Metodi Matematici per la Fisica

Prova scritta del 4 febbraio 2022

Si risolvano cortesemente i seguenti problemi, sapendo che il punteggio assegnato a ciascuna procedura di risoluzione può variare tra lo zero e il massimo indicato ed è stabilito valutando:

1. la correttezza del risultato ottenuto e della procedura utilizzata;
2. la completezza dei passaggi riportati;
3. il livello di esemplificazione con cui sono espressi i risultati (ad esempio un risultato numerico reale non deve contenere l'unità immaginaria);
4. la correttezza del formalismo utilizzato;
5. la chiarezza dell'esposizione e la leggibilità del testo.

Primo problema (punteggio massimo: 6/30)

Si ottenga, in funzione di $n \in \mathbb{N}$, il valore dell'integrale

$$P_n = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^n(u)}{u^n} du \,.$$

Soluzione del primo problema

L'origine rappresenta una singolarità eliminabile per la funzione integranda, infatti

$$\lim_{u\to 0} \frac{\operatorname{sen}^n(u)}{u^n} = \lim_{u\to 0} \frac{1}{u^n} \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{u^{2k+1}}{(2k+1)!} \right)^n = \lim_{u\to 0} \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{u^{2k}}{(2k+1)!} \right)^n = \lim_{u\to 0} \left(1 - \frac{u^2}{3!} + \frac{u^4}{5!} + \mathcal{O}\left(u^6\right) \right)^n ,$$

da cui si ha che, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, il limite è unitario,

$$\lim_{u\to 0} \frac{\operatorname{sen}^n(u)}{u^n} = 1 \,.$$

Possiamo deformare il percorso d'integrazione, passando dall'asse reale a

$$\Gamma_\epsilon = (-\infty, -\epsilon] \cup \left(- \left\{ z : z = \epsilon e^{i\theta}, \theta \in [0, \pi] \right\} \right) \cup [\epsilon, \infty) \,,$$

dove la semicirconferenza di raggio ϵ, che aggira l'origine, appartiene al semipiano delle parti immaginarie positive ed è orientata in senso negativo, ovvero orario, da cui il segno meno. Come già ribadito, il fatto che l'origine rappresenti una singolarità eliminabile per la funzione integranda, fa sì che la deformazione del percorso d'integrazione lasci inalterato il valore dell'integrale, ovvero

$$P_n = \int_{\Gamma_\epsilon} \frac{\operatorname{sen}^n(z)}{z^n} dz \,,$$

$\forall\, \epsilon > 0$, ne consegue che l'identità vale anche nel limite di raggio infinitesimo, cioè

$$P_n = \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{\Gamma_\epsilon} \frac{\operatorname{sen}^n(z)}{z^n} dz \,.$$

Usando la formula di Eulero per la funzione seno si ha

$$P_n = \lim_{\epsilon\to 0^+} \frac{1}{(2i)^n} \int_{\Gamma_\epsilon} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} e^{izk} e^{-iz(n-k)} \frac{dz}{z^n} = \frac{1}{(2i)^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{\Gamma_\epsilon} \frac{e^{iz(2k-n)}}{z^n} dz \,.$$

Gli integrali così ottenuti possono essere calcolati usando il lemma di Jordan e poiché la funzione integranda ha solo una singolarità nell'origine che rappresenta un polo di ordine $n \in \mathbb{N}$, si ha che il limite del k-esimo integrale vale

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{\Gamma_\epsilon} \frac{e^{iz(2k-n)}}{z^n} dz = \begin{cases} 0 & 2k-n \geq 0 \\ -2i\pi \operatorname{Res}\left[\dfrac{e^{iz(2k-n)}}{z^n}, 0\right] & 2k-n<0 \Rightarrow k<n/2 \Rightarrow k \leq \mathrm{Int}[n/2] \end{cases} .$$

I residui si ottengono come coefficienti della potenza z^{-1} della serie di Laurent centrata nell'origine, si ha

$$\frac{e^{iz(2k-n)}}{z^n} = \frac{1}{z^n}\sum_{j=0}^{\infty} \frac{[iz(2k-n)]^j}{j!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{[i(2k-n)]^j\, z^{j-n}}{j!} = \cdots + \frac{[i(2k-n)]^{n-1}}{(n-1)!} z^{-1} + \cdots ,$$

da cui

$$\operatorname{Res}\left[\frac{e^{iz(2k-n)}}{z^n}, 0\right] = \frac{[i(2k-n)]^{n-1}}{(n-1)!} .$$

