Metodi Matematici per la Fisica

Secondo esonero - 4 giugno 2015

Si svolgano cortesemente i seguenti esercizi.

Esercizio 1 (punteggio: 2.5/30)

Si consideri la successione $\{|a_k\rangle\}_{k=1}^{\infty} \subset E$, dove E è uno spazio di Hilbert, si dimostri che, se la successione converge ad un vettore $|a\rangle \in E$, ovvero

$$\lim_{k\to\infty} |a_k\rangle = |a\rangle \,,$$

allora anche la successione

$$\left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |a_k\rangle \right\}_{n=1}^{\infty}$$

converge allo stesso vettore.

Soluzione 1

La convergenza della successione $\{|a_k\rangle\}_{k=1}^{\infty}$ al vettore $|a\rangle$ implica che: $\forall\, \epsilon > 0$, $\exists\, k_0 \in \mathbb{N}$, tale che

$$\left\| a - a_j \right\| < \epsilon \,, \qquad \forall\, j \geq k_0 \,.$$

Consideriamo, per $n > j$, la norma $\left\| a - \left(a_1 + a_2 + \ldots + a_n\right)/n \right\|$, che può essere minorata come

$$\left\| a - \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \right\| = \frac{\left\| a - a_1 + a - a_2 + \ldots + a - a_n \right\|}{n} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{\left\| a - a_k \right\|}{n} < \sum_{k=1}^{j-1} \frac{\left\| a - a_k \right\|}{n} + \epsilon \frac{n-j+1}{n} \,.$$

Con una opportuna scelta di n la somma dell'ultimo membro può essere resa piccola quanto si vuole. Ovvero: $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$, tale che

$$\sum_{k=1}^{j-1} \frac{\left\| a - a_k \right\|}{n} < \epsilon \,, \qquad \forall\, n \geq n_0 \,.$$

Ne consegue che, per $\forall\, n \geq n_0$,

$$\left\| a - \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \right\| < \epsilon + \epsilon \frac{n-j+1}{n} = \epsilon \frac{2n-j+1}{n} < 2\epsilon \,,$$

da cui il limite richiesto.

Esercizio 2 (punteggio 2.5/30)

Si verifichi l'identità formale

$$m\, x^n \delta\left(x^m - 1\right) = \begin{cases} \delta(x-1) + (-1)^n \delta(x+1) & m \text{ pari} \\ \delta(x-1) & m \text{ dispari} \end{cases} \,.$$

per funzioni di prova definite in $\mathbb{R}$, con $m, n \in \mathbb{N}$.

Soluzione 2

Data la funzione di prova $g(x)$ si ha

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,x^n\,\delta(x^m-1)\,dx = \sum_{k=1}^{m'} \frac{g(x_k)\,x_k^n}{m\,|x_k|^{m-1}}\,.$$

La somma è fatta solo sugli zeri reali dell'argomento della delta di Dirac. Si hanno due casi: se m è pari ci sono due zeri reali $x=\pm 1$, se invece m è dispari c'è un unico zero in $x=1$. Quindi

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,x^n\,\delta(x^m-1)\,dx = \begin{cases} \dfrac{g(1)}{m} + (-1)^n \dfrac{g(-1)}{m} & m \text{ pari} \\[2ex] \dfrac{g(1)}{m} & m \text{ dispari} \end{cases}\,,$$

da cui l'identità cercata

$$m\,x^n\,\delta(x^m-1)\,dx = \begin{cases} \delta(x-1) + (-1)^n \delta(x+1) & m \text{ pari} \\[2ex] \delta(x-1) & m \text{ dispari} \end{cases}\,.$$

Esercizio 3 (punteggio 3.5/30)

Sia $\hat{H}$ un operatore hermitiano con spettro discreto e definito in uno spazio di Hilbert a dimensione finita E_N, si dimostri:

- che vale la relazione
$$\left\|\hat{H}+i\hat{I}\right\|^2 = \left\|\hat{H}\right\|^2 + 1\,,$$
dove $\hat{I}$ è l'operatore identità di E;
- che l'operatore $\hat{O} = \hat{H} + i\hat{I}$ è invertibile;
- che l'operatore $\hat{U} = \left(\hat{H} - i\hat{I}\right)\left(\hat{H}+i\hat{I}\right)^{-1}$ è unitario.

