Metodi Matematici per la Fisica

Prova scritta - 4 luglio 2017

Si risolvano cortesemente i seguenti problemi, sapendo che verranno valutati:

1. la correttezza del risultato ottenuto e della procedura utilizzata;
2. la completezza dei passaggi riportati;
3. il livello di esemplificazione con cui sono espressi i risultati (ad esempio un risultato numerico reale non deve contenere l'unità immaginaria);
4. la correttezza del formalismo utilizzato;
5. la chiarezza dell'esposizione e la leggibilità del testo.

Primo problema (punteggio: 6/30)

Dopo aver determinato l'espressione formale, dipendente da $n \in \mathbb{N}$, degli integrali

$$H_n = \int_{-1}^{+1} \left(1 - x^2\right)^{1/2} x^{2n} dx \, ,$$

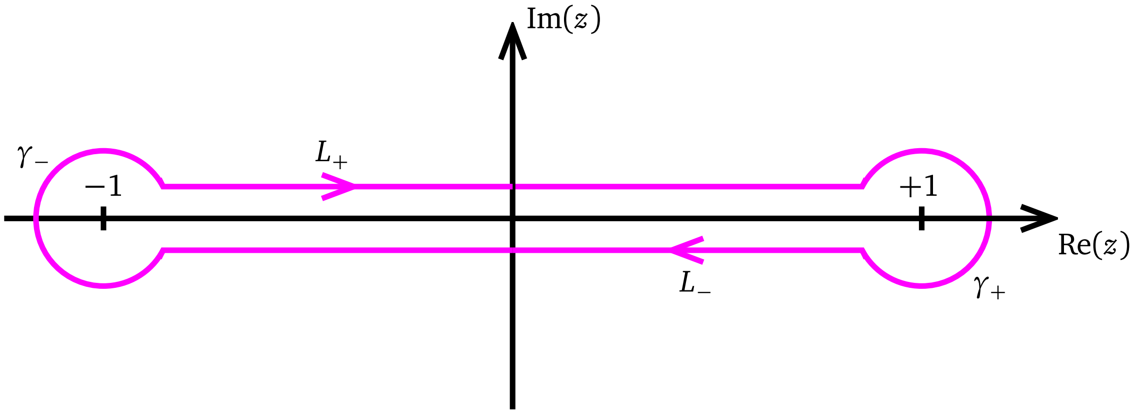
si ottengano esplicitamente i valori di H_1 ed H_5.
Suggerimento. Per calcolare i residui si usi lo sviluppo di Taylor nell'origine della funzione $g(w) = \sqrt{1-w}$ e per stabilirne le fasi si sfrutti la positività di tutti gli integrali H_n.

Soluzione del primo problema

Le integrande sono funzioni polidrome con punti di diramazione al finito in $x = \pm 1$. Definiamo il percorso chiuso $\Gamma = L_+ \cup (-\gamma_+) \cup L_- \cup (-\gamma_-)$, mostrato in figura, composto dai due tratti rettilinei $L_\pm$, giacenti sopra e sotto il segmento reale $[-1, +1]$, e dagli archi $\gamma_\pm$ centrati nei punti di diramazione e di raggio ϵ. Si ha che, una volta definite le fasi in modo che il taglio delle integrande coincida col segmento reale $[-1, +1]$, gli integrali su tale percorso chiuso, che indichiamo con K_n, si calcolano con il teorema dei residui, ovvero

$$K_n = \oint_\Gamma \left(1 - z^2\right)^{1/2} z^{2n} dz = 2i\pi \sum_{z_k \text{ esterni}} \text{Res}\left[\left(1 - z^2\right)^{1/2} z^{2n}, z = z_k\right] = 2i\pi \, \text{Res}\left[\left(1 - z^2\right)^{1/2} z^{2n}, z = \infty\right] .$$

Poichè le integrande non hanno singolarità al finito, l'unico residuo che contribuisce è necessariamente quello all'infinito.



