Metodi Matematici per la Fisica

Prova scritta - 4 dicembre 2018

Si risolvano cortesemente i seguenti problemi, sapendo che verranno valutati:

1. la correttezza del risultato ottenuto e della procedura utilizzata;
2. la completezza dei passaggi riportati;
3. il livello di esemplificazione con cui sono espressi i risultati (ad esempio un risultato numerico reale non deve contenere l'unità immaginaria);
4. la correttezza del formalismo utilizzato;
5. la chiarezza dell'esposizione e la leggibilità del testo.

Primo problema (punteggio: 6/30)

Si calcolino gli integrali

$$P_k = \oint_{|z|=k+1/2} \frac{\Gamma(-z)}{z+1} dz\,, \qquad k \in \mathbb{N}\,,$$

dove $\Gamma(w)$ è la funzione gamma di Eulero. Una volta ottenuta l'espressione degli integrali, si calcoli il limite

$$P = \lim_{k\to\infty} P_k\,.$$

Soluzione del primo problema

L'integranda ha come singolarità sia i poli semplici della funzione gamma, ovvero i punti

$$z_j = j\,, \qquad j = 0, 1, 2, \ldots\,,$$

che il polo semplice in $z_{-1} = -1$, dovuto al polinomio di primo grado a denominatore. Nella circonferenza centrata nell'origine e di raggio $r = k + 1/2$, con $k \in \mathbb{N}$ sono contenuti i $k+1$ poli $\{z_j\}_{j=-1}^{k}$. Sapendo che la funzione gamma ha nei punti $z = l = 0, -1, -2, \ldots$, ovvero nell'origine e negli opposti dei numeri naturali, poli semplici con residui

$$\mathrm{Res}\,[\Gamma(z), z = l] = \frac{(-1)^l}{l!}\,, \qquad l = 0, -1, -2, \ldots\,,$$

i residui della funzione integranda si ottengono come

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}\left[\frac{\Gamma(-z)}{z+1}, z_{-1}\right] &= \lim_{z\to -1} \Gamma(-z) = \Gamma(1) = 1\,,\\
\mathrm{Res}\left[\frac{\Gamma(-z)}{z+1}, z_j\right] &= -\frac{(-1)^j}{j!}\,\frac{1}{j+1} = \frac{(-1)^{j+1}}{(j+1)!}\,, \qquad j = 0, 1, 2, \ldots\,.
\end{aligned}$$

Da cui si hanno gli integrali cercati

$$P_k = 2i\pi \sum_{j=-1}^{k} \frac{(-1)^{j+1}}{(j+1)!} = 2i\pi \sum_{j=0}^{k+1} \frac{(-1)^j}{j!}\,.$$

Il limite richiesto rappresenta la serie che converge a $1/e$, infatti

$$P = \lim_{k\to\infty} P_k = 2i\pi \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!} = 2i\pi\, e^{-1} = \frac{2i\pi}{e}\,.$$

Secondo problema (punteggio 6/30)

Si dimostri l'identità

$$\Gamma(z)\zeta(z) = \int_0^\infty \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} dt\,,$$

per valori di z tali che $\mathrm{Re}(z) > 1$.

Soluzione del secondo problema

Riscriviamo l'integrale moltiplicando numeratore e denominatore dell'integranda per e^{-t}

$$\int_0^\infty \frac{e^{-t} t^{z-1}}{1 - e^{-t}} dt\,,$$

avendo $t > 0$ si ha $e^{-t} < 1$ e quindi possiamo sfruttare la somma della serie geometrica di ragione e^{-t} per riscrivere l'integranda come

$$\int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} \sum_{k=0}^\infty e^{-tk} dt\,.$$

La serie converge uniformemente, possiamo estrarre la somma dall'integrale

$$\sum_{k=0}^\infty \int_0^\infty e^{-t(k+1)} t^{z-1} dt\,,$$

facciamo prima la sostituzione $w = t(k+1)$ nell'integrale e poi $k' = k+1$ nella serie

$$\sum_{k=0}^\infty \int_0^\infty e^{-w} \frac{w^{z-1}}{(k+1)^{z-1}} \frac{dw}{k+1} = \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{(k+1)^z} \int_0^\infty e^{-w} w^{z-1} dw = \underbrace{\sum_{k'=1}^\infty \frac{1}{k'^z}}_{\zeta(z)} \underbrace{\int_0^\infty e^{-w} w^{z-1} dw}_{\Gamma(z)}\,.$$

Infatti, per valori di z tali che $\mathrm{Re}(z) > 1$, la serie rappresenta la funzione zeta di Riemann, mentre l'integrale rappresenta la funzione gamma di Eulero entrambe valutate in z.