Soluzione 3

Applicando la definizione di norma per un operatore

$$\begin{aligned}\left\|\hat{H}+i\hat{I}\right\|^2 = \sup_{\|u\|=1}\left\{\left\|\left(\hat{H}+i\hat{I}\right)|u\rangle\right\|^2\right\} &= \sup_{\|u\|=1}\left\{\langle u|\left(\hat{H}-i\hat{I}\right)\left(\hat{H}+i\hat{I}\right)|u\rangle\right\} \\ &= \sup_{\|u\|=1}\left\{\langle u|\left(\hat{H}^2+\hat{I}\right)|u\rangle\right\} \\ &= \sup_{\|u\|=1}\left\{\left\|\hat{H}|u\rangle\right\|^2\right\} + 1 \\ &= \left\|\hat{H}\right\|^2 + 1\,.\end{aligned}$$

Detto $\{\lambda_k\}_{k=1}^N \subset \mathbb{R}$ l'insieme degli autovalori di $\hat{H}$, per il teorema spettrale si ha che l'insieme degli autovalori di $\hat{O}$ è $\{\omega_k = \lambda_k + i\}_{k=1}^N \subset \mathbb{C}$. In particolare, poiché $|\omega_k|^2 = \lambda_k^2 + 1$, l'operatore $\hat{O}$ non ha l'autovalore nullo, $\omega_k \neq 0$ $\forall\, k \in \{1, 2, \ldots, N\}$, è quindi invertibile.

Gli autovalori dell'operatore $\hat{U}$ sono $\{\mu_k = (\lambda_k - i)(\lambda_k + i)^{-1}\}_{k=1}^N \subset \mathbb{C}$ ed è facile vedere che si tratta di fasi pure, infatti

$$|\mu_k| = \left|\frac{\lambda_k - i}{\lambda_k + i}\right| = \frac{|\lambda_k - i|}{|\lambda_k + i|} = 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mu_k = e^{i\alpha_k}\,, \quad \alpha_k \in \mathbb{R}\,, \quad \forall\, k \in \{1, 2, \ldots, N\}\,.$$

L'operatore è normale essendo hermitiano, è quindi diagonalizzabile e, indicando con O_d la sua rappresentazione rispetto ad una base ortonormale di suoi autovettori, si ha

$$O_d = \operatorname{diag}(e^{i\alpha_1}, e^{i\alpha_2}, \ldots, e^{i\alpha_N})\,,$$

da cui, la rappresentazione del coniugato hermitiano

$$O_d^\dagger = O_d^{*T} = \operatorname{diag}(e^{-i\alpha_1}, e^{-i\alpha_2}, \ldots, e^{-i\alpha_N})\,.$$

Si ottiene infine che la relazione matriciale $O_d O_d^\dagger = O_d^\dagger O_d = I$, implica quella operatoriale

$$\hat{O}\hat{O}^\dagger = \hat{O}^\dagger\hat{O} = \hat{I}\,,$$

che è la definzione di operatore unitario.

Esercizio 4 (punteggio 2.5/30)

Risolvendo l'equazione di Fredholm

$$f(x) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} K(x,y) f(y) dy\,,$$

si determinino gli autovalori e le autofunzioni dell'operatore integrale di kernel

$$K(x,y) = \cos(x+y) + \operatorname{sen}(x+y)\,.$$

Soluzione 4

L'equazione ha il kernel separabile

$$K(x,y) = M_1(x)N_1(y) + M_2(x)N_2(y)\,,$$

con

$$\begin{array}{ll} M_1(x) = \operatorname{sen}(x) & N_1(x) = \cos(x) - \operatorname{sen}(x) \\ M_2(x) = \cos(x) & N_2(x) = \cos(x) + \operatorname{sen}(x) \end{array}\,.$$