Fattorizziamo la funzione sotto radice e definiamo le fasi in modo che, come detto, il taglio coincida con $[-1, +1]$,

$$\left(1 - z^2\right)^{1/2} = \left(|1 + z| e^{i\theta_-} |1 - z| e^{i\theta_+}\right)^{1/2} = \left|1 - z^2\right|^{1/2} e^{i(\theta_- + \theta_+)/2} , \qquad \begin{cases} \theta_- \in (0, 2\pi) \\ \theta_+ \in (-\pi, \pi) \end{cases} ,$$

Con questa scelta il taglio che ha origine in $z=-1$, dato da $\left(|1+z|e^{i\theta_+}\right)^{1/2}$, avendo che $\theta_+ \in (o, 2\pi)$ è "in avanti", ovvero coincide con la semiretta reale $(-1,+\infty)$. Il taglio dovuto all'altro fatto $\left(|1-z|e^{i\theta_-}\right)^{1/2}$, ha origine in $z=1$ e, come conseguenza della scelta $\theta_- \in (-\pi,\pi)$, è anch'esso in avanti e quindi coincide con la semiretta reale $(+1,\infty)$. Poich'ϵnella regione di sovrapposizione i due tagli si cancellano, la discuntinuità rimane solo in $(-1,+1)$. Inoltre, in base alle definizioni precedenti, sui tratti rettilinei di Γ, $L_\pm$, le fasi $\theta_\pm$ hanno i seguenti valori limite ($\epsilon \to 0^+$):

$$\begin{array}{lll} L_+: & \theta_+ = -\epsilon\,, & \theta_- = \epsilon\,, \\ L_-: & \theta_+ = +\epsilon\,, & \theta_- = 2\pi - \epsilon\,. \end{array}$$

Ne consegue che gli integrali K_n, sul percorso chiuso Γ, possono essere scritti in termini dei soli integrali H_n cercati, infatti

$$\begin{aligned} K_n &= \oint_\Gamma \left(1-z^2\right)^{1/2} z^{2n} dz \\ &= -\int_{\gamma_+} \left(1-z^2\right)^{1/2} z^{2n} dz - \int_{\gamma_-} \left(1-z^2\right)^{1/2} z^{2n} dz + \int_{L_+} \left(1-z^2\right)^{1/2} z^{2n} dz + \int_{L_-} \left(1-z^2\right)^{1/2} z^{2n} dz\,, \end{aligned}$$

nel limite $\epsilon \to 0^+$, K_n non cambia, gli integrali sugli archi $\gamma_\pm$ si annullano, mentre quelli sui tratti rettilinei diventano

$$\begin{aligned} K_n &= \lim_{\epsilon\to 0^+} \oint_\Gamma \left(1-z^2\right)^{1/2} z^{2n} dz \\ &= \lim_{\epsilon\to 0^+} \left(\int_{L_+} \left(1-z^2\right)^{1/2} z^{2n} dz + \int_{L_-} \left(1-z^2\right)^{1/2} z^{2n} dz \right) \\ &= \lim_{\epsilon\to 0^+} \left(\int_{-1}^{+1} \left(1-z^2\right)^{1/2} \underbrace{e^{(-\epsilon+\epsilon)/2}}_{=1} x^{2n} dx + \int_{+1}^{-1} \left(1-z^2\right)^{1/2} \underbrace{e^{(+\epsilon+2\pi-\epsilon)/2}}_{=-1} x^{2n} dx \right) \\ &= 2\int_{-1}^{+1} \left(1-z^2\right)^{1/2} x^{2n} dx = 2H_n\,. \end{aligned}$$

Da cui si ottengono gli H_n in funzione dei residui all'infinito,

$$H_n = i\pi\,\mathrm{Res}\left[\left(1-z^2\right)^{1/2} z^{2n}, z=\infty\right] = -i\pi\,\mathrm{Res}\left[\frac{\left(1-1/w^2\right)^{1/2}}{w^{2(n+1)}}, w=0\right] = -i\pi\,\mathrm{Res}\left[\frac{\left(w^2-1\right)^{1/2}}{w^{2n+3}}, w=0\right]\,.$$

Il residuo nell'origine, nella variabile $w=1/z$, corrisponde alla derivata $(2n+2)$-esima dell funzione $\left(w^2-1\right)^{1/2}$ valutata nell'origine, infatti usando la formula integrale di Cauchy per le derivate, si ha

$$\mathrm{Res}\left[\frac{\left(w^2-1\right)^{1/2}}{w^{2n+3}}, w=0\right] = \frac{1}{2i\pi}\oint_{|w|=\epsilon} \frac{\left(w^2-1\right)^{1/2}}{w^{2n+3}} dw = \frac{1}{(2n+2)!}\frac{d^{2n+2}}{dw^{2n+2}}\left(w^2-1\right)^{1/2}\Big|_{w=0}\,.$$

