# METODI MATEMATICI PER LA FISICA

## PROVA SCRITTA DEL 4 FEBBRAIO 2021

Si risolvano cortesemente i seguenti problemi, sapendo che il punteggio assegnato a ciascuna procedura di risoluzione può variare tra lo zero e il massimo indicato ed è stabilito valutando:

1. la correttezza del risultato ottenuto e della procedura utilizzata;
2. la completezza dei passaggi riportati;
3. il livello di esemplificazione con cui sono espressi i risultati (ad esempio un risultato numerico reale non deve contenere l'unità immaginaria);
4. la correttezza del formalismo utilizzato;
5. la chiarezza dell'esposizione e la leggibilità del testo.

## PRIMO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

Si calcoli l'integrale in valore principale

$$I_1 = \mathrm{Pr}\oint_{|z-1|=1} \frac{\mathrm{Re}(z) - \mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z)} dz \,.$$

### SOLUZIONE DEL PRIMO PROBLEMA

Il percorso d'integrazione è la circonferenza di raggio unitario e centro in $z = 1$, passante, quindi, per l'origine. Questa circonferenza può essere parametrizzata come $\gamma(\theta) = \{z : z = 1 + e^{i\theta}, \theta \in [0, 2\pi]\}$. Si ha una singolarità dovuta all'annullamento del denominatore, non cancellato da quello del numeratore, quando $\mathrm{Re}(z) = -\mathrm{Im}(z) \neq 0$, ciò accade nel punto $z = 1-i$ che appartiene al percorso d'integrazione. Mentre l'origine rappresenta per la funzione integranda una singolarità eliminabile in quanto il denominatore e il numerare sono infinitesimi dello stesso ordine nel limite $z \to 0$. Ne consegue che il valore principale va considerato solo in corrispondenza del punto $z = 1 - i$. Al fine di poter applicare il teorema dei residui riportiamo la funzione integranda nella forma analitica nella variabile $z$. In particolare usiamo per gli operatori parte reale e parte immaginaria le definizioni

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{z + z^*}{2}\,, \qquad \mathrm{Im}(z) = \frac{z - z^*}{2i}\,,$$

e esprimiamo il complesso coniugato della variabile $z$ lungo il percorso d'integrazione in termini della stessa variabile $z$. Dalla parametrizzazione del percorso si ha che, $\forall\, z \in \gamma$,

$$z = 1 + e^{i\theta}\,, \qquad \theta \in [0, 2\pi]\,,$$

quindi

$$z^* = 1 + e^{-i\theta} = 1 + \frac{1}{e^{i\theta}}\,,$$

infine, usando per la fase l'espressione $e^{i\theta} = z - 1$ che si ottiene dalla parametrizzazione, avremo

$$z^* = 1 + \frac{1}{z-1} = \frac{z}{z-1}\,.$$

Ne consegue che le parti reale e immaginaria sono

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{z + z^*}{2} = \frac{z^2}{2(z-1)}\,, \qquad \mathrm{Im}(z) = \frac{z - z^*}{2i} = \frac{z(z-2)}{2i(z-1)} = -\frac{iz(z-2)}{2(z-1)}\,,$$

e l'integrale assume la forma

$$I_1 = \mathrm{Pr}\oint_{|z-1|=1} \frac{z^2 + iz(z-2)}{z^2 - iz(z-2)} dz = \mathrm{Pr}\oint_{|z-1|=1} \frac{z(1+i) - 2i}{z(1-i) + 2i} dz = i\,\mathrm{Pr}\oint_{|z-1|=1} \frac{z - 1 - i}{z - 1 + i} dz\,.$$

In questo modo è immediato osservare che la funzione integranda è meromorfa ha un polo semplice in $p_0 = 1 - i$ e uno zero in $z_0 = 1 + i$ entrambi appartenenti al percorso d'integrazione. Consideriamo il percorso dentato e chiuso

$$\Gamma_\epsilon = \left\{z : z = 1 + e^{i\theta}, \theta \in [-\pi/2 + \epsilon, 3\pi/2 - \epsilon]\right\} \cup \left(-\left\{z : z = 1 - i + \epsilon e^{i\theta}, \theta \in [0, \pi]\right\}\right) \equiv C_1 \cup (-c_\epsilon),$$

che non avvolge il polo semplice $p_0$, costituito dall'unione di due archi, uno, $C_1$, centrato in $z = 1$ di raggio unitario e l'altro, $c_\epsilon$, con centro in $z = 1 - i$ e raggio $\epsilon$. Calcoliamo l'integrale della funzione integranda data lungo questo percorso, usando il teorema dei residui e il lemma per l'integrazione sugli archi, si ha

$$0 = \lim_{\epsilon \to 0} i \oint_{\Gamma_\epsilon} \frac{z - 1 - i}{z - 1 + i} dz = I_1 - i \lim_{\epsilon \to 0} \oint_{c_\epsilon} \frac{z - 1 - i}{z - 1 + i} dz = I_1 - i\pi \underbrace{\lim_{\epsilon \to 0} i \frac{z - 1 - i}{z - 1 + i}\left[z - (1 - i)\right]}_{= i(-2i) = 2} = I_1 - 2i\pi.$$