Terzo problema (punteggio 6/30)

Si ottengano i primi quattro coefficienti della serie di Laurent centrata nell'origine e convergente nella corona circolare di raggio interno nullo della funzione

$$a(z) = \frac{\cos(z)}{z(2z-1)\mathrm{sen}(z)}\,.$$

Soluzione del terzo problema

I poli della funzione $a(z)$ si ottengono come unione dell'insieme degli zeri della funzione seno con $z_0 = 1/2$, ovvero

$$\{t_k = k\pi\}_{k\in\mathbb{Z}} \cup \{z_0 = 1/2\}\,.$$

Si tratta di tutti poli semplici ad eccezione dell'origine che rappresenta un polo di ordine 2. Il polo più vicino all'origine che determina il raggio maggiore della corona di convergenza della "prima" serie di Laurent centrata nell'origine è $z_0 = 1/2$. Ne consegue che la serie di Laurent di cui sono richiesti i primi quattro coefficienti converge nella corona

$$C = \{z : 0 < |z| < 1/2\}\,.$$

Procediamo sfruttando le serie di Taylor note per le funzioni trigonometriche e la serie geometrica per $1/(2z-1)$, nel limite $z \to 0$, si ha

$$
\begin{aligned}
a(z) &= -\frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!}\sum_{j=0}^{\infty}(2z)^j\left(\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l z^{2l+1}}{(2l+1)!}\right)^{-1} \\
&= -\frac{1}{z}\frac{\left(1-z^2/2!+z^4/4!+\ldots\right)\left(1+2z+4z^2+8z^3+\ldots\right)}{z-z^3/3!+z^5/5!+\ldots} \\
&= -\frac{1}{z}\frac{\left(1-z^2/2!+z^4/4!+\ldots\right)\left(1+2z+4z^2+8z^3+\ldots\right)}{z\left(1-z^2/3!+z^4/5!+\ldots\right)} \\
&= -\frac{1}{z^2}\frac{\left(1-z^2/2!+z^4/4!+\ldots\right)\left(1+2z+4z^2+8z^3+\ldots\right)}{1-\left(z^2/3!-z^4/5!+\ldots\right)} \\
&= -\frac{1}{z^2}\underbrace{\left(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\ldots\right)}_{F(z)}\underbrace{\left(1+2z+4z^2+8z^3+\ldots\right)}_{G(z)}\underbrace{\left[1+\left(\frac{z^2}{3!}-\frac{z^4}{5!}+\ldots\right)+\left(\frac{z^2}{3!}-\frac{z^4}{5!}+\ldots\right)^2+\ldots\right]}_{H(z)}.
\end{aligned}
$$

Raccogliamo i primi quattro termini della serie di Taylor totale centrata nell'origine

$$
T(z) = F(z)\cdot G(z)\cdot H(z) = \sum_{j=0}^{\infty} t_j z^j\,,
$$

che si ottiene dal prodotto delle tre serie di Taylor

$$
F(z) = \sum_{j=0}^{\infty} f_j z^j\,, \qquad G(z) = \sum_{j=0}^{\infty} g_j z^j\,, \qquad F(z) = \sum_{j=0}^{\infty} h_j z^j\,,
$$

definite nell'espressione precedente. Per il primo coefficiente, t_0 si ottiene dal prodotto dei primi di ciascuna serie, cioè,

$$
t_0 = f_0 g_0 h_0 = 1\,.
$$

Il coefficiente t_1 è dato da

$$
t_1 = f_0 g_1 h_0 = 2\,,
$$

infatti solo la serie $G(z)$ ha tutte le potenze, le altre due hanno solo quelle pari. Il terzo coefficiente ha tre contributi

$$
t_2 = f_0 g_0 h_2 + f_0 g_2 h_0 + f_2 g_0 h_0 = \frac{1}{3!} + 4 - \frac{1}{2!} = \frac{11}{3}\,.
$$