Lo stesso residuo rappresenta il coefficiente $C_{-1}^{(n)}$, della potenza w^{-1}, della serie di Laurent, centrata nell'origine, della funzione

$$f(w) = \frac{\left(w^2-1\right)^{1/2}}{w^{2n+3}}\,.$$

La serie può essere ottenuta partendo, come suggerito, dallo sviluppo in serie di Taylor della funzione $g(w) = \sqrt{1-w}$,

$$g(w) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\,\frac{d^k g}{dw^k}\Big|_{w=0} w^k\,, \qquad |w|<1\,,$$

che, come indicato, ha raggio di convergenza unitario. Determiniamo la legge ricorsiva delle derivate di $g(w)$,

$$\begin{aligned}
\frac{dg}{dw} &= -\frac{1}{2}(1-w)^{-1/2}\\
\frac{d^2g}{dw^2} &= -\frac{1}{2}\frac{1}{2}(1-w)^{-3/2}\\
\frac{d^3g}{dw^3} &= -\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{3}{2}(1-w)^{-5/2}\\
\vdots &= \vdots\\
\frac{d^kg}{dw^k} &= -\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{3}{2}\cdots\frac{2k-3}{2}(1-w)^{-(2k-1)/2} = -\frac{(2k-3)!!}{2^k}(1-w)^{-(2k-1)/2}\,.
\end{aligned}$$

Valutando nell'origine e dividendo per $k!$ si ottiene il coefficiente k-esimo e quindi la serie di Taylor ha la forma

$$g(w) = 1 - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k-3)!!}{2^k k!}w^k\,.$$

Usiamo questo risultato per ricavare la serie di Laurent della funzione $f(w)$

$$f(w) = \frac{\left(w^2-1\right)^{1/2}}{w^{2n+3}} = \sqrt{-1}\frac{\left(1-w^2\right)^{1/2}}{w^{2n+3}} = \sqrt{-1}\left(\frac{1}{w^{2n+3}} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k-3)!!}{2^k k!}w^{2k-2n-3}\right),$$

il coefficiente $C_{-1}^{(n)}$, ovvero il residuo, è quello per $2k-2n-3=-1$, ovvero $k=n+1$,

$$C_{-1}^{(n)} = \mathrm{Res}\left[\frac{\left(w^2-1\right)^{1/2}}{w^{2n+3}}, w=0\right] = \sqrt{-1}\frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}(n+1)!}\,.$$

Gli integrali cercati sono

$$H_n = -i\pi\mathrm{Res}\left[\frac{\left(w^2-1\right)^{1/2}}{w^{2n+3}}, w=0\right] = -i\pi\sqrt{-1}\frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}(n+1)!} = \pi\frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}(n+1)!}\,.$$

L'ambiguità della radice $\sqrt{-1}=\pm i$, che abbiamo lasciato fino all'ultimo, è stata risolta sapendo che tutti gli integrali sono positivi, per cui si ha $\sqrt{-1}=+i$. Questo risultato può essere dimostrato seguendo il procedimento risolutivo del primo problema della prova scritta del 10 gennaio 2017. Nei casi $n=1$ e $n=5$ si hanno

$$\begin{aligned}
H_1 &= \pi\frac{1!!}{2^2 2!} = \frac{\pi}{8}\,,\\
H_5 &= \pi\frac{9!!}{2^6 6!} = \pi\frac{9\cdot7\cdot5\cdot3}{2^6\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2} = \frac{21\pi}{1028}\,.
\end{aligned}$$

Secondo problema (punteggio 6/30)

Si determinino tutti i coefficienti della parte principale e i primi tre coefficienti non nulli della parte regolare delle prime due serie di Laurent, ovvero quelle con domini di superficie minore, centrate nell'origine, della funzione

$$f(z) = \frac{\mathrm{sen}(z)}{\mathrm{senh}(z)}\,.$$

Soluzione del secondo problema

La funzione ha una singolarità eliminabile nell'origine, infatti

$$\lim_{z\to0} f(z) = 1\,, \tag{1}$$

e poli semplici nei punti $z_k = ik\pi$ con $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$. Le prime due serie di Laurent centrate in $z = 0$ convergono nel disco $D_0 = \{z : |z| < \pi\}$ e nella corona circolare $D_1 = \{z : \pi < |z| < 2\pi\}$. La serie in D_0 è una serie di Taylor, ovvero tutti i coefficienti della parte principale sono nulli, in quanto l'origine è una singolarità eliminabile. Per verificare questa affermazione e calcolare, come richiesto, i primi tre coefficienti non nulli della parte regolare, usiamo gli sviluppi noti delle funzioni seno e seno iperbolico,

$$\mathrm{sen}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}\,, \qquad \mathrm{senh}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}\,.$$