Si ottiene, infine, l'integrale richiesto, risolvendo l'equazione precedente

$$I_1 = 2i\pi.$$

## Secondo problema (punteggio massimo: 6/30)

Si calcoli l'integrale

$$I_2 = \int_0^\infty \frac{dx}{1 + x^3 + x^6 + x^9}.$$

### Soluzione del secondo problema

La funzione integranda è meromorfa, in quanto rapporto di funzioni intere, ovvero di polinomi. Essa possiede 9 poli semplici in corrispondenza degli zeri del polinomio di nono grado posto a denominatore. Per ottenere le espressioni dei poli risolviamo l'equazione $1 + x^3 + x^6 + x^9 = 0$, che, rispetto alla variabile $w = x^3$, è di terzo grado, cioè $1 + w + w^2 + w^3 = 0$. È immediato osservare che $w = -1$ rappresenta uno zero, ovvero una soluzione dell'equazione, infatti, se valutiamo il polinomio in $w = -1$ si ha: $1 + (-1) + (-1)^2 + (-1)^3 = 1 - 1 + 1 - 1 = 0$. Possiamo quindi fattorizzare il binomio $(w + 1)$

$$1 + w + w^2 + w^3 = (w + 1)\left(w^2 + aw + 1\right),$$

il coefficiente $a$ si determina verificando l'identità, i coefficienti della potenza massima e minima dell'ultimo polinomio sono necessariamente unitari essendo tali quelli delle potenze massime e minime degli altri due. Sviluppando il prodotto si ha

$$1 + w + w^2 + w^3 = w^3 + w^2(1 + a) + w(1 + a) + 1,$$

da cui $a = 0$, in definitiva

$$1 + w + w^2 + w^3 = (w + 1)\left(w^2 + 1\right),$$

quindi i tre zeri del polinomi in $w$ sono: $w_0 = -1$ e $w_\pm = \pm i$. Gli zeri del polinomio in $x$, che rappresentano i poli semplici della funzione integranda sono le tre radici terze di ciascuno di questi zeri. Li indichiamo come

$$\begin{aligned} z_k &= e^{(2k+1)i\pi/3}, \qquad && k = 0, 1, 2, \\ p_j &= e^{(2j+1)i\pi/6}, \qquad && j = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \end{aligned}$$

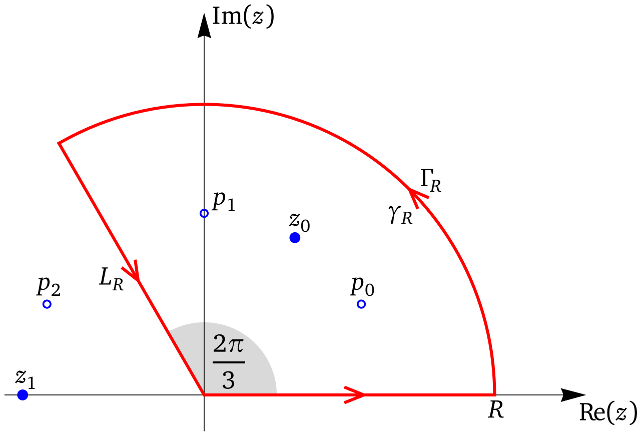
dove i poli "$z$" sono le radici di $w_0 = -1$, mentre i poli "$p$" sono le radici di $w_\pm = \pm i$. Nella figura a pagina 3 sono rappresentati, rispettivamente con cerchi e circonferenze blu, i due poli "$z$" e i tre poli "$p$" con parti immaginarie non negative.
Consideriamo il percorso di integrazione chiuso $\Gamma_R$ che rappresenta la frontiera del settore circolare del cerchio centrato nell'origine, di raggio $R$, che sottintende un angolo di $2\pi/3$ radianti, avente un raggio lungo il semi-asse reale positivo e l'altro nel secondo quadrante del piano complesso, rappresentato in rosso nella figura a pagina 3. Per valori del raggio $R$, tali che $R > 1$, il percorso $\Gamma_R$ avvolge una sola volta tre poli semplici della funzione integranda,

in particolare: $p_0 = e^{i\pi/6}$, $z_0 = e^{i\pi/3}$ e $p_1 = e^{i\pi/2}$. Ne consegue che l'integrale su tale percorso è proporzionale alla somma dei rispettivi residui, ovvero, $\forall R > 1$,

$$\oint_{\Gamma_R} \frac{dz}{1+z^3+z^6+z^9} = 2i\pi\left(\mathrm{Res}\left[\frac{dz}{1+z^3+z^6+z^9}, p_0\right] + \mathrm{Res}\left[\frac{dz}{1+z^3+z^6+z^9}, z_0\right] + \mathrm{Res}\left[\frac{dz}{1+z^3+z^6+z^9}, p_1\right]\right).$$

Considerando il percorso chiuso $\Gamma_R$ come l'unione dei due tratti rettilinei, cioè dei raggi, $[0,R]$ e $L_R$, si veda la figura, e dell'arco minore $\gamma_R$, ad essi sotteso, si ha per lo stesso integrale

$$\begin{aligned}\oint_{\Gamma_R} \frac{dz}{1+z^3+z^6+z^9} &= \int_0^R \frac{dx}{1+x^3+x^6+x^9} + \int_{L_R} \frac{dz}{1+z^3+z^6+z^9} + \int_{\gamma_R} \frac{dz}{1+z^3+z^6+z^9} \\ &= \int_0^R \frac{dx}{1+x^3+x^6+x^9} + \int_R^0 \frac{e^{2i\pi/3}dr}{1+(re^{2i\pi/3})^3+(re^{2i\pi/3})^6+(re^{2i\pi/3})^9} + \int_{\gamma_R} \frac{dz}{1+z^3+z^6+z^9} \\ &= \left(1-e^{2i\pi/3}\right)\int_0^R \frac{dx}{1+x^3+x^6+x^9} + \int_{\gamma_R} \frac{dz}{1+z^3+z^6+z^9}.\end{aligned}$$




