_-^2\right)/\left(d_+^2d_-^2\right) & i\sqrt{5}\left(2+\sqrt{5}\right)/d_+^2-i\sqrt{5}\left(2-\sqrt{5}\right)/d_-^2 \\ -i\sqrt{5}\left(2+\sqrt{5}\right)/d_+^2+i\sqrt{5}\left(2-\sqrt{5}\right)/d_-^2 & -\sqrt{5}\left(2+\sqrt{5}\right)^2/d_+^2+\sqrt{5}\left(2-\sqrt{5}\right)^2/d_-^2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 & i\sqrt{5}\left[-2\left(d_+^2-d_-^2\right)+\sqrt{5}\left(d_+^2+d_-^2\right)\right]/\left(d_+^2d_-^2\right) \\ -i\sqrt{5}\left[-2\left(d_+^2-d_-^2\right)+\sqrt{5}\left(d_+^2+d_-^2\right)\right]/\left(d_+^2d_-^2\right) & \sqrt{5}\left[9\left(d_+^2-d_-^2\right)-4\sqrt{5}\left(d_+^2+d_-^2\right)\right]/\left(d_+^2d_-^2\right) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 & i \\ -i & -2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Le rappresentazioni matriciali degli operatori prodotto $\hat{R} = \hat{A}\hat{B}$ e $\hat{S} = \hat{B}\hat{A}$ sono i prodotti delle matrici che rappresentano gli operatori $\hat{A}$ e $\hat{B}$, cioè

$$
\begin{aligned}
\hat{R} \quad &\overset{e}{\hookleftarrow} \quad R = AB = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & i \\ -i & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-i/2 & -1+i \\ 1+i & 2+i/2 \end{pmatrix}, \\
\hat{S} \quad &\overset{e}{\hookleftarrow} \quad S = BA = \begin{pmatrix} 2 & i \\ -i & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+i/2 & 1-i \\ -1-i & 2-i/2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Infine, lo spettro discreto comune degli operatori $\hat{R}$ e $\hat{S}$ si ottiene risolvendo l'equazione secolare per la matrice R ovvero per la matrice S, infatti, come dimostrato nella prima parte della soluzione, le due equazioni sono identiche. Infatti, per la matrice R si ha

$$
\begin{aligned}
\det\left(R - I\rho\right) &= 0 \\
\det\begin{pmatrix} 2-i/2-\rho & -1+i \\ 1+i & 2+i/2-\rho \end{pmatrix} &= 0 \\
(2-\rho)^2 + \frac{9}{4} &= 0
\end{aligned}
$$

e per la matrice S

$$\det(S - I\sigma) = 0$$
$$\det\begin{pmatrix} 2+i/2-\sigma & 1-i \\ -1-i & 2-i/2-\sigma \end{pmatrix} = 0$$
$$(2-\sigma)^2 + \frac{9}{4} = 0\,.$$

Le soluzioni di questa equazione sono i due autovalori comuni, ovvero

$$\rho_{1,2} = \sigma_{1,2} = 2 \mp \frac{3i}{2}\,.$$

Quinto problema (punteggio massimo: 15/30)

Si determinino i valori dei parametri a, b e c affinché la matrice

$$P_1 = \begin{pmatrix} a & 0 & -i/2 \\ 0 & b & 0 \\ i/2 & 0 & c \end{pmatrix}\,,$$

rappresenti l'operatore di proiezione $\hat{P}_1$, rispetto ad una base ortonormale dello spazio di Hilbert a tre dimensioni E_3. Si ottengano, infine, le matrici P_2 e P_3 che rappresentano, rispetto alla stessa base, i due operatori di proiezioni $\hat{P}_2$ e $\hat{P}_3$ mutuamente ortogonali e ortogonali a $\hat{P}_1$.