In D_0 si ha

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{z - z^3/3! + z^5/5! + O\left(z^7\right)}{z + z^3/3! + z^5/5! + O\left(z^7\right)} = \frac{1 - z^2/3! + z^4/5! + O\left(z^6\right)}{1 + z^2/3! + z^4/5! + O\left(z^6\right)} \\ &= \left(1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + O\left(z^6\right)\right) \left[1 - \left(\frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + O\left(z^6\right)\right) + \left(\frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + O\left(z^6\right)\right)^2 + \cdots\right], \end{aligned} \tag{2}$$

dove, per il denominatore si è usata la ben nota somma della serie geometrica

$$\frac{1}{1-\alpha} = 1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots\,, \qquad |\alpha| \to 0\,,$$

con $\alpha = z^2/3! + z^4/5! + O\left(z^6\right)$. È evidente che la serie di Laurent ha solo potenze non negative, non ha parte principale. Inoltre, come conseguenza della parità della funzione, sono presenti, oltre al termine noto unitario, solo potenze pari, formalmente si ha

$$f(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} C_{2k}^{(0)} z^{2k}\,, \qquad z \in D_0\,,$$

dove l'apice (0) indica che i coefficienti sono relativi alla serie convergente in D_0. I tre valori da calcolare sono $C_0^{(0)}$, $C_2^{(0)}$ e $C_4^{(0)}$, ma il primo è già noto e vale uno, come si ottiene sia dal valore del limite riportato in Eq. (1), che dall'espressione nell'Eq. (2). Per i successivi usiamo ancora l'Eq. (2)

$$\begin{aligned} f(z) &= \left(1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + O\left(z^6\right)\right) \left[1 - \left(\frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + O\left(z^6\right)\right) + \left(\frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + O\left(z^6\right)\right)^2 + \cdots\right] \\ &= 1 + z^2\left(-\frac{1}{3!} - \frac{1}{3!}\right) + z^4\left(\frac{1}{5!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{(3!)^2} + \frac{1}{(3!)^2}\right) + O\left(z^6\right) \\ &= 1 - \frac{z^2}{3} + \frac{z^4}{18} + O\left(z^6\right)\,, \end{aligned}$$

da cui si possono estrarre i tre valori cercati

$$C_1^{(0)} = 1\,, \qquad C_2^{(0)} = -\frac{1}{3}\,, \qquad C_4^{(0)} = \frac{1}{18}\,.$$

La seconda serie di Laurent ha l'espressione formale

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k^{(1)} z^k\,, \qquad z \in D_1\,,$$

dove, con simbologia analoga a quella del caso precedente, l'apice (1) indica che i coefficienti sono relativi alla serie convergente in D_1. In questo caso, calcoliamo i coefficienti con la formula integrale usuale

$$C_k^{(1)} = \frac{1}{2i\pi} \oint_{|z|=3\pi/2} \frac{f(z)}{z^{k+1}} dz\,, \qquad k \in \mathbb{Z}\,.$$

Come percorso di integrazione abbiamo scelto, senza perdita di generalià, la circonferenza centrata nell'origine di raggio $3\pi/2$, quindi contenuta in D_1. Gli integrali possono essere calcolati con il teorema dei residui, considerando che l'integranda ha all'interno della circonferenza $|z| = 3\pi/2$ tre poli: $z_\pm = \pm i\pi$ e $z_0 = 0$; i due in $z_\pm = \pm i\pi$ sono semplici, mentre il polo nell'origine è di ordine $k+1$, ne consegue che

$$C_k^{(1)} = \frac{1}{2i\pi}\oint_{|z|=3\pi/2} \frac{\text{sen}(z)}{z^{k+1}\text{senh}(z)}dz = \text{Res}\left[\frac{\text{sen}(z)}{z^{k+1}\text{senh}(z)}, 0\right] + \text{Res}\left[\frac{\text{sen}(z)}{z^{k+1}\text{senh}(z)}, i\pi\right] + \text{Res}\left[\frac{\text{sen}(z)}{z^{k+1}\text{senh}(z)}, -i\pi\right].$$

Il primo residuo rappresenta i coefficienti della prima serie di Laurent, quindi

$$C_k^{(1)} = C_k^{(0)} + \text{Res}\left[\frac{\text{sen}(z)}{z^{k+1}\text{senh}(z)}, i\pi\right] + \text{Res}\left[\frac{\text{sen}(z)}{z^{k+1}\text{senh}(z)}, -i\pi\right].$$