Ne consegue che per il limite del k-esimo integrale si ha

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{\Gamma_\epsilon} \frac{e^{iz(2k-n)}}{z^n} dz = \begin{cases} 0 & 2k-n \geq 0 \\ -2\pi \dfrac{i^n(2k-n)^{n-1}}{(n-1)!} & k \leq \mathrm{Int}[n/2] \end{cases} .$$

Infine, l'integrale completo

$$\begin{aligned} P_n = \frac{1}{(2i)^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{\Gamma_\epsilon} \frac{e^{iz(2k-n)}}{z^n} dz &= -\frac{2\pi}{(2i)^n} \sum_{k=0}^{\mathrm{Int}[n/2]} (-1)^{n-k} \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{i^n (2k-n)^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= (-1)^{n+1} \frac{n\pi}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{\mathrm{Int}[n/2]} (-1)^k \frac{(2k-n)^{n-1}}{k!(n-k)!} , \end{aligned}$$

che, cambiando segno nel binomio a numeratore del termine della somma, mettendo quindi in evidenza l'ulteriore fattore $(-1)^{n-1}$, diventa

$$P_n = \frac{n\pi}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{\mathrm{Int}[n/2]} (-1)^k \frac{(n-2k)^{n-1}}{k!(n-k)!} .$$

Secondo problema (punteggio massimo: 6/30)

Si calcoli l'integrale in valore principale

$$B = \mathrm{Pr} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\mathrm{senh}(x)+3} .$$

Soluzione del secondo problema

La funzione integranda è meromorfa in quanto rapporto di funzioni intere. Avendo un'infinità di poli, questi debbono necessariamente accumularsi all'infinito. I poli coincidono con gli zeri della funzione a denominatore e si ottengono come soluzioni dell'equazione $\mathrm{senh}(x)+3=0$. Indicando con $\{z_k^+, z_k^-\}_{k\in\mathbb{Z}}$ l'insieme di questi poli, si ha

$$\begin{gathered} \mathrm{senh}(x)+3=0 \\ e^{2x}+6e^x-1=0 , \end{gathered}$$

da cui

$$w_\pm = e^{z_k^\pm} = -3 \pm \sqrt{10} \quad \Rightarrow \quad z_k^\pm = \ln\left(-3\pm\sqrt{10}\right) + 2ik\pi , \qquad k\in\mathbb{Z} .$$

Uno solo dei poli appartiene all'asse reale, è quindi rispetto ad esso che va considerato il valore principale.
Usando la formula di Eulero per la funzione seno iperbolico e facendo la sostituzione $w = e^x$, l'integrale assume la forma

$$B = \Pr \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\operatorname{senh}(x)+3} = 2\Pr \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x\, dx}{e^{2x}+6e^x-1} = 2\Pr \int_0^{\infty} \frac{dw}{w^2+6w-1}\,,$$

si può arrivare a una ulteriore semplificazione sfruttando la somma di Mittag-Leffler per la funzione integranda, cioè

$$B = 2\Pr \int_0^{\infty} \frac{dw}{w^2+6w-1} = 2\Pr \int_0^{\infty} \frac{dw}{(w-w_+)(w-w_-)} = \frac{2}{w_+-w_-}\left(\Pr \int_0^{\infty} \frac{dw}{w-w_+} - \int_0^{\infty} \frac{dw}{w-w_-}\right),$$

il valore principale rimane solo nel primo degli integrali all'ultimo membro, poiché il polo $w_- = -3-\sqrt{10}$, essendo un numero reale strettamente negativo, non appartiene al percorso d'integrazione nella variabile w, ovvero il semiasse reale positivo.
Applicando la definizione di valore principale e integrando otteniamo