Soluzione del quinto problema

Gli operatori di proiezione, che chiameremo semplicemente proiettori, sono hermitiani e idempotenti. L'hermitianità implica che gli elementi della diagonale della rappresentazione matriciale rispetto a una generica base ortonormale debbano essere reali. Ne consegue che tali devono essere i valori dei tre parametri a, b e c.
Inoltre, dalla condizione di idempotenza segue che $P_1 = P_1^2$, ovvero

$$\begin{pmatrix} a & 0 & -i/2 \\ 0 & b & 0 \\ i/2 & 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & -i/2 \\ 0 & b & 0 \\ i/2 & 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 & -i/2 \\ 0 & b & 0 \\ i/2 & 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+1/4 & 0 & -i(a+c)/2 \\ 0 & b^2 & 0 \\ i(a+c)/2 & 0 & c^2+1/4 \end{pmatrix}\,,$$

l'identità equivale alle quattro equazioni

$$a + c = 1\,, \qquad a^2 - a + \frac{1}{4} = 0\,, \qquad c^2 - c + \frac{1}{4} = 0\,, \qquad b(b-1) = 0\,,$$

le cui soluzioni sono uniche per i parametri a e c, ovvero $a = c = 1/2$, mentre per il parametro b, si ottengono i due valori $b = 0, 1$. Consideriamo, quindi, i due casi corrispondenti ai due insiemi di parametri $\{a, b, c\} = \{1/2, 1/2, 0\}$ e $\{a, b, c\} = \{1/2, 1/2, 1\}$.

Primo caso

Il proiettore $\hat{P}_1$ ha la rappresentazione matriciale

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -i/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ i/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}\,,$$

per ottenere le rappresentazioni dei due proiettori ortogonali a $\hat{P}_1$ procediamo come segue. Calcoliamo gli autovalori del proiettore $\hat{P}_1$ risolvendone l'equazione secolare

$$\det(P_1 - \rho I) = 0$$
$$\begin{pmatrix} 1/2-\rho & 0 & -i/2 \\ 0 & -\rho & 0 \\ i/2 & 0 & 1/2-\rho \end{pmatrix} = 0$$
$$\left[\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - \rho\right)^2\right]\rho = 0\,,$$

i tre autovalori

$$\rho_1 = 1\,, \qquad \rho_2 = 0\,, \qquad \rho_3 = 0\,.$$

Come conseguenza della idempotenza lo spettro di un proiettore può contenere solo l'autovalore nullo e quello unitario, quindi per dimensioni maggiori di due si avrà sempre degenerazione, come in questo caso. Indichiamo con $\{v_j\}_{j=1}^3$ l'insieme delle rappresentazioni degli autovettori del proiettore $\hat{P}_1$, le cui componenti contro-varianti si ottengono risolvendo i sistemi

$$\begin{pmatrix} -1/2 & 0 & -i/2 \\ 0 & -1 & 0 \\ i/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^1 \\ v_1^2 \\ v_1^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -i/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ i/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{2,3}^1 \\ v_{2,3}^2 \\ v_{2,3}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

dove con v_j^k, con $k, j = 1, 2, 3$, indichiamo la k-esima componente contro-variante del j-esimo autovettore v_j. Nel primo sistema poniamo $v_1^1 = 1$ e dalla prima equazione si ottiene $v_1^3 = i$; dalla seconda $v_1^2 = 0$, per cui l'autovettore normalizzato v_1 ha la forma

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}.$$

Dal secondo sistema dovremo ottenere due soluzioni ortogonali. Poniamo $v_2^1 = 1$ e dalla prima equazione si ha $v_2^3 = -i$, non ci sono vincoli su v_2^2 che poniamo quindi uguale a zero, quindi

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -i \end{pmatrix}.$$

Infine, otteniamo il terzo autovettore v_3, poniamo $v_3^1 = 0$, dalla prima equazione, ancora del secondo sistema, si ha $v_3^3 = 0$, la seconda componente è arbitraria la poniamo uguale all'unità, $v_3^2 = 1$, cioè

$$v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

I tre autovettori sono elementi di un insieme di vettori ortonormali, quindi la matrice diagonalizzante, che chiamiamo U, è unitaria e si ottiene giustapponendo gli stessi autovettori in colonna, ovvero

$$U = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ i/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice U trasforma la matrice P_1 nella matrice diagonale P_{1d}, che ha sulla diagonale gli autovalori ordinati nello stesso ordine con cui abbiamo allineato gli autovettori, in particolare

$$P_{1d} = U^\dagger P_1 U = \mathrm{diag}(1, 0, 0)\,.$$

Indichiamo con P_{2d} e P_{3d} le rappresentazioni dei proiettori ortogonali $\hat{P}_2$ e $\hat{P}_3$ rispetto alla base di autovettori del proiettore $\hat{P}_1$. Imponiamo la condizione di ortogonalità sulla matrice P_{2d}