Calcolando i residui nei poli semplici

$$\text{Res}\left[\frac{\text{sen}(z)}{z^{k+1}\text{senh}(z)}, \pm i\pi\right] = \lim_{z\to\pm i\pi}\frac{\text{sen}(z)}{z^{k+1}\text{senh}(z)}(z \mp i\pi) = \frac{\text{sen}(\pm i\pi)}{(\pm i\pi)^{k+1}\underbrace{\cosh(\pm i\pi)}_{=-1}} = \mp i\frac{\text{senh}(\pi)}{(\pm i\pi)^{k+1}},$$

otteniamo per i coefficienti la seguente espressione

$$C_k^{(1)} = C_k^{(0)} - i\frac{\text{senh}(\pi)}{(i\pi)^{k+1}} + (-1)^{k+1}i\frac{\text{senh}(\pi)}{(i\pi)^{k+1}} = C_k^{(0)} - i\frac{\text{senh}(\pi)}{(i\pi)^{k+1}}\left(1+(-1)^k\right).$$

Sapendo che i coefficienti $C_k^{(0)}$ con indice negativo sono tutti nulli, così come sono nulli quelli con indice positivo e dispari, si arriva all'espressione finale

$$C_k^{(1)} = \begin{cases} 0 & \forall\,|k|\ \text{dispari} \\ -2i\dfrac{\text{senh}(\pi)}{(i\pi)^{k+1}} = -(-1)^{k/2}2\pi^{|k|-1}\text{senh}(\pi) & k<0 \text{ e } -k \text{ pari} \\ C_k^{(0)} - 2i\dfrac{\text{senh}(\pi)}{(i\pi)^{k+1}} = C_k^{(0)} - (-1)^{k/2}2\dfrac{\text{senh}(\pi)}{\pi^{|k|+1}} & k\geq 0 \text{ e } k \text{ pari} \end{cases}.$$

I primi tre coefficienti non nulli della parte regolare sono

$$\begin{aligned} C_0^{(1)} &= C_0^{(0)} - 2\frac{\text{senh}(\pi)}{\pi} = 1 - 2\frac{\text{senh}(\pi)}{\pi}, \\ C_2^{(1)} &= C_2^{(0)} + 2\frac{\text{senh}(\pi)}{\pi^3} = -\frac{1}{3} + 2\frac{\text{senh}(\pi)}{\pi^3}, \\ C_4^{(1)} &= C_4^{(0)} - 2\frac{\text{senh}(\pi)}{\pi^5} = \frac{1}{18} - 2\frac{\text{senh}(\pi)}{\pi^5}. \end{aligned}$$

Terzo problema (punteggio 6/30)

Sfruttando il metodo dei residui si ottenga la somma della serie

$$Z = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k^6}.$$

Soluzione del terzo problema

La serie a segni alterni può essere posta nella forma

$$Z = -\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k f(k),$$

dove $f(z) = 1/z^6$ è una funzione meromorfa cha ha, come unica singolarità, un polo di orine 6 nell'origine. Secondo la procedura, definiamo la funzione

$$F(z) = \frac{\pi}{\text{sen}(z\pi)}f(z),$$

che ha poli semplici, dovuti alla funzione seno a denominatore, nei punti $z_k = k$, con $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$, mentre nell'origine ha un polo di ordine 7. Calcoliamo l'integrale, che indichiamo con F_n, della funzione $F(z)$ sulla circonferenza C_n, centrata nell'origine di raggio $R_n = (2n+1)\pi/2$, che contiene, quindi, il polo nell'origine e i $2n$ poli semplici $z_k = k$, con $k = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n$, si ha

$$F_n = \oint_{C_n} F(z)dz = 2i\pi \mathrm{Res}\left[F(z), 0\right] + 2i\pi \sum_{k=1}^{n} \Big(\mathrm{Res}\left[F(z), k\right] + \mathrm{Res}\left[F(z), -k\right] \Big) .$$

I residui sono nei poli semplici sono

$$\mathrm{Res}\left[F(z), \pm k\right] = \lim_{z\to\pm k} F(z)(z \mp k) = (-1)^k f(\pm k) = \frac{(-1)^k}{k^6} ,$$

quindi l'espressione precedente diventa

$$F_n = 2i\pi \mathrm{Res}\left[F(z), 0\right] + 2i\pi \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{(-1)^k}{k^6} + \frac{(-1)^k}{k^6} \right)$$

da cui si ha la somma parziale n-esima delle serie cercata

$$-\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k^6} = -\frac{F_n}{4i\pi} + \frac{1}{2}\mathrm{Res}\left[F(z), 0\right] .$$