Infine, il quarto, t_3 è dato da

$$
t_3 = f_0 g_1 h_2 + f_2 g_1 h_0 + f_0 g_3 h_0 = \frac{2}{3!} - \frac{2}{2!} + 8 = \frac{22}{3}\,.
$$

Ne consegue che i primi quattro coefficienti di Laurent sono

$$
c_{-2} = -t_0 = -1\,, \qquad c_{-1} = -t_1 = -2\,, \qquad c_0 = -t_2 = -\frac{11}{3}\,, \qquad c_1 = -t_3 = -\frac{22}{3}\,.
$$

Quarto problema (punteggio 6/30)

Si determinino la norma, gli autovalori e gli autovettori degli operatori

$$
\hat{X} = |a\rangle\langle b|\,, \qquad \hat{Y} = \sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{\hat{X}}{\|X\|}\right)^j\,,
$$

definiti nello spazio di Hilbert ad n dimensioni E_n, in termini dei vettori $|a\rangle, |b\rangle \in E_n$, con $|a\rangle \neq |b\rangle$.

Soluzione del quarto problema

L'azione dell'operatore $\hat{X}$ è definita dal prodotto scalare, infatti, $\forall\, |c\rangle \in E_n$, si ha

$$\hat{X}|c\rangle = \langle b|c\rangle|a\rangle \equiv |c'\rangle\,,$$

il vettore $|c'\rangle$ è proporzionale al vettore $|a\rangle$ e la costante di proporzionalità è il numero complesso $\langle b|c\rangle$. Ne consegue che un autovettore è proprio il vettore $|a\rangle$, infatti si ha l'equazione agli autovalori

$$\hat{X}|a\rangle = \langle b|a\rangle|a\rangle \equiv \alpha|a\rangle\,,$$

ovvero l'autovalore dell'autovettore $|a\rangle$ è $\alpha = \langle b|a\rangle$. D'altro canto, l'immagine di ogni vettore ortogonale al vettore $|b\rangle$ sarà il vettore nullo; ovvero, $\forall\, |d\rangle$, tale che $\langle b|d\rangle = 0$, si ha

$$\hat{X}|d\rangle = 0|a\rangle = |0\rangle\,.$$

Possiamo, quindi, definire una base ortonormale dello spazio vettoriale E_n che contenga lo stesso vettore $|b\rangle$, o meglio, il suo versore $|b\rangle/\,\|b\|$. Consideriamo ad esempio la base ortonormale $\left\{|e_j\rangle\right\}_{j=1}^{n}$, con $|e_1\rangle = |b\rangle/\,\|b\|$. L'azione dell'operatore $\hat{X}$ sui vettori della base è descritta dalla duplice legge

$$\hat{X}|e_j\rangle = |a\rangle\langle b|e_j\rangle = \|b\|\,|a\rangle\langle e_1|e_j\rangle = \left\{\begin{array}{ll} \|b\|\,|a\rangle & j=1 \\ |0\rangle = 0|e_j\rangle & j=2,\ldots,n \end{array}\right.\,,$$

ne consegue che gli $n-1$ vettori $\left\{|e_j\rangle\right\}_{j=2}^{n}$, che sono ortogonali al vettore $|b\rangle$, rappresentano altrettanti autovettori dell'operatore $\hat{X}$. In definitiva l'operatore $\hat{X}$ ha come autovettori gli n vettori dell'insieme $\{|a\rangle/\,\|a\|\,, |e_2\rangle, |e_3\rangle, \ldots, |e_n\rangle\}$. Gli autovalori corrispondenti sono gli elementi dello spettro discreto $\sigma = \{\alpha = \langle b|a\rangle, 0, 0, \ldots, 0\}$. L'autovalore nullo è degenere con ordine di degenerazione pari a $n-1$.
Questo risultato può essere ottenuto anche con la procedura matriciale. Gli elementi di X, la matrice $n\times n$ che rappresenta l'operatore rispetto alla base ortonormale $\left\{|e_j\rangle\right\}_{j=1}^{n}$, sono

$$X^j_m = \langle e_j|\hat{X}|e_m\rangle = \|b\|\,\langle e_j|a\rangle\delta_{1m} = \|b\|\,a^j\delta_{1m}\,, \qquad j,m = 1,2,\ldots,n\,,$$

dove a^j rappresenta la j-esima componente (controvariante) del vettore $|a\rangle$ rispetto alla base ortonormale $\left\{|e_j\rangle\right\}_{j=1}^{n}$. Solo la prima colonna ($m=1$) della matrice X è non nulla e si ha

$$X = \begin{pmatrix} X^1_1 & X^1_2 & \cdots & X^1_n \\ X^2_1 & X^2_2 & \cdots & X^2_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ X^n_1 & X^n_2 & \cdots & X^n_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|b\|\,a^1 & 0 & \cdots & 0 \\ \|b\|\,a^2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \|b\|\,a^n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