Nel limite $R \to \infty$ il contributo sull'arco $\gamma_R$ tende a zero infatti si dimostra che, con $z \in \gamma_R$, si ha il limite uniforme

$$\lim_{R\to\infty} \frac{z}{1+z^3+z^6+z^9} \overset{\mathrm{U.}}{=} 0.$$

A tal fine, è sufficiente verificare la minorazione

$$\left|\frac{z}{1+z^3+z^6+z^9}\right| = \frac{R}{|z^3+1|\,|z^6+1|} \le \frac{R}{|R^3-1|\,|R^6-1|} \equiv \mu_R \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ne consegue che

$$\lim_{R\to\infty} \oint_{\Gamma_R} \frac{dz}{1+z^3+z^6+z^9} = \left(1-e^{2i\pi/3}\right)\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^3+x^6+x^9} = \left(1-e^{2i\pi/3}\right) I_2,$$

mentre, in termini dei residui

$$\lim_{R\to\infty} \oint_{\Gamma_R} \frac{dz}{1+z^3+z^6+z^9} = 2i\pi\left(\mathrm{Res}\left[\frac{dz}{1+z^3+z^6+z^9}, p_0\right] + \mathrm{Res}\left[\frac{dz}{1+z^3+z^6+z^9}, z_0\right] + \mathrm{Res}\left[\frac{dz}{1+z^3+z^6+z^9}, p_1\right]\right),$$

da cui si ottiene l'espressione per l'integrale cercato

$$I_2 = \frac{2i\pi}{1-e^{2i\pi/3}}\left(\mathrm{Res}\left[\frac{dz}{1+z^3+z^6+z^9}, p_0\right] + \mathrm{Res}\left[\frac{dz}{1+z^3+z^6+z^9}, z_0\right] + \mathrm{Res}\left[\frac{dz}{1+z^3+z^6+z^9}, p_1\right]\right).$$

I residui dei tre poli semplici sono

$$\mathrm{Res}\left[\frac{dz}{1+z^3+z^6+z^9}, p_0\right] = \lim_{z\to p_0}\frac{z-p_0}{(z^3+1)(z^6+1)} = \frac{1}{6p_0^5\left(p_0^3+1\right)} = \frac{e^{-5i\pi/6}}{6\left(e^{i\pi/2}+1\right)} = -\frac{\sqrt{3}+i}{12(1+i)} = -\frac{1+\sqrt{3}+i\left(1-\sqrt{3}\right)}{24},$$

$$\mathrm{Res}\left[\frac{dz}{1+z^3+z^6+z^9}, p_1\right] = \lim_{z\to p_1}\frac{z-p_1}{(z^3+1)(z^6+1)} = \frac{1}{6p_1^5\left(p_1^3+1\right)} = \frac{e^{-5i\pi/2}}{6\left(e^{3i\pi/2}+1\right)} = \frac{-i}{6(1-i)} = \frac{1-i}{12},$$

$$\mathrm{Res}\left[\frac{dz}{1+z^3+z^6+z^9}, z_0\right] = \lim_{z\to z_0}\frac{z-z_0}{(z^3+1)(z^6+1)} = \frac{1}{3z_0^2\left(z_0^6+1\right)} = \frac{e^{-2i\pi/3}}{3\left(e^{6i\pi/3}+1\right)} = -\frac{1+\sqrt{3}i}{12}.$$

Quindi, dall'identità precedente segue che

$$I_2 = \frac{2i\pi e^{-i\pi/3}}{-2i\,\mathrm{sen}(\pi/3)}\,\frac{-1-\sqrt{3}+i\left(-3-\sqrt{3}\right)}{24} = \frac{\pi\left(1-i\sqrt{3}\right)}{2\,\mathrm{sen}(\pi/3)}\,\frac{1+\sqrt{3}+i\left(3+\sqrt{3}\right)}{24} = \frac{4\pi\left(1+\sqrt{3}\right)}{24\sqrt{3}},$$

da cui, razionalizzando, si ha il risultato finale

$$I_2 = \frac{\pi}{18}\left(3+\sqrt{3}\right).$$

## Terzo problema (punteggio massimo: 6/30)

Si determini lo sviluppo di Mittag-Leffler della funzione

$$f(z) = \frac{1}{\mathrm{senh}^3(z)}.$$

**Utilità**. Il limite

$$\lim_{n\to\infty}\oint_{|z|=(n+1/2)\pi}\frac{dz}{(z+a)\,\mathrm{sen}(z)} = 0, \qquad \forall\, a\in\mathbb{C},$$

potrebbe essere utile.