Moltiplicando ambo i membri dell'equazione per $N_j(x)$ ed integrando si ottiene un sistema lineare, infatti

$$\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} N_j(x) f(x) dx}_{C_j} = \lambda \sum_{k=1}^{2} \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} N_j(x) M_k(x) dx}_{K_{jk}} \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} N_k(y) f(y) dy}_{C_k}$$

$$C_j = \lambda \sum_{k=1}^{2} K_{jk} C_k\,, \qquad j = 1, 2\,.$$

La matrice dei coefficienti K è

$$K = \begin{pmatrix} -\pi & \pi \\ \pi & \pi \end{pmatrix}\,.$$

Gli autovalori inversi si ottengono come soluzione dell'equazione secolare $\det(I-\lambda K)=0$ e sono

$$\lambda_{1,2}=\pm\frac{1}{\pi\sqrt{2}}\,.$$

Ad essi corrispondono gli autovettori

$$C^{1,2}=\left(\begin{array}{c} C_1^{1,2} \\ C_2^{1,2} \end{array}\right)=\frac{1}{\sqrt{2(2\pm\sqrt{2})}}\left(\begin{array}{c} 1 \\ 1\pm\sqrt{2} \end{array}\right).$$

Le due autofunzioni, definite a meno di un fattore arbitario, sono

$$f_{1,2}(x)=\lambda_{1,2}\sum_{k=1}^{2}C_k^{1,2}M_k(x)=\pm\frac{1}{\pi\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2(2\pm\sqrt{2})}}\left[M_1(x)+\left(1\pm\sqrt{2}\right)M_2(x)\right]$$

$$f_{1,2}(x)=\pm\frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{2\pm\sqrt{2}}}\left[\mathrm{sen}(x)+\left(1\pm\sqrt{2}\right)\cos(x)\right].$$

Esercizio 5 (punteggio 3.5/30)

Si risolva l'equazione differenziale

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}-\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=f(x,t),$$

dove $f(x,t)\in L(\mathbb{R}^2)$, con il metodo della funzione di Green.

Suggerimento. La trasformata di Fourier di una funzione di n variabili $F(x_1,x_2,\dots,x_n)\in L(\mathbb{R}^n)$ è

$$\tilde{F}(k_1,k_2,\dots,k_n)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx_1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx_2}{\sqrt{2\pi}}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx_n}{\sqrt{2\pi}}F(x_1,x_2,\dots,x_n)e^{-i\left(k_1x_1+k_2x_2+\dots+k_nx_n\right)}.$$

Soluzione 5

Cerchiamo la funzione di Green, $G(x,t)$, come soluzione dell'equazione impulsiva

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}-\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=\delta(x)\delta(t).$$

La trasformata di Fourier di tale equazione è

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{\partial^2 G(x,t)}{\partial x^2}-\frac{\partial G(x,t)}{\partial t}\right]e^{-i(kx+\omega t)}=\frac{1}{2\pi}.$$

Le trasformate dei due termini a primo membro sono

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{\sqrt{2\pi}}\frac{\partial^2 G(x,t)}{\partial x^2}e^{-i(kx+\omega t)}=(ik)^2\,\tilde{G}(k,\omega);$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{\sqrt{2\pi}}\frac{\partial G(x,t)}{\partial t}e^{-i(kx+\omega t)}=(i\omega)\,\tilde{G}(k,\omega),$$

quindi l'equazione diventa

$$\left(-k^2-i\omega\right)\tilde{G}(k,\omega)=\frac{1}{2\pi}\qquad\Rightarrow\qquad\tilde{G}(k,\omega)=\frac{i}{2\pi}\frac{1}{\omega-ik^2}.$$

La funzione di Green è data dall'antitrasformata di Fourier

$$G(x-x',t-t') = \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{i\left[k(x-x')+\omega(t-t')\right]}}{\omega-ik^2}$$
$$= \frac{i}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}dk e^{ik(x-x')}\int_{-\infty}^{\infty}d\omega\frac{e^{i\omega(t-t')}}{\omega-ik^2} = \frac{i}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}dk e^{ik(x-x')}2i\pi\theta(t-t')e^{-k^2(t-t')}$$
$$= -\frac{\theta(t-t')}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dk\, e^{ik(x-x')-k^2(t-t')} = -\frac{\theta(t-t')}{\pi}\frac{e^{-\frac{(x-x')^2}{4(t-t')}}}{2\sqrt{t-t'}}\int_{-\infty}^{\infty}dk\sqrt{t-t'}\,e^{-\left(k\sqrt{t-t'}-i\frac{x-x'}{2\sqrt{t-t'}}\right)^2}$$
$$= -\frac{\theta(t-t')}{\sqrt{\pi}}\frac{e^{-\frac{(x-x')^2}{4(t-t')}}}{2\sqrt{t-t'}}\,.$$