L'equazione caratteristica di questa matrice è

$$\det(X-\lambda I) = 0$$

$$\det\begin{pmatrix} \|b\|\,a^1-\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \|b\|\,a^2 & -\lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \|b\|\,a^n & 0 & \cdots & -\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$(-1)^{n-1}\left(\|b\|\,a^1-\lambda\right)\lambda^{n-1} = 0\,,$$

da cui si ottengono gli autovalori

$$\lambda_1 = \|b\|\,a^1\,, \qquad \lambda_2 = \lambda_3 = \cdots = \lambda_n = 0\,.$$

Questi autovalori corrispondono agli elementi dello spettro discreto σ, infatti ci sono $n-1$ autovalori nulli e l'unico diverso da zero vale esattamente $\alpha = \langle b|a\rangle$, come già visto seguend1o il primo metodo. Infatti, alla luce della definizione del primo vettore della base $|e_1\rangle = |b\rangle/\,\|b\|$, si ha

$$\alpha = \langle b|a\rangle = \|b\|\,\langle e_1|a\rangle = \|b\|\,a^1 = \lambda_1\,.$$

Riassumendo, gli n autovettori e gli n autovalori dell'operatore $\hat{X}$ sono rispettivamente

$$\frac{|a\rangle}{\|a\|}, |e_2\rangle, |e_3\rangle, \ldots, |e_n\rangle \,; \qquad \|b\|\, a^1, 0, 0, \ldots, 0\,.$$

La norma dell'operatore è definita come

$$\|X\| = \sup_{|c\rangle \neq |0\rangle} \left\{ \frac{\left\|\hat{X}|c\rangle\right\|}{\|c\|} \right\} = \sup_{|c\rangle \neq |0\rangle} \left\{ \frac{\||a\rangle\langle b|c\rangle\|}{\|c\|} \right\} = \sup_{|c\rangle \neq |0\rangle} \left\{ \frac{\|a\|\,|\langle b|c\rangle|}{\|c\|} \right\}.$$

Usando la disuguaglianza di Schwarz

$$|\langle b|c\rangle| \leq \|b\|\,\|c\|\,,$$

si ottiene

$$\|X\| = \sup_{|c\rangle \neq |0\rangle} \left\{ \frac{\|a\|\,|\langle b|c\rangle|}{\|c\|} \right\} \leq \sup_{|c\rangle \neq |0\rangle} \{\|a\|\,\|b\|\} = \|a\|\,\|b\|\,,$$

da cui

$$\|X\| = \|a\|\,\|b\|\,,$$

infatti la disuguaglianza vale come identità se $|c\rangle = |b\rangle$. Questo valore è diverso dal massimo dei moduli degli autovalori, cioè

$$\|X\| = \|a\|\,\|b\| \neq \max_{j=1,2,\ldots,n} \left\{|\lambda_j|\right\} = \|b\|\,|a^1|\,,$$

poiché l'operatore non è normale. Si può verificare calcolando direttamente il commutatore

$$\left[\hat{X}, \hat{X}^\dagger\right] = \hat{X}\hat{X}^\dagger - \hat{X}^\dagger\hat{X} = |a\rangle\langle b|b\rangle\langle a| - |b\rangle\langle a|a\rangle\langle b| = \|b\|^2\,|a\rangle\langle a| - \|a\|^2\,|b\rangle\langle b| = \|a\|^2\,\|b\|^2 \left(\frac{|a\rangle\langle a|}{\|a\|^2} - \frac{|b\rangle\langle b|}{\|b\|^2} \right) \neq 0\,,$$

che risulta essere non nullo in quanto $|a\rangle \neq |b\rangle$. In particolare si ha che la norma $\|X\|$ è strettamente maggiore del massimo dei moduli degli autovalori, cioè

$$\|X\| = \|a\|\,\|b\| \geq \|b\|\,|a^1|\,,$$

come conseguenza della disuguaglianza $\|a\| \geq |a^1|$. Rispetto alla base $\{|b\rangle/\,\|b\|\,, |e_2\rangle, |e_3\rangle, \ldots, |e_n\rangle\}$, il vettore $|a\rangle$ ha, in generale, altre componenti non nulle, avrebbe la sola componente a^1 e quindi si avrebbe l'identità $\|a\| = |a^1|$, solo se $|a\rangle$ fosse parallelo a $|b\rangle$.