### Soluzione del terzo problema

Dopo aver osservato che la funzione ha poli tripli nei punti della successione $\{z_k = ik\pi\}_{k=-\infty}^{\infty}$, possiamo formalmente definire lo sviluppo di Mittag-Leffler come

$$f(z) = \phi(z) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k(z)$$

dove la funzione $\phi(z)$ rappresenta la cosiddetta parte intera, che verrà discussa e definita nel seguito, mentre la funzione $F_k(z)$, con $k\in\mathbb{Z}$, è la parte principale dello sviluppo di Laurent centrato nel $k$-esimo polo e convergente nella corona circolare $c_k = \{z : 0 < |z-ik\pi| < \pi\}$. Queste parti principali si ottengono a partire dalla serie di Taylor della funzione seno iperbolico, che in $z = ik\pi$ ha la forma

$$\begin{aligned}\mathrm{senh}(z) &= \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}\left.\frac{d^j\mathrm{senh}(z)}{dz^j}\right|_{ik\pi}(z-ik\pi)^j = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{\cosh(ik\pi)}{(2j+1)!}(z-ik\pi)^{2j+1} + \sum_{j=0}^{\infty}\frac{\mathrm{senh}(ik\pi)}{(2j)!}(z-ik\pi)^{2j}\\ &= (-1)^k\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(z-ik\pi)^{2j+1}}{(2j+1)!} = (-1)^k\left[z-ik\pi+\frac{(z-ik\pi)^3}{3!}+\frac{(z-ik\pi)^5}{5!}+O\left((z-ik\pi)^7\right)\right].\end{aligned}$$

Alla luce di questo risultato, per la funzione data si ha

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{(-1)^k}{\left[z-ik\pi+(z-ik\pi)^3/3!+(z-ik\pi)^5/5!+O\left((z-ik\pi)^7\right)\right]^3} \\
&= \frac{(-1)^k}{(z-ik\pi)^3\left[1+(z-ik\pi)^2/3!+(z-ik\pi)^4/5!+O\left((z-ik\pi)^6\right)\right]^3} \\
&= \frac{(-1)^k}{(z-ik\pi)^3}\left[1-3\left(\frac{(z-ik\pi)^2}{3!}+\frac{(z-ik\pi)^4}{5!}+\cdots\right)+O\left((z-ik\pi)^4\right)\right] \\
&= \frac{(-1)^k}{(z-ik\pi)^3}\left(1-\frac{1}{2}(z-ik\pi)^2\right)+O\left((z-ik\pi)^4\right) \\
&= (-1)^k\left(\frac{1}{(z-ik\pi)^3}-\frac{1}{2}\frac{1}{z-ik\pi}\right)+O\left((z-ik\pi)\right).
\end{aligned}
$$

Indicando con $F_k(z)$ la parte principale della $k$-esima serie di Laurent, ovvero di quella centrata in $z=z_k$, convergente nella corona $c_k$, con $k\in\mathbb{Z}$, si ha

$$
f(z)=\phi(z)+\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{1}{(z-z_k)^3}-\frac{1/2}{z-z_k}\right),
$$

dove $\phi(z)$, come già anticipato, è la parte intera della funzione $f(z)$ e ha lo stesso comportamento asintotico, ovvero

$$
\lim_{k\to\infty} f(w_k)=\lim_{k\to\infty}\phi(w_k),
$$

dove $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ è una generica successione che si accumula all'infinito, cioè,

$$
\lim_{k\to\infty} w_k=\infty,
$$

inoltre, è tale che $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}\cap\{z_k\}_{k=-\infty}^{\infty}=\emptyset$, ovvero la successione non "passa" per alcun polo della funzione $f(z)$. Poiché, come è banale verificare,

$$
\lim_{k\to\infty} f(w_k)\neq\infty,
$$

si ha necessariamente che la parte intera $\phi(z)$ è una costante, poniamo, quindi, $\phi(z)=\phi_0$. Possiamo ottenere il valore costante $\phi_0$ valutando la funzione e la serie delle parti principali in un punto noto, ad esempio in $z=i\pi/2$ si ha

$$
\begin{aligned}
f(i\pi/2)=\frac{1}{\operatorname{senh}^3(i\pi/2)}=\frac{1}{i^3}=i &= \phi_0+\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{1}{(i\pi/2-ik\pi)^3}-\frac{1/2}{i\pi/2-ik\pi}\right) \\
&= \phi_0+\frac{i}{\pi^3}\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{8}{(1-2k)^3}+\frac{\pi^2}{1-2k}\right),
\end{aligned}
$$

da cui

$$
\phi_0=i-\frac{i}{\pi^3}\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{8}{(1-2k)^3}+\frac{\pi^2}{1-2k}\right).
$$

La somma della seconda serie si ottiene sfruttando la relazione suggerita. In particolare possiamo scrivere

$$
\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^k}{1-2k}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k g(k),
$$

con $g(z)=1/(1-2z)$ e considerare gli integrali

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2i\pi}\oint_{|z|=n+1/2}\frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi z)}\frac{1}{1-2z}dz &= \sum_{k=-n}^{n}\operatorname{Res}\left[\frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi z)}\frac{1}{1-2z},z=k\right]+\operatorname{Res}\left[\frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi z)}\frac{1}{1-2z},z=1/2\right] \\
&= \sum_{k=-n}^{n}\frac{(-1)^k}{1-2k}-\frac{\pi}{2}, \qquad \forall\, n\in\mathbb{N},
\end{aligned}
$$

dove la somma si riferisce ai residui dei poli semplici in corrispondenza degli zeri della funzione seno a denominatore, mentre il secondo termine rappresenta il residuo del polo, anch'esso semplice, in $z = 1/2$. Facendo il limite $n \to \infty$ si ha

$$0 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2i\pi} \oint_{|z|=n+1/2} \frac{\pi}{\mathrm{sen}(\pi z)} \frac{1}{1-2z} dz = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k}{1-2k} - \frac{\pi}{2},$$