Poiché la funzione $f(z)$ è un $O\left(z^{-6}\right)$ al divergere di z, per il lemma di integrazione sugli archi infiniti si ha

$$\lim_{n\to\infty} F_n = 0 ,$$

per cui la summa della serie coincide con la metà del residuo nell'origine, ovvero

$$Z = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^6} = \frac{1}{2}\mathrm{Res}\left[F(z), 0\right] .$$

Calcoliamo il residuo usando la formula integrale di Cauchy per le derivate

$$\mathrm{Res}\left[F(z), 0\right] = \frac{1}{2i\pi}\oint_{|z|=\rho} F(z)dz = \frac{1}{2i\pi}\oint_{|z|=\rho} \frac{\pi}{z^6 \mathrm{sen}(z\pi)} dz = \left.\frac{1}{6!}\frac{d^6}{dz^6}\frac{z\pi}{\mathrm{sen}(z\pi)}\right|_{z=0} ,$$

il percorso di integrazione è la circonferenza $|z| = \rho$, con $\rho \in (0, \pi)$. Questo residuo coincide con il coefficiente della potenza 6 della serie di Taylor, centrata nell'origine, della funzione $z\pi/\mathrm{sen}(z\pi)$. Calcoliamo questo coefficiente sfruttando la serie nota della funzione seno

$$\begin{aligned}
\frac{z\pi}{\mathrm{sen}(z\pi)} &= \frac{z\pi}{z\pi - (z\pi)^3/3! + (z\pi)^5/5! - (z\pi)^7/7! + O\left(z^9\right)} \\
&= 1 + \left(\frac{(z\pi)^2}{3!} - \frac{(z\pi)^4}{5!} + \frac{(z\pi)^6}{7!} + O\left(z^8\right) \right) + \left(\frac{(z\pi)^2}{3!} - \frac{(z\pi)^4}{5!} + \frac{(z\pi)^6}{7!} + O\left(z^8\right) \right)^2 + \cdots \\
&= \cdots + (z\pi)^6 \left(+\frac{1}{7!} - \frac{2}{3!5!} + \frac{1}{(3!)^3} \right) + O\left(z^8\right) = \cdots + (z\pi)^6 \frac{3! - 2\cdot 6\cdot 7 + 7\cdot 5\cdot 4}{3!7!} + O\left(z^8\right) \\
&= \cdots + (z\pi)^6 \frac{6 + 7\cdot 4(5-3)}{6\cdot 7!} + O\left(z^8\right) = \cdots + (z\pi)^6 \frac{3 + 7\cdot 4}{3\cdot 7!} + O\left(z^8\right) \\
&= \cdots + z^6 \frac{31\pi^6}{3\cdot 7!} + O\left(z^8\right) ,
\end{aligned}$$

da cui si ottiene il risultato finale

$$Z = \frac{1}{2}\mathrm{Res}\left[F(z), 0\right] = \frac{1}{2}\frac{31\pi^6}{3\cdot 7!} = \frac{31\pi^6}{30240} .$$

Quarto problema (punteggio 6/30)

Si determini la rappresentazione matriciale canonica dell'operatore hermitiano e regolare $\hat{A}$, definito in uno spazio di Hilbert di dimensione 3, tale che:

- si abbia $||\hat{A}|| = ||\hat{A}^{-1}|| = \mathrm{Tr}\left(\hat{A}\right) = 1$;
- $\hat{A}$ sia diagonalizzabile simultaneamente con l'operatore hermitiano $\hat{B}$ che ha rappresentazione matriciale canonica

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} ;$$

- gli autovalori di $\hat{A}$ e $\hat{B}$ abbiano lo stesso ordinamento, ovvero l'autovettore relativo all'autovalore massimo, ad esempio, di $\hat{B}$ sia relativo all'autovalore massimo di $\hat{A}$.