Per calcolare gli autovalori e gli autovettori dell'operatore $\hat{Y}$, cerchiamo di ottenerne un'espressione "finita", ovvero cerchiamo di sommare la serie attraverso la quale è definito. A tal fine studiamo le sue potenze intere; partiamo dal quadrato per cui avremo

$$\hat{X}^2 = |a\rangle \underbrace{\langle b|a\rangle}_{\alpha} \langle b| = \alpha|a\rangle\langle b| = \alpha\hat{X}\,.$$

Seguendo la stessa procedura, il cubo si comporta come

$$\hat{X}^3 = |a\rangle \underbrace{\langle b|a\rangle}_{\alpha} \underbrace{\langle b|a\rangle}_{\alpha} \langle b| = \alpha^2|a\rangle\langle b| = \alpha^2\hat{X}\,,$$

quindi la potenza j-esima

$$\hat{X}^j = |a\rangle \underbrace{\langle b|a\rangle \cdots \langle b|a\rangle}_{j-1 \text{ fattori}} \langle b| = \alpha^{j-1}|a\rangle\langle b| = \alpha^{j-1}\hat{X}\,.$$

Usando il valore della norma $\|X\| = \|a\|\,\|b\|$ e l'identità $\alpha = \|b\|\,a^1$ e imponendo la condizione $|a^1| < \|a\|$, la serie può essere sommata come

$$\hat{Y} = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{\hat{X}}{\|X\|} \right)^j = \hat{X} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha^j}{\|X\|^j} = \hat{X} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{\|b\|\,a^1}{\|a\|\,\|b\|} \right)^j = \hat{X} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{a^1}{\|a\|} \right)^j = \left(\frac{1}{1 - a^1/\|a\|} - 1 \right) \hat{X} = \frac{a^1}{\|a\| - a^1}\hat{X}\,.$$

Poiché l'operatore $\hat{Y}$ è proporzionale all'operatore $\hat{X}$, ha gli stessi autovettori, mentre gli autovalori si ottengono da quelli dell'operatore $\hat{X}$ moltiplicandoli per il fattore di proporzionalità. Quindi gli autovettori e gli autovalori dell'operatore $\hat{Y}$ sono rispettivamente

$$\frac{|a\rangle}{\|a\|}, |e_2\rangle, |e_3\rangle, \ldots, |e_n\rangle\,; \qquad\qquad \frac{\|b\|\,(a^1)^2}{\|a\| - a^1}, 0, 0, \ldots, 0\,.$$

Infine, sfruttando ancora la proporzionalità con l'operatore $\hat{X}$, la norma vale

$$\|Y\| = \left|\frac{a^1}{\|a\| - a^1}\right| \|X\| = \frac{\|a\|\,\|b\|\,|a^1|}{|\|a\| - a^1|}\,.$$

Quinto problema (punteggio 6/30)

Sia $|a\rangle$ un autovettore dell'operatore $\hat{A}$ con autovalore α, ovvero $|a\rangle$ verifica l'equazione agli autovalori

$$\hat{A}|a\rangle = \alpha|a\rangle\,.$$

Si dimostri che il vettore

$$|b\rangle = \exp\left(-\beta\hat{B}\right)|a\rangle\,,$$

è un autovettore dell'operatore $\hat{A}$ con autovalore $(\alpha - \beta)$, sapendo che l'operatore $\hat{B}$ è tale da verificare la relazione di commutazione

$$\left[\hat{A}, \hat{B}\right] = \hat{I}\,,$$

dove $\hat{I}$ è l'operatore identità.