da cui si ottiene la somma della serie

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k}{1-2k} = \frac{\pi}{2}.$$

Con la stessa procedura calcoliamo la somma della serie

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(1-2k)^3}.$$

Si ha

$$\begin{aligned}
0 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2i\pi} \oint_{|z|=n+1/2} \frac{\pi}{\mathrm{sen}(\pi z)} \frac{1}{(1-2z)^3} dz &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathrm{Res}\left[\frac{\pi}{\mathrm{sen}(\pi z)} \frac{1}{(1-2z)^3}, z = k\right] + \mathrm{Res}\left[\frac{\pi}{\mathrm{sen}(\pi z)} \frac{1}{(1-2z)^3}, z = 1/2\right] \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(1-2k)^3} + \frac{1}{(-2)^3} \frac{1}{2} \frac{d^2}{dz^2} \frac{\pi}{\mathrm{sen}(\pi z)}\bigg|_{z=1/2} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(1-2k)^3} + \frac{1}{(-2)^3} \frac{1}{2} \pi^3 \frac{1+\cos^2(\pi z)}{\mathrm{sen}^3(\pi z)}\bigg|_{z=1/2} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(1-2k)^3} - \frac{\pi^3}{16},
\end{aligned}$$

quindi la somma della serie è

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(1-2k)^3} = \frac{\pi^3}{16}.$$

Usando questi risultati si ottiene che la costante $\phi_0$ è nulla, infatti si ha

$$\phi_0 = i - \frac{i}{\pi^3} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{8}{(1-2k)^3} + \frac{\pi^2}{1-2k}\right) = i - \frac{i}{\pi^3}\left(8\frac{\pi^3}{16} + \pi^2 \frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

In definitiva, lo sviluppo di Mittag-Leffler completo è

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{1}{(z-ik\pi)^3} - \frac{1/2}{z-ik\pi}\right).$$

## QUARTO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

Si dimostri che l'operatore $\hat{A} = \hat{U}\hat{K}$, ottenuto dal prodotto dell'operatore unitario $\hat{U}$ con il generico operatore $\hat{K}$, definiti nello spazio di Hilbert $E_N$ a $N$ dimensioni, ha lo stesso spettro discreto dell'operatore $\hat{B} = \hat{K}\hat{U}$. Si ottenga, inoltre, la relazione che lega gli insiemi degli autovettori $\{|a_k\rangle\}_{k=1}^N$ e $\{|b_k\rangle\}_{k=1}^N$ corrispondenti, per i quali si hanno le equazioni

$$\hat{A}|a_k\rangle = \lambda_k |a_k\rangle, \qquad \hat{B}|b_k\rangle = \lambda_k |b_k\rangle, \qquad k \in \{1, 2, \ldots, N\},$$

dove l'insieme $\sigma_d = \{\lambda_k\}_{k=1}^N$ rappresenta lo spettro discreto comune degli operatori $\hat{A}$ e $\hat{B}$.
Siano

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ i/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} \\ -i/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & i/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \qquad U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i/\sqrt{2} & i/\sqrt{2} \\ 0 & -i/\sqrt{2} & i/\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

le matrici che rappresentano gli operatori del $\hat{K}$ e $\hat{U}$ rispetto alla base canonica dello spazio di Hilbert tridimensionale $E_3$. Si determinino, in questo caso particolare, lo spettro discreto comune $\sigma_d$ degli operatori $\hat{A}$ e $\hat{B}$, e le rappresentazioni degli autovettori corrispondenti per entrambi gli operatori.

## SOLUZIONE DEL QUARTO PROBLEMA

L'operatore $\hat{B}$ può essere ottenuto dall'operatore $\hat{A}$ attraverso la trasformazione unitaria definita dall'operatore $\hat{U}$. Infatti, moltiplicando $\hat{A}$ per $\hat{U}^\dagger$ da sinistra e per $\hat{U}$ da destra, si ha

$$\hat{U}^\dagger \hat{A} \hat{U} = \hat{U}^\dagger \hat{U} \hat{K} \hat{U} = \hat{K} \hat{U} = \hat{B} \,.$$

Indichiamo, come dato dal problema, con $\sigma_d = \{\lambda_k\}_{k=1}^N$ e $\{|a_k\rangle\}_{k=1}^N$ lo spettro discreto e l'insieme degli autovettori dell'operatore $\hat{A}$, per cui si hanno le equazioni agli autovalori

$$\hat{A}|a_k\rangle = \lambda_k |a_k\rangle \,, \qquad k \in \{1, 2, \ldots, N\} \,,$$

facciamo agire da sinistra su ambo i membri delle equazioni l'operatore $\hat{U}^\dagger$ e inseriamo l'operatore identità, nella forma $\hat{I} = \hat{U}\hat{U}^\dagger$, tra l'operatore $\hat{A}$ e l'autovettore $|a_k\rangle$, avremo

$$\begin{aligned} \underbrace{\hat{U}^\dagger \hat{A} \hat{U}}_{=\hat{B}} \hat{U}^\dagger |a_k\rangle &= \lambda_k \hat{U}^\dagger |a_k\rangle \\ \hat{B} \hat{U}^\dagger |a_k\rangle &= \lambda_k \hat{U}^\dagger |a_k\rangle \,, \qquad k \in \{1, 2, \ldots, N\} \,. \end{aligned}$$

Le precedenti sono le equazioni agli autovalori dell'operatore $\hat{B}$, che quindi ha lo stesso spettro discreto di $\hat{A}$ e l'insieme degli autovettori $\left\{|b_k\rangle = \hat{U}^\dagger |a_k\rangle\right\}_{k=1}^N$. Ne consegue che la relazione che lega gli autovettori dei due operatori è data dalla trasformazione unitaria $\hat{U}^\dagger$.