Soluzione del quarto problema

Le norme dell'operatore $\hat{A}$ e dell'inverso $\hat{A}^{-1}$ sono legate agli autovalori $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ dalle relazioni

$$1 = ||\hat{A}|| = \max_{k=1,2,3} \{|\alpha_k|\} , \qquad 1 = ||\hat{A}^{-1}|| = \max_{k=1,2,3} \{1/|\alpha_k|\} = 1/\min_{k=1,2,3} \{|\alpha_k|\} ,$$

si ha che

$$1 = \min_{k=1,2,3} \{|\alpha_k|\} \leq |\alpha_k| \leq \max_{k=1,2,3} \{|\alpha_k|\} = 1 ,$$

e quindi che tutti e tre gli autovalori di $\hat{A}$ hanno modulo 1, cioè: $|\alpha_1| = |\alpha_2| = |\alpha_3| = 1$. L'operatore è hermitiano, gli autovalori sono reali e dal risultato precedente segue che possono assumere solo due possibili valori $\alpha_k = \pm 1$; verificano, inoltre, la condizione della traccia

$$1 = \mathrm{Tr}\left(\hat{A}\right) = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 ,$$

ne consegue che l'unica terna possibile, con i valori in ordine non crescente, è $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (1, 1, -1)$, da cui la rappresentazione diagonale di $\hat{A}$

$$A_d = \mathrm{diag}\,(1, 1, -1) .$$

Per ottenere la rappresentazione canonica è necessario conoscere gli autovettori, che coincidono con quelli dell'operatore $\hat{B}$, in quanto i due operatori sono diagonalizzabili simultaneamente.
Gli autovalori di $\hat{B}$ si ottengono come zeri dell'equazione secolare

$$\det\left(\hat{B} - \beta\hat{I}\right) = \det \begin{pmatrix} 1-\beta & 1 & 1 \\ 1 & 1-\beta & -1 \\ 1 & -1 & 1-\beta \end{pmatrix} = (\beta - 2)\left[\beta\,(1-\beta) + 2\right] = 0 , \qquad \left\{ \begin{array}{l} \beta_1 = 2 \\ \beta_2 = 2 \\ \beta_3 = -1 \end{array} \right. .$$

Gli autovettori ortonormali sono

$$b_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} , \qquad b_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} , \qquad b_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} ,$$

e quindi si ha la matrice unitaria diagonalizzante

$$U = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} \end{pmatrix} .$$

Poiché gli operatori $\hat{A}$ e $\hat{B}$ sono diagonalizzati simultaneamente da questa stessa matrice unitaria, la rappresentazione cercata è

$$A = UA_dU^\dagger = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix} .$$

Quinto problema (punteggio 6/30)

Si determinino gli autovalori e le rappresentazioni canoniche degli autovettori dell'operatore

$$\hat{B} = \frac{1}{2i\pi} \oint_{|z|=1} e^z \left(\hat{I}z - \hat{A}\right)^{-1} dz \, ,$$

($\hat{I}$ è l'operatore identità) definito in uno spazio di Hilbert a 3 dimensioni in termini dell'operatore hermitiano $\hat{A}$, che ha rappresentazione canonica

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 3/2 \end{pmatrix} .$$

Soluzione del quinto problema

Poiché l'operatore $\hat{A}$ è diagonalizzabile, in quanto hermitiano, possiamo applicare il teorema spettrale alla funzione inversa che moltiplica l'esponenziale nell'integranda. Indicando rispettivamente con $\{\alpha_k\}_{k=1}^3$ e $\{|a_k\rangle\}_{k=1}^3$ gli insiemi degli autovalori e autovettori di $\hat{A}$, per cui si hanno le equazioni agli autovalori

$$\hat{A}|a_k\rangle = \alpha_k |a_k\rangle \, , \qquad k = 1, 2, 3 \, ,$$

allora, se $z \notin \{\alpha_k\}_{k=1}^3$, si hanno anche le equazioni

$$\left(\hat{I}z - \hat{A}\right)^{-1} |a_k\rangle = \frac{1}{z - \alpha_k} |a_k\rangle \, , \qquad k = 1, 2, 3 \, .$$

Ne consegue che gli autovettori di $\hat{A}$ sono anche autovettori di $\hat{B}$, infatti

$$\hat{B}|a_k\rangle = \frac{1}{2i\pi} \oint_{|z|=1} e^z \left(\hat{I}z - \hat{A}\right)^{-1} |a_k\rangle \, dz = \frac{1}{2i\pi} \oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z - \alpha_k} dz \, |a_k\rangle = \begin{cases} e^{\alpha_k}|a_k\rangle & \text{se } |\alpha_k| < 1 \\ \text{indefinito} & \text{se } |\alpha_k| = 1 \\ 0|a_k\rangle & \text{se } |\alpha_k| > 1 \end{cases} . \tag{3}$$