$$\begin{aligned}
B &= \frac{1}{\sqrt{10}}\left(\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_0^{w_+-\epsilon}\frac{dw}{w-w_+} + \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{w_++\epsilon}^{\infty}\frac{dw}{w-w_+} + \int_0^{\infty}\frac{dw}{w-w_-}\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{10}}\left(\lim_{\epsilon\to 0^+}\ln(w-w_+)\Big|_{w_+-\epsilon}^{w_++\epsilon} + \ln\left(\frac{w-w_+}{w-w_-}\right)\Big|_0^{\infty}\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{10}}\left(\ln(-1) - \ln\left(\frac{w_+}{w_-}\right)\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{10}}\ln\left(-\frac{w_-}{w_+}\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{10}}\ln\left(\frac{3+\sqrt{10}}{-3+\sqrt{10}}\right),
\end{aligned}$$

infine, moltiplicando il numeratore e il denominatore dell'argomento del logaritmo per $\left(3+\sqrt{10}\right)$, si ha il risultato

$$B = \frac{2}{\sqrt{10}}\ln\left(3+\sqrt{10}\right).$$

Terzo problema (punteggio massimo: 6/30)

Si ottenga l'espansione di Mittag-Leffler della funzione

$$\psi(z) = \frac{1}{2^z+1}\,.$$

Soluzione del terzo problema

La funzione $\psi(z)$ è meromorfa in quanto rapporto di funzioni intere. Ha infiniti poli in corrispondenza degli zeri della funzione periodica che ne rappresenta il denominatore. Gli zeri si ottengono quindi come soluzioni dell'equazione

$$2^z + 1 = 0\,,$$

che, rispetto alla funzione 2^z, ha soluzione

$$2^z = -1 \quad\Rightarrow\quad 2^{z_k} = e^{z_k \ln(2)} = e^{(2k+1)i\pi} \quad\Rightarrow\quad z_k = \frac{(2k+1)i\pi}{\ln(2)}\,,\qquad \forall\, k\in\mathbb{Z}\,.$$

I punti dell'insieme $\{z_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ sono poli semplici della funzione $\psi(z)$, come si evince dal calcolo dei residui

$$R_k = \operatorname{Res}\left[\psi(z), z_k\right] = \lim_{z\to z_k}\frac{z-z_k}{2^z+1} = \lim_{z\to z_k}\frac{1}{\ln(2)\,2^z} = \frac{1}{\ln(2)\,2^{z_k^{\pm}}} = -\frac{1}{\ln(2)}\,,$$

i cui valori non dipendono da k, indichiamo con R il loro valore comune, cioè $R = -1/\ln(2)$.
L'espansione di Mittag-Leffler ha la forma

$$\psi(z) = \phi(z) + \sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{R}{z-z_k}\,,$$

dove la funzione $\phi(z)$ rappresenta la parte intera della funzione $\psi(z)$ ed ha lo stesso comportamento asintotico, ovvero

$$\lim_{z\to\infty} \phi(z) = \lim_{z\to\infty} \psi(z).$$

$$|\psi(z)| = \frac{1}{|2^z+1|} = \frac{1}{|e^{z\ln(2)}+1|} \le \frac{1}{||e^{z\ln(2)}|-1|} = \frac{1}{|e^{x\ln(2)}-1|},$$

dove $x = \mathrm{Re}(z)$. Consideriamo i tre casi possibili che si hanno nel limite $z \to \infty$:

1. $x = 0$ quando z diverge lungo l'asse immaginario sia positivo che negativo evitando i poli dell'insieme $\{z_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$, ad esempio sui punti della successione dei valori medi $\{w_k = (z_{k-1}+z_k)/2 = 2ki\pi/\ln(2)\}_{k\in\mathbb{Z}}$;
2. $x \to \infty$, quando z diverge nel semipiano delle parti reali positive, con: $-\pi/2 < \arg(z) < \pi/2$;
3. $x \to -\infty$, quando, infine, z diverge nel semipiano delle parti reali negative, con $\pi/2 < \arg(z) < 3\pi/2$.