Nel caso particolare considerato nella seconda parte del problema le matrici che rappresentano gli operatori $\hat{A}$ e $\hat{B}$ rispetto alla base canonica sono

$$\begin{aligned} A = UK &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i/\sqrt{2} & i/\sqrt{2} \\ 0 & -i/\sqrt{2} & i/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ i/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} \\ -i/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & i/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & i & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} , \\ B = KU &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ i/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} \\ -i/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & i/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i/\sqrt{2} & i/\sqrt{2} \\ 0 & -i/\sqrt{2} & i/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -i/\sqrt{2} & i/\sqrt{2} \\ i/\sqrt{2} & (-1+i)/2 & (1+i)/2 \\ -i/\sqrt{2} & (1+i)/2 & (-1+i)/2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & e^{3i\pi/2} & e^{i\pi/2} \\ e^{i\pi/2} & e^{3i\pi/4} & e^{i\pi/4} \\ e^{3i\pi/2} & e^{i\pi/4} & e^{3i\pi/4} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -i & i \\ i & \sqrt{-i} & \sqrt{i} \\ -i & \sqrt{i} & \sqrt{-i} \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Lo spettro discreto della matrice $A$ si ottiene risolvendo, rispetto alla variabile $\lambda$ l'equazione secolare $\det(A - I\alpha) = 0$, si ha

$$\begin{aligned} \det(A - I\alpha) &= 0 \\ \det \begin{pmatrix} 1-\alpha & 0 & 1 \\ 0 & i-\alpha & 0 \\ 1 & 0 & -1-\alpha \end{pmatrix} &= 0 \\ (i-\alpha)\left[\left(\alpha^2 - 1\right) - 1\right] &= 0 \\ (i-\alpha)\left(\alpha^2 - 2\right) &= 0 \,, \end{aligned}$$

da cui $\alpha_1 = i$ e $\alpha_{2,3} = \pm\sqrt{2}$.
Allo stesso modo otteniamo lo spettro discreto della matrice $B$, cioè

$$\begin{aligned}
\det(B - I\beta) &= 0 \\
\det\left(\sqrt{2}B - \sqrt{2}I\beta\right) &= 0 \\
\det\begin{pmatrix} \sqrt{2}-\sqrt{2}\beta & -i & i \\ i & \sqrt{-i}-\sqrt{2}\beta & \sqrt{i} \\ -i & \sqrt{i} & \sqrt{-i}-\sqrt{2}\beta \end{pmatrix} &= 0 \\
\left(\sqrt{2}-\sqrt{2}\beta\right)\left[\left(\sqrt{-i}-\sqrt{2}\beta\right)^2 - i\right] + i\left[i\left(\sqrt{-i}-\sqrt{2}\beta\right) + i\sqrt{i}\right] + i\left[i\left(\sqrt{-i}-\sqrt{2}\beta\right) + i\sqrt{i}\right] &= 0 \\
\left(\sqrt{2}-\sqrt{2}\beta\right)\left[\left(\sqrt{-i}-\sqrt{2}\beta\right)^2 - i\right] + 2i\left[i\left(\sqrt{-i}-\sqrt{2}\beta\right) + i\sqrt{i}\right] &= 0 \\
\left(\sqrt{2}-\sqrt{2}\beta\right)\left[\left(\sqrt{-i}-\sqrt{2}\beta\right)^2 - i\right] - 2\left(\sqrt{-i}-\sqrt{2}\beta + \sqrt{i}\right) &= 0 \\
\left(\sqrt{-i}-\sqrt{2}\beta + \sqrt{i}\right)\left[\left(\sqrt{2}-\sqrt{2}\beta\right)\left(\sqrt{-i}-\sqrt{2}\beta - \sqrt{i}\right) - 2\right] &= 0 \\
\left(e^{3i\pi/4} + e^{i\pi/4} - \sqrt{2}\beta\right)\left[\left(\sqrt{2}-\sqrt{2}\beta\right)\left(e^{3i\pi/4} - e^{i\pi/4} - \sqrt{2}\beta\right) - 2\right] &= 0 \\
\left(\sqrt{2}i - \sqrt{2}\beta\right)\left[\left(\sqrt{2}-\sqrt{2}\beta\right)\left(-\sqrt{2} - \sqrt{2}\beta\right) - 2\right] &= 0 \\
(i-\beta)\left(\beta^2 - 2\right) &= 0\,,
\end{aligned}$$

le soluzioni ovvero gli autovalori sono: $\beta_1 = i$ e $\beta_{2,3} = \pm\sqrt{2}$ e coincidono con quelli della matrice $A$, abbiamo quindi dimostrato che i due operatori $\hat{A}$ e $\hat{B}$ hanno lo stesso spettro discreto.
Gli autovettori della matrice $A$ si ottengono risolvendo i tre sistemi lineari omogenei

$$\begin{gathered}
Aa_k = \alpha_k a_k \\
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & i & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^1_{(k)} \\ a^2_{(k)} \\ a^3_{(k)} \end{pmatrix} = \alpha_k \begin{pmatrix} a^1_{(k)} \\ a^2_{(k)} \\ a^3_{(k)} \end{pmatrix}, \qquad k = 1,2,3\,.
\end{gathered}$$

