# Metodi Matematici per la Fisica

## Prima prova parziale del 3 marzo 2023

Si risolvano cortesemente i seguenti problemi, sapendo che il punteggio assegnato a ciascuna procedura di risoluzione può variare tra lo zero e il massimo indicato ed è stabilito valutando:

1. la correttezza del risultato ottenuto e della procedura utilizzata;
2. la completezza dei passaggi riportati;
3. il livello di esemplificazione con cui sono espressi i risultati (ad esempio un risultato numerico reale non deve contenere l'unità immaginaria);
4. la correttezza del formalismo utilizzato;
5. la chiarezza dell'esposizione e la leggibilità del testo.

### Primo problema (punteggio massimo: 6/30)

Si calcoli l'integrale in valore principale

$$\coffeecup = \Pr\int_0^{2\pi} \frac{\text{sen}^2(\beta)\,d\beta}{\cos(\beta)+\cos(2\beta)}\,.$$

### Soluzione del primo problema

La funzione integranda è meromorfa in quanto rapporto di funzioni intere. Con la sostituzione $z = e^{i\beta}$ si ha

$$\coffeecup = -\frac{i}{2}\Pr\oint_{|z|=1} \frac{-(z-1/z)^2}{z+1/z+z^2+1/z^2}\frac{dz}{z} = \frac{i}{2}\Pr\oint_{|z|=1}\frac{\left(z^2-1\right)^2}{z\,(z^4+z^3+z+1)}dz\,.$$

Il polinomio di quarto grado a denominatore si azzera in $z=-1$ e si ha $z^4+z^3+z+1 = (z+1)\left(z^3+1\right)$ da cui $z^4+z^3+z+1 = (z+1)^2(z-z_1)(z-z_2)$, dove $z_1$ e $z_1$ sono le due radici terze di $-1$ non reali, l'una complessa coniugata dell'altra, $z_{1,2} = e^{\pm i\pi/3}$. Ne consegue che l'integrale può essere scritto come

$$\coffeecup = \frac{i}{2}\Pr\oint_{|z|=1}\frac{\left(z^2-1\right)^2}{z(z+1)^2(z-z_1)(z-z_2)}dz = \frac{i}{2}\Pr\oint_{|z|=1}\frac{(z-1)^2}{z\,(z-z_1)(z-z_2)}dz\,.$$

La funzione integranda ha tre poli semplici: l'origine $z=0$, $z_1 = e^{i\pi/3}$ e $z_2 = e^{-i\pi/3}$, indicati con il simbolo "×" in figura. Gli ultimi due appartengono alla circonferenza unitaria ed è rispetto ad essi che si considera il valore principale.
Consideriamo il percorso d'integrazione $\Gamma_\epsilon$ mostrato in figura, ovvero la circonferenza unitaria dentata internamente in corrispondenza dei poli semplici $z_1$ e $z_2$ con, rispettivamente, gli archi $\gamma_{1,\epsilon}$ e $\gamma_{2,\epsilon}$ di raggio $\epsilon$.
Nel limite $\epsilon\to 0^+$, usando il teorema dei residui, si ha

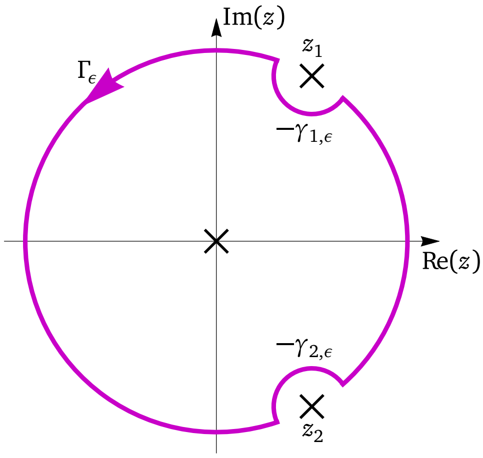
$$\lim_{\epsilon\to 0^+}\frac{i}{2}\oint_{\Gamma_\epsilon}\frac{(z-1)^2}{z\,(z-z_1)(z-z_2)}dz = 2i\pi\,\text{Res}\left[\frac{i}{2}\frac{(z-1)^2}{z\,(z-z_1)(z-z_2)},0\right] = -\pi\,\text{Res}\left[\frac{(z-1)^2}{z\,(z-z_1)(z-z_2)},0\right],$$