I valori limite del modulo della funzione $\psi(z)$ nei tre casi precedenti sono così vincolati:

1. $\displaystyle\lim_{k\to\pm\infty} |\psi(w_k)| = \lim_{k\to\pm\infty} \frac{1}{|e^{w_k\ln(2)}+1|} = \lim_{k\to\pm\infty} \frac{1}{|e^{w_k\ln(2)}+1|} = \lim_{k\to\pm\infty} \frac{1}{|e^{2ki\pi}+1|} = \frac{1}{2}$;
2. $\displaystyle\lim_{z\to\infty} |\psi(z)| \le \lim_{x\to\infty} \frac{1}{|e^{x\ln(2)}-1|} = 0$;
3. $\displaystyle\lim_{z\to\infty} |\psi(z)| \le \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{|e^{x\ln(2)}-1|} = 1$.

Ne consegue che la funzione $\psi(z)$ è regolare all'infinito e quindi la sua parte intera è costante, ne indichiamo il valore con il simbolo ϕ_0. Tale valore può essere calcolato valutando la funzione e la sua espansione di Mittag-Leffler nell'origine, si ha

$$\psi(0) = \frac{1}{2} = \phi_0 - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{R}{z_k} \qquad \Rightarrow \qquad \phi_0 = \frac{1}{2} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{R}{z_k}.$$

In forma esplicita, ovvero usando le espressioni ottenute per i poli e il residuo,

$$\begin{aligned}
\psi(z) &= \frac{1}{2} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} R\left(\frac{1}{z-z_k} + \frac{1}{z_k}\right) \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{\ln(2)} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{z-(2k+1)i\pi/\ln(2)} + \frac{1}{(2k+1)i\pi/\ln(2)}\right) \\
&= \frac{1}{2} - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{z\ln(2)-(2k+1)i\pi} + \frac{1}{(2k+1)i\pi}\right).
\end{aligned}$$

Possiamo suddividere la serie in due, separando i multipli dispari positivi e negativi di $i\pi$ presenti a denominatore dei due termini della serie. Nel caso del secondo termine si ha una cancellazione, infatti

$$\begin{aligned}
\psi(z) &= \frac{1}{2} - \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z\ln(2)-(2k+1)i\pi} + \frac{1}{(2k+1)i\pi}\right) + \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z\ln(2)+(2k+1)i\pi} + \frac{1}{-(2k+1)i\pi}\right) \\
&= \frac{1}{2} - \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z\ln(2)-(2k+1)i\pi} + \frac{1}{z\ln(2)+(2k+1)i\pi}\right),
\end{aligned}$$

da cui il risultato finale

$$\psi(z) = \frac{1}{2} - 2\ln(2) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z}{z^2\ln^2(2) + (2k+1)^2\pi^2}.$$

Quarto problema (punteggio massimo: 6/30)

Facendo uso di una delle tesi del teorema di Michel Plancherel, che si assume valido sia per la funzione coseno, che per la distribuzione normale o di Gauss, si dimostri l'identità

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos^n(x) e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2^n} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} e^{-(2j-n)^2/4}, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Soluzione del quarto problema

La tesi del teorema di Michel Plancherel che può utilizzata è quella che definisce una versione per funzioni a quadrato sommabili in $\mathbb{R}$ dell'equazione di Parseval generalizzata, ovvero: $\forall\, f(x), g(x) \in L^2(\mathbb{R})$,

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x) g(x) dx = (\tilde{f}, \tilde{g}) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}^*(k) \tilde{g}(k) dk,$$

dove le funzioni $\tilde{f}(k)$ e $\tilde{g}(k)$ sono le trasformate di Fourier delle funzioni $f(x)$ e $g(x)$.
Nel caso in esame, le funzioni sono la potenza n-esima della funzione coseno e la distribuzione di Gauss. La trasformata di Fourier della prima, per la quale, pur non essendo a quadrato sommabile, si assume valido, come richiesto dal problema, il teorema di Plancherel, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, si ha

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}_k[\cos^n(x)] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \cos^n(x) e^{-ikx} dx \\
&= \frac{1}{2^n \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{ix} + e^{-ix}\right)^n e^{-ikx} dx \\
&= \frac{1}{2^n \sqrt{2\pi}} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixj} e^{-ix(n-j)} e^{-ikx} dx \\
&= \frac{1}{2^n \sqrt{2\pi}} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix(2j-n-k)} dx \\
&= \frac{\sqrt{2\pi}}{2^n} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \delta(2j-n-k),
\end{aligned}$$

dove sono state usate la formula di Eulero per la funzione coseno e la rappresentazione integrale della distribuzione delta di Dirac.
La trasformata di Fourier della distribuzione di Gauss è nota e vale

$$\mathscr{F}_k\left[e^{-x^2}\right] = \frac{e^{-k^2/4}}{\sqrt{2}}.$$

Usando l'identità tra i prodotti scalari delle funzioni e delle loro trasformate di Fourier si ha