Per il primo autovettore si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & i & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^1_{(1)} \\ a^2_{(1)} \\ a^3_{(1)} \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} a^1_{(1)} \\ a^2_{(1)} \\ a^3_{(1)} \end{pmatrix}, \qquad k = 1,2,3\,,$$

dalla seconda equazione segue $a^2_{(1)} = 1$, mentre dalla prima e terza equazione

$$\begin{cases} a^1_{(1)}(1-i) + a^3_{(1)} = 0 \\ \\ a^1_{(1)} - a^3_{(1)}(1+i) = 0 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} a^1_{(1)}(1-i) + a^3_{(1)} = 0 \\ \\ a^1_{(1)}(1-i) - 2a^3_{(1)} = 0 \end{cases},$$

si hanno $a^1_{(1)} = a^3_{(1)} = 0$. Il secondo e il terzo autovettore si ottengono, invece, dai sistemi

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & i & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^1_{(2,3)} \\ a^2_{(2,3)} \\ a^3_{(2,3)} \end{pmatrix} = \pm\sqrt{2} \begin{pmatrix} a^1_{(2,3)} \\ a^2_{(2,3)} \\ a^3_{(2,3)} \end{pmatrix}, \qquad k = 1,2,3\,,$$

questa volta dalla seconda equazione segue $a^2_{2,3} = 0$; dalla prima e terza si hanno invece le omologhe componenti come

$$\begin{cases} a^1_{(2,3)}\left(1 \mp \sqrt{2}\right) + a^3_{(2,3)} = 0 \\ \\ a^1_{(2,3)} - a^3_{(2,3)}\left(1 \pm \sqrt{2}\right) = 0 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} a^1_{(2,3)}\left(1 \mp \sqrt{2}\right) + a^3_{(2,3)} = 0 \\ \\ a^1_{(2,3)}\left(1 \mp \sqrt{2}\right) + a^3_{(2,3)} = 0 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad a^3_{(2,3)} = a^1_{(2,3)}\left(\pm\sqrt{2} - 1\right).$$

In definitiva, posto $a^1_{(2)} = a^1_{(3)} = 1$ i tre autovettori della matrice $A$ sono

$$a_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad a_{2,3} = \frac{1}{\sqrt{4 \mp 2\sqrt{2}}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \pm\sqrt{2} - 1 \end{pmatrix}.$$

Per ottenere quelli della matrice $B$ possiamo sfruttare la relazione, ottenuta al livello operatoriale, $b_k = U^\dagger a_k$, con $k = 1, 2, 3$, si hanno quindi

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i/\sqrt{2} & i/\sqrt{2} \\ 0 & -i/\sqrt{2} & i/\sqrt{2} \end{pmatrix}^\dagger \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -i/\sqrt{2} & i/\sqrt{2} \\ 0 & -i/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -i/\sqrt{2} \\ -i/\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

che, potendo moltiplicare per una costante arbitraria, l'unità immaginaria $i$ in questo caso, riscriviamo come

$$b_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Infine, il secondo e terzo autovettore della matrice $B$ sono

$$\begin{aligned} b_{2,3} &= U^\dagger a_{2,3} \\ b_{2,3} &= \frac{1}{\sqrt{4 \mp 2\sqrt{2}}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -i/\sqrt{2} & i/\sqrt{2} \\ 0 & -i/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \pm\sqrt{2} - 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{4 \mp 2\sqrt{2}}} \begin{pmatrix} 1 \\ i\left(\pm 1 - 1/\sqrt{2}\right) \\ -i\left(\pm 1 - 1/\sqrt{2}\right) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

## Quinto problema (punteggio massimo: 6/30)

Si ottengano le soluzioni dell'equazione integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left( f(y) - \frac{(1-y)^2}{(1+y^2)^2} \right) f(x-y) dy = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y\, dy}{(1+y^2)^2 \left[1 + (x-y)^2\right]}.$$

**Suggerimento**. Potrebbe essere di aiuto sviluppare il quadrato a numeratore del secondo termine dell'integrale a primo membro.

### Soluzione del quinto problema

Sviluppando il secondo termine dell'integrale a primo membro si ha

$$\begin{aligned} [\text{primo membro}] &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( f(y) - \frac{(1-y)^2}{(1+y^2)^2} \right) f(x-y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} \left( f(y) - \frac{1+y^2-2y}{(1+y^2)^2} \right) f(x-y) dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( f(y) - \frac{1}{1+y^2} + \frac{2y}{(1+y^2)^2} \right) f(x-y) dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( f(y) - \frac{1}{1+y^2} - \frac{d}{dy} \frac{1}{1+y^2} \right) f(x-y) dy \\ &= (f * f)(x) - (g * f)(x) - \left(g' * f\right)(x), \end{aligned}$$

dove si è posto

$$g(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

e usato il simbolo $(h_1 * h_2)(x)$ per indicare la convoluzione delle funzioni $h_1(x)$ e $h_2(x)$. Alla luce di questa definizione, il secondo membro rappresenta esso stesso una convoluzione, si ha infatti,

$$\begin{aligned} [\text{secondo membro}] &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y\, dy}{(1+y^2)^2 \left[1+(x-y)^2\right]} = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{-2y}{(1+y^2)^2} \frac{1}{\left[1+(x-y)^2\right]} dy \\ &= -\int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{d}{dy} \frac{1}{1+y^2} \right) \frac{1}{\left[1+(x-y)^2\right]} dy \\ &= -(g' * g)(x). \end{aligned}$$