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = P_{1d} P_{2d} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (P_{2d})_1^1 & (P_{2d})_2^1 & (P_{2d})_3^1 \\ (P_{2d})_1^2 & (P_{2d})_2^2 & (P_{2d})_3^2 \\ (P_{2d})_1^3 & (P_{2d})_2^3 & (P_{2d})_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (P_{2d})_1^1 & (P_{2d})_2^1 & (P_{2d})_3^1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = P_{2d} P_{1d} = \begin{pmatrix} (P_{2d})_1^1 & (P_{2d})_2^1 & (P_{2d})_3^1 \\ (P_{2d})_1^2 & (P_{2d})_2^2 & (P_{2d})_3^2 \\ (P_{2d})_1^3 & (P_{2d})_2^3 & (P_{2d})_3^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (P_{2d})_1^1 & 0 & 0 \\ (P_{2d})_1^2 & 0 & 0 \\ (P_{2d})_1^3 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

da cui si ottiene che gli elementi della prima riga e della prima colonna della matrice P_{2d} sono nulli, ovvero

$$P_{2d} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (P_{2d})_2^2 & (P_{2d})_3^2 \\ 0 & (P_{2d})_2^3 & (P_{2d})_3^3 \end{pmatrix}.$$

La matrice P_{2d}, rappresentando un proiettore rispetto a una base ortonormale, deve essere hermitiana e idempotente, quindi, ponendo $(P_{2d})^2_2 = x$, $(P_{2d})^3_3 = y$ e $(P_{2d})^2_3 = z$ per economia di notazione, cioè usando la forma

$$P_{2d} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & z \\ 0 & z^* & y \end{pmatrix} ,$$

avremo che la condizione di idempotenza

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & z \\ 0 & z^* & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & z \\ 0 & z^* & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & z \\ 0 & z^* & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & x^2+|z|^2 & z(x+y) \\ 0 & z^*(x+y) & y^2+|z|^2 \end{pmatrix} ,$$

dà i valori delle componenti diagonali e il modulo della componente z, che sono: $x = y = |z| = 1/2$, mentre la fase di z, che chiameremo $\delta = \arg(z)$, rimane indeterminata o meglio non vincolata. In definitiva, la forma più generale per la matrice P_{2d} è

$$P_{2d} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & e^{i\delta} \\ 0 & e^{-i\delta} & 1 \end{pmatrix} .$$

La terza matrice, P_{3d}, può essere ottenuta dalla relazione di completezza: $\hat{P}_1 + \hat{P}_2 + \hat{P}_3 = \hat{I}$, per cui la somma dei tre proiettori ortogonali corrisponde all'operatore identità, in termini delle loro rappresentazioni matriciali avremo, ovviamente, $P_{1d} + P_{2d} + P_{3d} = I$, quindi

$$P_{3d} = I - P_{1d} - P_{2d} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & e^{i\delta}/2 \\ 0 & e^{-i\delta}/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & -e^{i\delta}/2 \\ 0 & -e^{-i\delta}/2 & 1/2 \end{pmatrix} .$$

La matrice che rappresenta il proiettore $\hat{P}_2$ rispetto alla base ortonormale iniziale si ricava dalla matrice P_{2d} attraverso la trasformazione inversa rispetto a quella generata dalla matrice unitaria U, cioè

$$P_2 = U P_{2d} U^\dagger = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ i/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & e^{i\delta}/2 \\ 0 & e^{-i\delta}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -i/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & i/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1/(2\sqrt{2}) & e^{i\delta}/(2\sqrt{2}) \\ 0 & e^{-i\delta}/2 & 1/2 \\ 0 & -i/(2\sqrt{2}) & -ie^{i\delta}/(2\sqrt{2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -i/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & i/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1/4 & e^{i\delta}/(2\sqrt{2}) & i/4 \\ e^{-i\delta}/(2\sqrt{2}) & 1/2 & ie^{-i\delta}/(2\sqrt{2}) \\ -i/4 & -ie^{i\delta}/(2\sqrt{2}) & 1/4 \end{pmatrix} .$$