Soluzione del quinto problema

Facciamo agire l'operatore $\hat{A}$ sul vettore $|b\rangle$ e usiamo la serie di Taylor dell'esponenziale per l'operatore $\exp(-\beta\hat{B})$,

$$\hat{A}|b\rangle = \hat{A}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\beta)^k}{k!}\hat{B}^k|a\rangle = \hat{A}\left(\hat{I} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-\beta)^k}{k!}\hat{B}^k\right)|a\rangle = \alpha|a\rangle + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-\beta)^k}{k!}\hat{A}\hat{B}^k|a\rangle\,.$$

L'azione sul vettore $|a\rangle$ del prodotto di operatori $\hat{A}\hat{B}^k$, con $k \in \mathbb{N}$, può essere calcolata usando il commutatore dato $\left[\hat{A}, \hat{B}\right] = \hat{I}$. Calcoliamo il commutatore dell'operatore $\hat{A}$ con un potenza intera $k \in \mathbb{N}$ dell'operatore $\hat{B}$, si ha

$$\left[\hat{A}, \hat{B}^k\right] = \left[\hat{A}, \hat{B}\hat{B}^{k-1}\right] = \hat{B}\left[\hat{A}, \hat{B}^{k-1}\right] + \left[\hat{A}, \hat{B}\right]\hat{B}^{k-1} = \hat{B}\left[\hat{A}, \hat{B}^{k-1}\right] + \hat{B}^{k-1}\,.$$

Ripetendo la stessa operazione sul commutatore rimasto otteniamo

$$\left[\hat{A}, \hat{B}^k\right] = \hat{B}\left[\hat{A}, \hat{B}^{k-1}\right] + \hat{B}^{k-1} = \hat{B}\left(\hat{B}\left[\hat{A}, \hat{B}^{k-2}\right] + \hat{B}^{k-2}\right) + \hat{B}^{k-1} = \hat{B}^2\left[\hat{A}, \hat{B}^{k-2}\right] + 2\hat{B}^{k-1}\,.$$

Dopo $k-1$ iterazioni si arriva al risultato

$$\left[\hat{A}, \hat{B}^k\right] = \hat{B}^{k-1}\left[\hat{A}, \hat{B}\right] + (k-1)\hat{B}^{k-1} = k\hat{B}^{k-1}\,,$$

da cui si ottiene

$$\hat{A}\hat{B}^k - \hat{B}^k\hat{A} = k\hat{B}^{k-1} \qquad \Rightarrow \qquad \hat{A}\hat{B}^k = \hat{B}^k\hat{A} + k\hat{B}^{k-1}\,.$$

Usiamo l'ultima identità nella prima espressione

$$\begin{aligned}\hat{A}|b\rangle = \alpha|a\rangle + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-\beta)^k}{k!}\hat{A}\hat{B}^k|a\rangle &= \alpha|a\rangle + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-\beta)^k}{k!}\left(\hat{B}^k\hat{A} + k\hat{B}^{k-1}\right)|a\rangle \\ &= \alpha|a\rangle + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-\beta)^k}{k!}\left(\hat{B}^k\alpha + k\hat{B}^{k-1}\right)|a\rangle \\ &= \alpha|a\rangle + \alpha\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-\beta\hat{B})^k}{k!}|a\rangle + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-\beta)^k\hat{B}^{k-1}}{(k-1)!}|a\rangle \\ &= \alpha|a\rangle + \alpha\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-\beta\hat{B})^k}{k!}|a\rangle - \beta\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-\beta\hat{B})^{k-1}}{(k-1)!}|a\rangle\,.\end{aligned}$$

La somma dei primi due termini dà la serie completa con k da zero all'infinito, facendo la sostituzione $k-1=j$ nella seconda serie, si ottiene il risultato finale

$$\hat{A}|b\rangle = \alpha\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\beta\hat{B})^k}{k!}|a\rangle - \beta\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-\beta\hat{B})^j}{j!}|a\rangle\,, = (\alpha-\beta)\exp\left(-\beta\hat{B}\right)|a\rangle = (\alpha-\beta)\,|b\rangle\,.$$

Questa non è altro che l'equazione agli autovalori per il vettore $|b\rangle$ che rappresenta, quindi, un autovettore dell'operatore $\hat{A}$ con autovalore $(\alpha-\beta)$.