Gli autovalori dell'operatore $\hat{A}$ si ottengono come soluzioni dell'equazione secolare

$$\det(I\alpha - A) = \det \begin{pmatrix} \alpha & 0 & -1 \\ 0 & \alpha - 1/2 & 0 \\ -1 & 0 & \alpha - 3/2 \end{pmatrix} = \alpha \left(\frac{1}{2} - \alpha\right)\left(\frac{3}{2} - \alpha\right) + \left(\frac{1}{2} - \alpha\right) = 0 \, ,$$

si hanno

$$\alpha_1 = 2 \, , \qquad \alpha_2 = \frac{1}{2} \, , \qquad \alpha_3 = -\frac{1}{2} \, .$$

Gli autovettori sono

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{pmatrix} = \alpha_k \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{array}{l} z_k = \alpha_k x_k \\ y_k = 2\alpha_k y_k \\ x_k = \alpha_k z_k - 3z_k/2 \end{array} ,$$

ovvero, considerando i tre autovalori e normalizzando ad uno,

$$
\begin{aligned}
&\alpha_1 = 2: \quad \begin{array}{l} z_1 = 2x_1 \\ y_1 = 4y_1 \\ x_1 = z_1/2 \end{array} \quad \text{posto: } x_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} x_1 = 1 \\ y_1 = 0 \\ z_1 = 2 \end{array} \quad \Rightarrow \quad a_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}; \\
&\alpha_2 = 1/2: \quad \begin{array}{l} z_1 = x_1/2 \\ y_1 = y_1 \\ x_1 = -z_1 \end{array} \quad \text{posto: } y_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ y_1 = 1 \\ z_1 = 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \\
&\alpha_3 = -1/2 \quad \begin{array}{l} z_1 = -x_1/2 \\ y_1 = -y_1 \\ x_1 = -2z_1 \end{array} \quad \text{posto: } x_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} x_1 = 1 \\ y_1 = 0 \\ z_1 = -1/2 \end{array} \quad \Rightarrow \quad a_3 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
\tag{4}
$$

In definitiva, gli autovalori dell'operatore $\hat{B}$ sono

$$\beta_1 = 0\,, \qquad \beta_2 = e^{\alpha_2} = \sqrt{e}\,, \qquad \beta_3 = e^{\alpha_3} = \frac{1}{\sqrt{e}}\,.$$

Il primo è nullo in quanto $\alpha_1 > 1$ per cui si ha il terzo caso di Eq. (3). Le rappresentazioni canoniche degli autovettori di $\hat{B}$, che coincidono con quelli di $\hat{A}$, sono i vettori colonna a_1, a_2 e a_3 ottenuti in Eq. (4).

Sesto problema (punteggio 6/30)

Si calcoli la trasformata di Fourier della funzione

$$f(x) = \int_{-\infty}^{x} e^{-|y|} dy\,.$$

Suggerimento. Potrebbe essere utile la trasformata di Fourier della funzione segno

$$\mathscr{F}_k\left[\text{segno}(x)\right] = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{ik}\,.$$

Soluzione del sesto Problema

L'integrale può essere riscritto con la funzione a gradino di Heaviside come

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \theta(y-x) e^{-|y|} dy\,,$$

ovvero come la convoluzione delle funzioni $h(x) = \theta(-x)$ e $g(x) = e^{-|x|}$. Per il teorema della convoluzione si ha che la trasformata di Fourier della funzione $f(x)$ è proporzionale al prodotto delle trasformate di Fourier delle funzioni $h(x)$ e $g(x)$, cioè

$$\mathscr{F}_k[f] = \mathscr{F}_k[(h*g)(x)] = \sqrt{2\pi}\,\mathscr{F}_k[h]\mathscr{F}_k[g]\,.$$

La trasformata di Fourier dell'esponenziale dell'opposto del modulo è nota e vale

$$\mathscr{F}_k[g] = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{k^2+1}\,.$$

La funzione a gradino di Heaviside può essere scritta in termini della funzione segno come

$$\theta(x) = \frac{\text{segno}(x)+1}{2}\,,$$

ne consegue che, per la linearità della trasformata di Fourier, si ha

$$\mathscr{F}_k\left[\theta(x)\right] = \frac{1}{2}\left(\mathscr{F}_k\left[\text{segno}(x)\right] + \mathscr{F}_k\left[1\right]\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{ik} + \sqrt{2\pi}\delta(k)\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{ik\pi} + \delta(k)\right).$$

In definitiva la trasformata di Fourier cercata è

$$\mathscr{F}_k\left[f\right] = \sqrt{2\pi}\frac{1}{k^2+1}\left(\frac{1}{ik\pi}+\delta(k)\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{ik\left(k^2+1\right)}+\sqrt{2\pi}\,\delta(k)\,.$$