Infine, utilizzando ancora la relazione di completezza, si ottiene la matrice P_3

$$P_3 = I - P_1 - P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -i/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ i/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/4 & e^{i\delta}/(2\sqrt{2}) & i/4 \\ e^{-i\delta}/(2\sqrt{2}) & 1/2 & ie^{-i\delta}/(2\sqrt{2}) \\ -i/4 & -ie^{i\delta}/(2\sqrt{2}) & 1/4 \end{pmatrix}$$

$$P_3 = \begin{pmatrix} 1/4 & -e^{i\delta}/(2\sqrt{2}) & i/4 \\ -e^{-i\delta}/(2\sqrt{2}) & 1/2 & -ie^{-i\delta}/(2\sqrt{2}) \\ -i/4 & ie^{i\delta}/(2\sqrt{2}) & 1/4 \end{pmatrix} .$$

Secondo caso

In questo caso il parametro b vale uno e il proiettore $\hat{P}_1$ ha la rappresentazione matriciale

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -i/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ i/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} .$$

Procediamo come nel caso precedente, ovvero calcoliamo gli autovalori del proiettore $\hat{P}_1$ risolvendo l'equazione caratteristica

$$\det\left(P_1 - \rho I\right) = 0$$
$$\begin{pmatrix} 1/2-\rho & 0 & -i/2 \\ 0 & 1-\rho & 0 \\ i/2 & 0 & 1/2-\rho \end{pmatrix} = 0$$
$$\left[\frac{1}{4} - \left(\rho - \frac{1}{2}\right)^2\right](\rho - 1) = 0\,,$$

i tre autovalori sono

$$\rho_1 = 1\,, \qquad \rho_2 = 1\,, \qquad \rho_3 = 0\,.$$

cui corrispondono gli autovettori (omettiamo il calcolo esplicito delle componenti essendo analogo a quello già visto nel caso precedente)

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}\,, \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\,, \qquad u_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -i \end{pmatrix}\,.$$

La matrice diagonalizzante, che chiamiamo V, è unitaria, essendo anche in questo caso i tre autovettori elementi di un insieme ortonormale di vettori, ha la forma

$$V = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ i/\sqrt{2} & 0 & -i/\sqrt{2} \end{pmatrix}\,,$$

e genera, appunto, la trasformazione che diagonalizza la matrice P_1, cioè

$$P_{1d} = V^{\dagger} P_1 V = \mathrm{diag}(1,1,0)\,.$$

Otteniamo la matrice P_{2d}, che rappresenta il proiettore $\hat{P}_2$ ortogonale a $\hat{P}_1$, imponendo la condizione di ortogonalità

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = P_{1d}P_{2d} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (P_{2d})^1_1 & (P_{2d})^1_2 & (P_{2d})^1_3 \\ (P_{2d})^2_1 & (P_{2d})^2_2 & (P_{2d})^2_3 \\ (P_{2d})^3_1 & (P_{2d})^3_2 & (P_{2d})^3_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (P_{2d})^1_1 & (P_{2d})^1_2 & (P_{2d})^1_3 \\ (P_{2d})^2_1 & (P_{2d})^2_2 & (P_{2d})^2_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\,,$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = P_{2d}P_{1d} = \begin{pmatrix} (P_{2d})^1_1 & (P_{2d})^1_2 & (P_{2d})^1_3 \\ (P_{2d})^2_1 & (P_{2d})^2_2 & (P_{2d})^2_3 \\ (P_{2d})^3_1 & (P_{2d})^3_2 & (P_{2d})^3_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (P_{2d})^1_1 & (P_{2d})^1_2 & 0 \\ (P_{2d})^2_1 & (P_{2d})^2_2 & 0 \\ (P_{2d})^3_1 & (P_{2d})^3_2 & 0 \end{pmatrix}\,,$$

da cui si ottiene che solo l'elemento $(P_{2d})^3_3$ è non nullo, ovvero si ha

$$P_{2d} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (P_{2d})^3_3 \end{pmatrix}\,.$$