Sesto problema (punteggio 6/30)

Si calcoli la matrice

$$T(k) = \mathscr{F}_k\left[A^{-1}(x)\right],$$

definita coma la trasformata di Fourier dell'inversa della matrice

$$A(x) = \begin{pmatrix} x^2+2 & 0 & -1 \\ 0 & x^2+2 & 0 \\ -1 & 0 & x^2+2 \end{pmatrix}.$$

Soluzione del sesto Problema

Per valori reali di x la matrice $A(x)$ è hermitiana ed è quindi possibile usare il teorema spettrale. La rappresentazione spettrale della matrice $A(x)$ è

$$A(x) = \sum_{j=1}^{3}\lambda_j(x)P_j\,,$$

dove $\left\{\lambda_j(x)\right\}_{j=1}^3$ e $\left\{P_j\right\}_{j=1}^3$ sono gli insiemi degli autovalori e dei corrispondenti proiettori ortogonali. Questi ultimi verificano anche la condizione

$$\sum_{j=1}^{3}P_j = I\,.$$

L'inversa della matrice $A(x)$ ha la rappresentazione spettrale

$$A^{-1}(x) = \sum_{j=1}^{3}\lambda_j^{-1}(x)P_j\,,$$

inoltre, poiché la trasformata di Fourier è lineare rispetto alla funzione trasformanda, per la matrice $T(k)$ si ha la rappresentazione spettrale

$$T(k) = \sum_{j=1}^{3}\mathscr{F}_k\left[\lambda_j^{-1}(x)\right]P_j\,.$$

È quindi sufficiente, quindi, ricavare le matrici che rappresentano i proiettori e calcolare le trasformate di Fourier degli inversi degli autovalori.
Iniziamo ottenendo gli autovalori della matrice $A(x)$ come soluzioni dell'equazione caratteristica

$$\det(A(x)-\lambda I)=0$$

$$\det\begin{pmatrix} x^2+2-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & x^2+2-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & x^2+2-\lambda \end{pmatrix}=0$$

$$\left(x^2+2-\lambda\right)^3-\left(x^2+2-\lambda\right)=0\,,$$

si hanno i tre autovalori

$$\lambda_1=x^2+1\,,\qquad \lambda_2=x^2+2\,,\qquad \lambda_3=x^2+3\,.$$

Gli autovettori corrispondenti u_1, u_2 e u_3 si ottengono risolvendo le equazioni agli autovalori

$$A(x)u_j=\lambda_j u_j\,,\qquad j=1,2,3\,.$$

$$\begin{pmatrix} x^2+2 & 0 & -1 \\ 0 & x^2+2 & 0 \\ -1 & 0 & x^2+2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_j \\ y_j \\ z_j \end{pmatrix}=\lambda_j\begin{pmatrix} x_j \\ y_j \\ z_j \end{pmatrix}=\left(x^2+j\right)\begin{pmatrix} x_j \\ y_j \\ z_j \end{pmatrix}.$$

Per il primo autovettore, $j=1$, si ha il sistema

$$\begin{pmatrix} x^2+2 & 0 & -1 \\ 0 & x^2+2 & 0 \\ -1 & 0 & x^2+2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}=\left(x^2+1\right)\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} x_1-z_1 \\ y_1 \\ -x_1+z_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

da cui seguono: $y_1=0$ e $x_1=z_1$, quindi, scegliendo $x_1=z_1=1/\sqrt{2}$, il primo autovettore normalizzato è

$$u_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Il secondo autovettore, $j=2$, ha solo una componente non nulla, infatti dal sistema

$$\begin{pmatrix} x^2+2 & 0 & -1 \\ 0 & x^2+2 & 0 \\ -1 & 0 & x^2+2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}=\left(x^2+2\right)\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} -z_2 \\ 0 \\ -x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

si ha $x_2=z_2=0$, mentre y_2 è arbitrario, quindi, posto $y_2=1$, il secondo autovettore normalizzato è

$$u_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Infine, per il terzo autovettore, $j=3$, avremo

$$\begin{pmatrix} x^2+2 & 0 & -1 \\ 0 & x^2+2 & 0 \\ -1 & 0 & x^2+2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}=\left(x^2+3\right)\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} -x_3-z_3 \\ -y_3 \\ -x_3-z_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

da cui si ottengono: $y_3 = 0$ e $x_3 = -z_3$, quindi, scegliendo $x_3 = 1/\sqrt{2}$, il terzo autovettore normalizzato è

$$u_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

I tre autovettori hanno componenti reali e sono ortonormali ne consegue che le componenti dei tre proiettori P_j, $j = 1,2,3$, sono

$$(P_j)^k_m = u^k_j u^m_j \,, \qquad j,k,m = 1,2,3\,,$$

dove u^k_j rappresenta la k-esima componente controvariante del j-esimo autovettore. I tre proiettori sono