La soluzione generica dell'equazione si ottiene come convoluzione della funzione di Green e della funzione di input $f(x,t)$, ovvero

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty}dx'\int_{-\infty}^{\infty}dt' G(x-x',t-t')f(x',t') = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}dx'\int_{t}^{\infty}dt'\frac{e^{-\frac{(x-x')^2}{4(t-t')}}}{2\sqrt{t-t'}}f(x',t')\,.$$

Esercizio 6 (punteggio 4/30)

L'operatore $\hat{S}$ è definito nello spazio di Hilbert E_4 come

$$\begin{aligned}\hat{S}|e_1\rangle &= |e_1\rangle + |e_3\rangle\,,\\ \hat{S}|e_2\rangle &= |e_1\rangle + |e_2\rangle + |e_4\rangle\,,\\ \hat{S}|e_3\rangle &= |e_1\rangle + |e_3\rangle\,,\\ \hat{S}|e_4\rangle &= -|e_2\rangle + |e_3\rangle + |e_4\rangle\,,\end{aligned}$$

dove $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^4$ è una base ortonormale di E_4.
Si determinino:

- la matrice S che rappresenta l'operatore rispetto alla base data;
- autovalori e autovettori di $\hat{S}$.

Inoltre si dimostri che l'operatore è diagonalizzabile e che vale l'identità

$$\frac{d}{dx}\det\left(e^{x\hat{S}}\right)\Big|_{x=0} = 4\,.$$

Soluzione 6

La base è ortonormale, quindi gli elementi della matrice S si ottengono come

$$S^k_m = \langle e_k|\hat{S}|e_m\rangle\,, \qquad k,m\in\{1,2,3,4\}\,,$$

sfruttando le azioni note dell'operatore sui vettori della base si ha

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\,.$$

Dall'equazione secolare

$$0 = \det(S - \lambda I) = (\lambda - 1)^4 - 1\,,$$

si ottengono gli autovalori $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 = 1 - i$, $\lambda_2 = 1 + i$, $\lambda_3 = 2$, con autovettori

$$u_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad u_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ i \end{pmatrix}, \qquad u_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -i \end{pmatrix}, \qquad u_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Gli autovettori sono linearmente indipendenti quindi l'operatore è diagonalizzabile, per cui vale il teorema spettrale e la decomposizioni

$$\hat{S} = \sum_{k=0}^{3} \lambda_k\, \hat{P}_k\,, \qquad \hat{F}(\hat{S}) = \sum_{k=0}^{3} F(\lambda_k)\, \hat{P}_k\,,$$

dove $\{\hat{P}_k\}_{k=0}^{3}$ è un insieme di quattro proiettori ortogonali ed $F(y)$ è una funzione sviluppabile in serie di Taylor intorno a ciascun autovalore λ_k, $k = 0, 1, 2, 3$. Nel caso in esame si ha $F(y) = e^{x\,y}$, quindi l'operatore esponenziale può essere decomposto come

$$e^{x\,\hat{S}} = \sum_{k=0}^{3} e^{x\lambda_k}\, \hat{P}_k\,.$$

Tale operatore ha gli stessi autovettori di $\hat{S}$ con autovalori $e^{x\lambda_k}$, $k = 0, 1, 2, 3$. Ne consegue che il determinante, ovvero il prodotto degli autovalori, è

$$\det\left(e^{x\,\hat{S}}\right) = \det\left(\sum_{k=0}^{3} e^{x\lambda_k}\, \hat{P}_k\right) = e^{x\left(\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3\right)}.$$

La cui derivata in $x = 0$ è la somma degli autovalori, cioè la traccia, si ha

$$\frac{d}{dx}\det\left(e^{x\,\hat{S}}\right) = \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 4\,.$$