Dalla condizione di idempotenza, quindi, segue immediatamente che $(P_{2d})^3_3 = 1$, quindi

$$P_{2d} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\,.$$

In questo caso le rappresentazioni dei proiettori sono completamente determinate, non c'è una fase libera come in precedenza. La matrice P_{3d}, che rappresenta il proiettore $\hat{P}_3$ rispetto alla base di autovettori del primo proiettore, si ottiene ancora una volta dalla relazione di completezza come

$$P_{3d} = I - P_{1d} - P_{2d} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\,.$$

Questo strano risultato per il terzo proiettore, che coincide con l'operatore nullo, è comunque atteso, in quanto era evidente che la somma dei primi due proiettori ortogonali $\hat{P}_1$ e $\hat{P}_2$ copriva già tutto lo spazio. Lo si poteva vedere anche al livello della rappresentazione rispetto alla base di autovettori del proiettore $\hat{P}_1$, cioè $P_{1d} + P_{2d} = I$, che è ovviamente equivalente all'omologa identità operatoriale

$$\hat{P}_1 + \hat{P}_2 = \hat{I}\,,$$

ovvero si ha la relazione di completezza con solo due proiettori. Alla luce di questo risultato, si può ottenere la matrice P_2 che rappresenta il secondo proiettore rispetto alla base ortonormale iniziale come

$$P_2 = I - P_1 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & i/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -i/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Sesto problema (punteggio massimo: 15/30)

L'operatore $\hat{X}$, è definito nello spazio di Hilbert a quattro dimensioni E_4 dalla sua azione sui vettori della base ortonormale $\{|u_k\rangle\}_{k=1}^4 \subset E_4$,

$$\hat{X}|u_1\rangle = |u_2\rangle\,, \qquad \hat{X}|u_2\rangle = -x^2|u_3\rangle\,, \qquad \hat{X}|u_3\rangle = |u_4\rangle\,, \qquad \hat{X}|u_4\rangle = |u_1\rangle + \left(1+x^2\right)|u_3\rangle\,.$$

Si determinino i valori reali del parametro x per i quali l'operatore $\hat{X}$ sia diagonalizzabile.

Soluzione del sesto Problema

Consideriamo la matrice X che rappresenta l'operatore rispetto alla base data, gli elementi di tale matrice si ottengono come

$$\hat{X}|u_j\rangle = X_j^k|u_k\rangle\,, \qquad j \in \{1,2,3,4\}\,,$$

ovvero, con X_j^k indichiamo l'elemento della k-esima riga e j-esima colonna della matrice X. Alla luce di questa definizione, usando le azioni date, si ottengono gli elementi della matrice

$$\begin{aligned}
\hat{X}|u_1\rangle = |u_2\rangle \qquad &\Rightarrow \qquad X_1^1 = X_1^3 = X_1^4 = 0\,, \quad X_1^2 = 1\,,\\
\hat{X}|u_2\rangle = -x^2|u_3\rangle \qquad &\Rightarrow \qquad X_2^1 = X_2^2 = X_2^4 = 0\,, \quad X_2^3 = -x^2\,,\\
\hat{X}|u_3\rangle = |u_4\rangle \qquad &\Rightarrow \qquad X_3^1 = X_3^2 = X_3^3 = 0\,, \quad X_3^4 = 1\,,\\
\hat{X}|u_4\rangle = |u_1\rangle + \left(x^2+1\right)|u_3\rangle \qquad &\Rightarrow \qquad X_4^2 = X_4^4 = 0\,, \quad X_4^1 = 1\,, \quad X_4^3 = x^2+1\,.
\end{aligned}$$

Queste quattro espressioni definiscono le colonne della matrice X, per cui si ha

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x^2 & 0 & x^2+1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Gli autovalori si ottengono, in funzione del parametro x, risolvendo l'equazione secolare

$$\begin{aligned}
\det(X - \lambda I) &= 0\\
\det\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -x^2 & -\lambda & x^2+1 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} &= 0\\
-\lambda\left[-\lambda\left(\lambda^2 - x^2 - 1\right)\right] - \left(-x^2\right) &= 0\\
\lambda^4 - \lambda^2\left(x^2+1\right) + x^2 &= 0\,.
\end{aligned}$$