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \cos^n(x) e^{-x^2} dx &= \left(\cos^n(x), e^{-x^2}\right) = \left(\mathscr{F}_k[\cos^n(x)], \mathscr{F}_k\left[e^{-x^2}\right]\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{2\pi}}{2^n} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \delta(2j-n-k) \frac{e^{-k^2/4}}{\sqrt{2}} dk \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{2^n} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(2j-n-k) e^{-k^2/4} dk,
\end{aligned}$$

sfruttando, infine, la distribuzione delta di Dirac, si ottiene l'identità cercata

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos^n(x) e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2^n} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} e^{-(2j-n)^2/4}.$$

Quinto problema (punteggio massimo: 6/30)

Nello spazio vettoriale $L^2(-\pi, \pi)$, delle funzioni a quadrato sommabili nell'intervallo $[-\pi, \pi]$, è definito l'operatore integrale $\hat{G}$, la cui azione è determinata dell'identità

$$\hat{G} f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^3(x-y) f(y) dy \,,$$

$\forall f(x) \in L^2(-\pi, \pi)$.
Si ottengano lo spettro discreto e la norma dell'operatore $\hat{G}$.
Suggerimento. Potrebbe essere di auto l'utilizzo del sistema delle fasi $\left\{e^{ikx}/\sqrt{2\pi}\right\}_{k\in\mathbb{Z}} \subset L^2(-\pi, \pi)$, completo nello stesso spazio vettoriale.

Soluzione del quinto problema

Consideriamo, come suggerito, il sistema delle fasi $\left\{e^{ikx}/\sqrt{2\pi}\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$, completo e ortonormale nello spazio vettoriale $L^2(-\pi, \pi)$, ovvero si ha

$$\left(\frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}, \frac{e^{imx}}{\sqrt{2\pi}}, \right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ix(m-k)} dx = \delta^k_m \,, \qquad \forall\, k, m \in \mathbb{Z} \,.$$

Rispetto al tale sistema, l'operatore $\hat{G}$ è rappresentato dalla matrice G infinito-dimensionale, i cui elementi si ottengono dai prodotti scalari

$$\begin{aligned} G^k_m &= \left(\frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}, \hat{G} \frac{e^{imx}}{\sqrt{2\pi}} \right) \\ &= \frac{1}{16\pi} \sum_{n=0}^{3} \binom{3}{n} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(x-y)n} e^{-i(x-y)(3-n)} e^{imy} e^{-ikx} dx dy \\ &= \frac{1}{16\pi} \sum_{n=0}^{3} \binom{3}{n} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ix(2n-3-k)} dx \int_{-\pi}^{\pi} e^{iy(-2n+3+m)} dy \\ &= \frac{\pi}{4} \sum_{n=0}^{3} \binom{3}{n} \delta_{k,2n-3} \delta_{m,2n-3} \,, \qquad \forall\, k, m \in \mathbb{Z} \,. \end{aligned}$$

Si evince facilmente che tutti gli elementi con indici: k o $m > 3$ e k o $m < -3$ sono nulli. In particolare, l'unico blocco della matrice G che non sia identicamente nullo è $G_{(-3,3)\times(-3,3)}$. Ha dimensione 7×7 e solo quattro elementi, uno per ciascun valore di $n \in \{0, 1, 2, 3\}$, diversi da zero, sono, inoltre tutti disposti lungo la diagonale. Per $n = 0$, l'elemento non nullo è quello con $(k = 2n-3 = -3, m = 2n-3 = -3)$, cioè $G^{-3}_{-3} = \pi/4$; con $n = 1$ è non nullo solo l'elemento $G^{-1}_{-1} = 3\pi/4$; con $n = 2$ è non nullo solo l'elemento $G^1_1 = 3\pi/4$; con $n = 3$ è non nullo solo l'elemento $G^3_3 = \pi/4$. Da cui l'espressione esplicita del blocco è