Facciamo la trasformata di Fourier di ambo i membri e usando il teorema della convoluzione, nella forma dell'identità

$$\mathscr{F}_k[h_1 * h_2] = \sqrt{2\pi}\,\mathscr{F}_k[h_1]\,\mathscr{F}_k[h_2]\,,$$

dove $h_1(x)$ e $h_2(x)$ sono generiche funzioni che ammettono trasformata di Fourier, si ha

$$\begin{aligned}\mathscr{F}_k\left[f*f-g*f-g'*f\right] &= -\mathscr{F}_k\left[g'*g\right]\\ (\mathscr{F}_k[f])^2-\mathscr{F}_k[g]\,\mathscr{F}_k[f]-\mathscr{F}_k\left[g'\right]\mathscr{F}_k[f] &= -\mathscr{F}_k\left[g'\right]\mathscr{F}_k[g]\,.\end{aligned}$$

Portando a primo membro tutti i termini e raccogliendo opportunamente, si ha

$$\begin{aligned}(\mathscr{F}_k[f])^2-\mathscr{F}_k[g]\,\mathscr{F}_k[f]-\mathscr{F}_k\left[g'\right]\mathscr{F}_k[f]+\left(\mathscr{F}_k\left[g'\right]\right)^2 &= 0\\ \Big(\mathscr{F}_k[f]-\mathscr{F}_k[g]\Big)\Big(\mathscr{F}_k[f]-\mathscr{F}_k\left[g'\right]\Big) &= 0\,,\end{aligned}$$

ci sono quindi due soluzioni, $f_1(x)$ e $f_2(x)$, le cui trasformate di Fourier coincidono con la trasformata di Fourier della funzione $g(x)$ e con quella della sua derivata prima, cioè

$$\mathscr{F}_k[f_1] = \mathscr{F}_k[g]\,, \qquad \mathscr{F}_k[f_2] = \mathscr{F}_k\left[g'\right].$$

In definitiva, facendo l'anti-trasformata di Fourier, si ottengono le soluzioni

$$f_1(x) = g(x) = \frac{1}{1+x^2}\,, \qquad f_2(x) = g'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}\,.$$

## Sesto problema (punteggio massimo: 6/30)

La matrice $Q$, $4\times4$, che rappresenta, rispetto alla base canonica, l'operatore hermitiano $\hat{Q}$ definito nello spazio di Hilbert a quattro dimensioni $E_4$, è diagonalizzata dalla matrice unitaria

$$H = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & -1 & -1\end{pmatrix}.$$

Ne consegue che la rappresentazione diagonale $Q_d$ dell'operatore $\hat{Q}$ si ottiene dalla trasformazione

$$Q_d = H^\dagger Q H = \mathrm{diag}(0,1,2,3)\,,$$

da cui si evince che lo spettro discreto dell'operatore è $\sigma_d = \{0,1,2,3\}$.
Si determini la matrice $R$ che rappresenta l'operatore

$$\hat{R} = \exp\left[\cos\left(\pi\hat{Q}\right)\right],$$

rispetto alla base canonica.

### Soluzione del sesto Problema

Sia l'operatore $\hat{R}$ che $\cos\left(\pi\hat{Q}\right)$ sono essi stessi diagonalizzabili e, per il teorema spettrale, si ha che la rappresentazione diagonale del secondo è

$$\cos(\pi Q)_d = \mathrm{diag}\Big(\cos(0),\cos(\pi),\cos(2\pi),\cos(3\pi)\Big) = \mathrm{diag}\,(1,-1,1,-1)\,.$$

Ne consegue che le potenze pari e dispari di questa matrice coincidono, rispettivamente, con la matrice identità $I$ e con la stessa matrice diagonale $\cos(\pi Q)_d$. Ne consegue che, per le potenze pari si ha

$$\begin{gathered}(\cos(\pi Q)_d)^{2k} = I\\ \Downarrow\\ (\cos(\pi Q))^{2k} = H\,(\cos(\pi Q)_d)^{2k}\,H^\dagger = I\,,\end{gathered}$$

mentre per quelle dispari

$$
\begin{aligned}
(\cos(\pi Q)_d)^{2k+1} &= \cos(\pi Q)_d \\
&\Downarrow \\
(\cos(\pi Q))^{2k+1} &= H\,(\cos(\pi Q)_d)^{2k+1}\,H^\dagger = H\cos(\pi Q)_d\,H^\dagger \\
&= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\
\cos(\pi Q) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Ne consegue che, usando lo sviluppo in serie di potenze della funzione esponenziale e considerandone separatamente potenze pari e potenze dispari, si ha che la rappresentazione canonica dell'operatore $\hat{R}$ è

$$
\begin{aligned}
R &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\cos(\pi Q))^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\cos(\pi Q))^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\cos(\pi Q))^{2k+1}}{(2k+1)!} = I\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k)!} + \cos(\pi Q)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)!} \\
&= I\cosh(1) + \cos(\pi Q)\,\mathrm{senh}(1),
\end{aligned}
$$

da cui, facendo uso del risultato precedente per la matrice $\cos(\pi Q)$,

$$
R = \begin{pmatrix} \cosh(1) & 0 & \mathrm{senh}(1) & 0 \\ 0 & \cosh(1) & 0 & \mathrm{senh}(1) \\ \mathrm{senh}(1) & 0 & \cosh(1) & 0 \\ 0 & \mathrm{senh}(1) & 0 & \cosh(1) \end{pmatrix}.
$$