Le soluzioni per λ^2 sono $\lambda_-^2 = 1$ e $\lambda_+^2 = x^2$, da cui i quattro autovalori

$$\lambda_{1,2} = \mp 1\,, \qquad \lambda_{3,4} = \mp x\,.$$

È immediato osservare che per $x \neq 0$ e $x \neq \pm 1$, ovvero per i valori reali di x tali che $x \notin \{-1, 0, 1\}$, non si ha degenerazione e quindi l'operatore è diagonalizzabile.
Calcoliamo gli autovettori v_1 e v_2 per i primi due autovalori. Si hanno i sistemi

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & -x^2 & \pm 1 & x^2+1 \\ 0 & 0 & 1 & \pm 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{1,2}^1 \\ v_{1,2}^2 \\ v_{1,2}^3 \\ v_{1,2}^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

dove con $v_{1,2}^1$, $v_{1,2}^2$, $v_{1,2}^3$ e $v_{1,2}^4$ indichiamo le componenti contro-varianti dei due autovettori v_1 e v_2. Posto $v_{1,2}^1 = 1$, dalla prima equazione si ha $v_{1,2}^4 = \mp 1$; dalla seconda: $v_{1,2}^2 = \mp 1$; dalla quarta: $v_{1,2}^3 = \mp v_{1,2}^4 = 1$. Inserendo anche i coefficienti di normalizzazione si hanno

$$v_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Gli autovettori v_3 e v_4 relativi al terzo e quarto autovalore si ottengono dai sistemi

$$\begin{pmatrix} \pm x & 0 & 0 & 1 \\ 1 & \pm x & 0 & 0 \\ 0 & -x^2 & \pm x & x^2+1 \\ 0 & 0 & 1 & \pm x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{3,4}^1 \\ v_{3,4}^2 \\ v_{3,4}^3 \\ v_{3,4}^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

anche in questo caso poniamo la prima componente di entrambi uguale all'unità, cioè $v_{3,4}^1 = 1$, quindi dalla prima equazione: $v_{3,4}^4 = \mp x$; dalla seconda: $v_{3,4}^2 = \mp 1/x$; dalla quarta $v_{3,4}^3 = \mp x v_{3,4}^4 = x^2$, si hanno

$$v_3 = \frac{1}{\sqrt{x^2+1+x^6+x^4}} \begin{pmatrix} x \\ -1 \\ x^3 \\ -x^2 \end{pmatrix}, \qquad v_4 = \frac{1}{\sqrt{x^2+1+x^6+x^4}} \begin{pmatrix} x \\ 1 \\ x^3 \\ x^2 \end{pmatrix}.$$

Nel caso in cui $x = 0$, i quattro autovettori sono

$$v_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

e il terzo e quarto autovalore coincidono, ovvero si avrebbe degenerazione. Gli autovettori v_3 e v_4 relativi allo stesso autovalore che ha ordine di degenerazione pari a due sono proporzionali, la molteplicità geometrica è pari ad uno, quindi strettamente minore di quella algebrica che vale due. Poiché i quattro autovettori non sono linearmente indipendenti, in questo caso l'operatore non è diagonalizzabile.
Nei casi $x = \pm 1$ si hanno gli autovettori

$$v_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \pm 1 \\ -1 \\ \pm 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad v_4 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \pm 1 \\ 1 \\ \pm 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

il terzo e quarto autovalore sono $\lambda_3 = \mp 1$ e $\lambda_4 = \pm 1$, c'è in ogni caso degenerazione, infatti si hanno solo due autovalori distinti, ciascuno con molteplicità algebrica due. Le molteplicità geometriche sono però sempre unitarie per cui in entrambi i casi l'operatore non è diagonalizzabile, infatti gli autovettori coincidono due a due, cioè, con $x = 1$, si hanno le identità $\lambda_1 = \lambda_3$ e $\lambda_2 = \lambda_4$ e (seg no alto)

$$v_1 = v_3, \qquad v_2 = v_4.$$

Mentre con $x = -1$, $\lambda_1 = \lambda_4$ e $\lambda_2 = \lambda_3$ e per gli autovettori (segno basso)

$$v_1 = -v_4, \qquad v_2 = -v_3.$$