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}, \qquad P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad P_1 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Le trasformate di Fourier degli inversi degli autovalori sono

$$\mathscr{F}_k\left[\lambda_j^{-1}(x)\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikx}}{\lambda_j(x)} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikx}}{x^2 + j} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2j}} e^{-\sqrt{j}|k|}\,, \qquad j = 1,2,3\,.$$

Infine otteniamo la matrice $T(k)$ usando la rappresentazione spettrale

$$T(k) = \sum_{j=1}^{3} \mathscr{F}_k\left[\lambda_j^{-1}(x)\right] P_j = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-|k|} + e^{-\sqrt{3}|k|}/\sqrt{3} & 0 & e^{-|k|} - e^{-\sqrt{3}|k|}/\sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{2}e^{-\sqrt{2}|k|} & 0 \\ e^{-|k|} - e^{-\sqrt{3}|k|}/\sqrt{3} & 0 & e^{-|k|} + e^{-\sqrt{3}|k|}/\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Una procedura alternativa consiste nell'utilizzo delle matrici diagonali, ovvero si diagonalizza la matrice $A(x)$ ottenendo $A_d(x)$, attraverso la matrice unitaria ricavata dagli autovettori. A questo punto la trasformata di Fourier dell'inversa di $A_d(x)$ è la matrice diagonale, $T_d(k)$, che ha per elementi le trasformate di Fourier degli inversi degli elementi di $A_d(x)$, ovvero degli autovalori. Infine, la matrice $T(k)$ si calcola come la rappresentazione rispetto alla base canonica della matrice $T_d(x)$.
La matrice unitaria che diagonalizza $A(x)$ è

$$U = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

ovvero si ha

$$A_d(x) = U^\dagger A(x) U = \mathrm{diag}\left(x^2+1, x^2+2, x^2+3\right).$$

Inoltre, diagonalizzando l'inversa si ottiene l'inversa della matrice diagonale, cioè

$$A_d^{-1} = \left(U^\dagger A U\right)^{-1} = \left(U^{-1} A U\right)^{-1} = U^{-1} A^{-1} U = U^\dagger A^{-1} U = \mathrm{diag}\left(1/(x^2+1), 1/(x^2+2), 1/(x^2+3)\right).$$

In virtù della linearità della trasformata di Fourier e del teorema spettrale, la matrice U diagonalizza anche $T(k)$, cioè

$$T_d(k) = U^\dagger T(k) U = \mathscr{F}_k\left[A_d^{-1}(x)\right].$$

Calcoliamo la matrice $T_d(k)$

$$\begin{aligned} T_d(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{diag}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikx} dx}{x^2+1}, \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikx} dx}{x^2+2}, \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikx} dx}{x^2+3}\right) \\ &= \mathrm{diag}\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|k|}, \sqrt{\frac{\pi}{4}} e^{-\sqrt{2}|k|}, \sqrt{\frac{\pi}{6}} e^{-\sqrt{3}|k|}\right) \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, \mathrm{diag}\left(e^{-|k|}, \frac{e^{-\sqrt{2}|k|}}{\sqrt{2}}, \frac{e^{-\sqrt{3}|k|}}{\sqrt{3}}\right). \end{aligned}$$

Infine, otteniamo $T(k)$ come

$$
\begin{aligned}
T(k) &= U T_d(k) U^\dagger \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{|k|} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\sqrt{2}|k|}/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\sqrt{3}|k|}/\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} e^{-|k|}/\sqrt{2} & 0 & e^{-\sqrt{3}|k|}/\sqrt{6} \\ 0 & e^{-\sqrt{2}|k|}/\sqrt{2} & 0 \\ e^{-|k|}/\sqrt{2} & 0 & -e^{-\sqrt{3}|k|}/\sqrt{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-|k|} + e^{-\sqrt{3}|k|}/\sqrt{3} & 0 & e^{-|k|} - e^{-\sqrt{3}|k|}/\sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{2}e^{-\sqrt{2}|k|} & 0 \\ e^{-|k|} - e^{-\sqrt{3}|k|}/\sqrt{3} & 0 & e^{-|k|} + e^{-\sqrt{3}|k|}/\sqrt{3} \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$