$$G_{(-3,3)\times(-3,3)} = \begin{pmatrix} G^{-3}_{-3} & G^{-3}_{-2} & G^{-3}_{-1} & G^{-3}_{0} & G^{-3}_{1} & G^{-3}_{2} & G^{-3}_{3} \\ G^{-2}_{-3} & G^{-2}_{-2} & G^{-2}_{-1} & G^{-2}_{0} & G^{-2}_{1} & G^{-2}_{2} & G^{-2}_{3} \\ G^{-1}_{-3} & G^{-1}_{-2} & G^{-1}_{-1} & G^{-1}_{0} & G^{-1}_{1} & G^{-1}_{2} & G^{-1}_{3} \\ G^{0}_{-3} & G^{0}_{-2} & G^{0}_{-1} & G^{0}_{0} & G^{0}_{1} & G^{0}_{2} & G^{0}_{3} \\ G^{1}_{-3} & G^{1}_{-2} & G^{1}_{-1} & G^{1}_{0} & G^{1}_{1} & G^{1}_{2} & G^{1}_{3} \\ G^{2}_{-3} & G^{2}_{-2} & G^{2}_{-1} & G^{2}_{0} & G^{2}_{1} & G^{2}_{2} & G^{2}_{3} \\ G^{3}_{-3} & G^{3}_{-2} & G^{3}_{-1} & G^{3}_{0} & G^{3}_{1} & G^{3}_{2} & G^{3}_{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3\pi/4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3\pi/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \pi/4 \end{pmatrix} .$$

Come già ribadito, questo blocco, così come la matrice completa G, è diagonale, quindi lo spettro discreto dell'operatore è l'insieme degli elementi diagonali. Lo spettro discreto così ottenuto contiene l'autovalore nullo con ordine di degenerazione infinito, cioè $\gamma_k = 0$, $\forall\, k \in \mathbb{Z}\backslash\{-3, -1, 1, 3\}$, sono non nulli gli autovalori $\gamma_{-3,3} = \pi/4$ e $\gamma_{-1,1} = 3\pi/4$, entrambi con ordine di degenerazione 2. L'operatore $\hat{G}$, come si evince dalla rappresentazione diagonale e reale, è hermitiano, quindi normale, ne consegue che la norma coincide con il maggiore dei moduli degli autovalori, ovvero

$$\left\| \hat{G} \right\| = \max_{k\in\mathbb{Z}} \{|\gamma_k|\} = \frac{3\pi}{4} \,.$$

SESTO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

L'operatore hermitiano e avente traccia nulla $\hat{H}$ è definito nello spazio di Hilbert a tre dimensione E_3 dalle sue azioni sul vettore $|e_2\rangle$ della base canonica ortonormale $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^3$,

$$\hat{H}|e_2\rangle = |e_3\rangle\,, \qquad \hat{H}^2|e_2\rangle = |e_2\rangle + |e_3\rangle\,.$$

Si determinino: lo spettro discreto dell'operatore $\hat{H}$ e le rappresentazioni matriciali, rispetto alla base canonica data, dello stesso operatore e dei suoi autovettori.

SOLUZIONE DEL SESTO PROBLEMA

Poiché la base canonica $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^3$ è ortonormale, la matrice 3×3 che rappresenta l'operatore $\hat{H}$ ha elementi

$$H_k^j = \langle e_j|\hat{H}\,|e_k\rangle\,, \qquad k,j \in \{1,2,3\}\,.$$

Dalla prima delle due azioni, $\hat{H}\,|e_2\rangle = |e_3\rangle$, si ricava la seconda colonna della matrice, ovvero gli elementi

$$\begin{aligned}
H_2^1 &= \langle e_1|\hat{H}|e_2\rangle = \langle e_1|e_3\rangle = 0\,,\\
H_2^2 &= \langle e_2|\hat{H}|e_2\rangle = \langle e_2|e_3\rangle = 0\,,\\
H_2^3 &= \langle e_3|\hat{H}|e_2\rangle = \langle e_3|e_3\rangle = 1\,.
\end{aligned}$$

Dalla seconda azione, $\hat{H}^{\,2}|e_2\rangle = |e_2\rangle + |e_3\rangle$, che, sfruttando la prima, possiamo sviluppare come

$$\hat{H}^{\,2}|e_2\rangle = \hat{H}\,\underbrace{\hat{H}\,|e_2\rangle}_{} = |e_3\rangle = \hat{H}\,|e_3\rangle = |e_2\rangle + |e_3\rangle\,,$$

si ottiene la terza colonna, infatti si ha

$$\begin{aligned}
H_3^1 &= \langle e_1|\hat{H}|e_3\rangle = \langle e_1|e_2\rangle + \langle e_1|e_3\rangle = 0\,,\\
H_3^2 &= \langle e_2|\hat{H}|e_3\rangle = \langle e_2|e_2\rangle + \langle e_2|e_3\rangle = 1\,,\\
H_3^3 &= \langle e_3|\hat{H}|e_3\rangle = \langle e_3|e_2\rangle + \langle e_3|e_3\rangle = 1\,.
\end{aligned}$$

Infine, la prima colonna della matrice H si ottiene dalle condizioni di traccia nulla e hermitianità

$$\begin{aligned}
H_1^1 + H_2^2 + H_3^3 = 0 \qquad &\Rightarrow \qquad H_1^1 = -H_2^2 - H_3^3 = 0 - 1 = -1\,,\\
H = H^\dagger \qquad &\Rightarrow \qquad \begin{cases} H_1^3 = (H_1^3)^* = 0 \\ H_1^2 = (H_1^2)^* = 0 \end{cases}\,.
\end{aligned}$$

In definitiva

$$\hat{H} \overset{e}{\hookleftarrow} H = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lo spettro discreto, ovvero l'insieme degli autovalori, coincide con l'insieme delle soluzioni dell'equazione secolare

$$\begin{aligned}
\det(H - I\eta) &= 0\\
\begin{pmatrix} -1-\eta & 0 & 0 \\ 0 & -\eta & 1 \\ 0 & 1 & 1-\eta \end{pmatrix} &= 0\\
(-1-\eta)[-\eta(1-\eta) - 1] &= 0\\
(-1-\eta)\big(\eta^2 - \eta - 1\big) &= 0\,,
\end{aligned}$$

le tre soluzioni, cioè i tre autovalori sono

$$\eta_1 = -1\,, \qquad \eta_{2,3} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\,.$$

I tre vettore 3×1 dell'insieme $\{h_k\}_{k=1}^{3}$, che rappresentano gli autovettori dell'operatore $\hat{H}$, hanno come componenti le soluzioni dei tre sistemi omogenei

$$\begin{pmatrix} -1-\eta_k & 0 & 0 \\ 0 & -\eta_k & 1 \\ 0 & 1 & 1-\eta_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_k^1 \\ h_k^2 \\ h_k^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad k\in\{1,2,3\}\,.$$

Per il primo di essi, quello con autovalore $\eta_1=-1$, si ha

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1^1 \\ h_1^2 \\ h_1^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

dalla seconda e la terza equazione, rispettivamente $h_1^2+h_1^3=0$ e $h_1^2+2h_1^3=0$, si hanno $h_1^2=h_1^3=0$, quindi, il primo autovettore ha rappresentazione

$$h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Per il secondo e terzo autovettore, aventi autovalori $\eta_{2,3}=\left(1\pm\sqrt{5}\right)/2$, si hanno i sistemi

$$\begin{pmatrix} \left(-3\mp\sqrt{5}\right)/2 & 0 & 0 \\ 0 & \left(-1\mp\sqrt{5}\right)/2 & 1 \\ 0 & 1 & \left(1\mp\sqrt{5}\right)/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{2,3}^1 \\ h_{2,3}^2 \\ h_{2,3}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

dalla prima equazione si ha $h_{2,3}^1=0$. Dalla seconda equazione si ha

$$h_{2,3}^3 = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2} h_{2,3}^2\,,$$

ne conseguono, prima in funzione della seconda componente e poi normalizzate, le rappresentazioni

$$h_{2,3} = h_{2,3}^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1\pm\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad h_{2,3} = \frac{1}{\sqrt{10\pm 2\sqrt{5}}} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1\pm\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$