considerando, invece, i singoli contributi

$$\lim_{\epsilon\to 0^+}\frac{i}{2}\oint_{\Gamma_\epsilon}\frac{(z-1)^2}{z\,(z-z_1)(z-z_2)}dz = \coffeecup + \lim_{\epsilon\to 0^+}\frac{i}{2}\int_{-\gamma_{1,\epsilon}}\frac{(z-1)^2}{z\,(z-z_1)(z-z_2)}dz + \lim_{\epsilon\to 0^+}\frac{i}{2}\int_{-\gamma_{2,\epsilon}}\frac{(z-1)^2}{z\,(z-z_1)(z-z_2)}dz\,,$$

infine, dall'equazioni che si ottiene uguagliando gli ultimi membri delle precedenti espressioni, si ha l'integrale cercato come

$$\coffeecup = -\pi\,\text{Res}\left[\frac{(z-1)^2}{z\,(z-z_1)(z-z_2)},0\right] + \lim_{\epsilon\to 0^+}\frac{i}{2}\int_{\gamma_{1,\epsilon}}\frac{(z-1)^2}{z\,(z-z_1)(z-z_2)}dz + \lim_{\epsilon\to 0^+}\frac{i}{2}\int_{\gamma_{2,\epsilon}}\frac{(z-1)^2}{z\,(z-z_1)(z-z_2)}dz\,.$$




Il residuo nell'origine è

$$\operatorname{Res}\left[\frac{(z-1)^2}{z\,(z-z_1)\,(z-z_2)},0\right]=\frac{1}{z_1 z_2}=1\,.$$

Come conseguenza del fatto che $z_2=z_1^*$, ovvero che i due suddetti poli sono complessi coniugati, si ha la stessa relazione tra i contributi sugli archi. Il limite dell'integrale sull'arco $\gamma_{1,\epsilon}$ vale

$$\lim_{\epsilon\to0^+}\frac{i}{2}\int_{\gamma_{1,\epsilon}}\frac{(z-1)^2}{z\,(z-z_1)\,(z-z_2)}dz=i\pi\lim_{\epsilon\to0^+}\frac{i}{2}\frac{(z-1)^2}{z\,(z-z_2)}=-\frac{\pi}{2}\frac{(z_1-1)^2}{z_1\,(z_1-z_2)}=-\frac{\pi}{2}\frac{\left(e^{2i\pi/3}\right)^2}{e^{i\pi/3}i\sqrt{3}}=-\frac{i\pi}{2\sqrt{3}}\,,$$

mentre per il secondo su $\gamma_{2,\epsilon}$ si ha

$$\lim_{\epsilon\to0^+}\frac{i}{2}\int_{\gamma_{2,\epsilon}}\frac{(z-1)^2}{z\,(z-z_1)\,(z-z_2)}dz=i\pi\lim_{\epsilon\to0^+}\frac{i}{2}\frac{(z-1)^2}{z\,(z-z_1)}=-\frac{\pi}{2}\frac{(z_2-1)^2}{z_2\,(z_2-z_1)}=-\frac{\pi}{2}\frac{\left(e^{-2i\pi/3}\right)^2}{e^{-i\pi/3}\left(-i\sqrt{3}\right)}=\frac{i\pi}{2\sqrt{3}}\,.$$

Essendo numeri immaginari puri sono l'uno l'opposto dell'altro e quindi la somma è nulla. L'unico contributo all'integrale cercato è quello del residuo nell'origine, che vale uno, quindi

$$\text{☕}=-\pi\operatorname{Res}\left[\frac{(z-1)^2}{z\,(z-z_1)\,(z-z_2)},0\right]=-\pi\,.$$

## Secondo problema (punteggio massimo: 7/30)

Si calcoli l'integrale in valore principale

$$\text{💡}=\Pr\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{d\alpha}{\cos(\alpha)+\cos(2\alpha)}\,.$$

**Attenzione**! L'intervallo d'integrazione non è l'angolo giro.

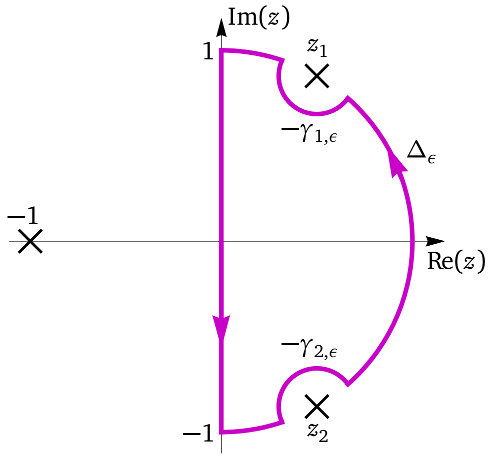
### Soluzione del secondo problema

Con la sostituzione $z=e^{i\alpha}$ si ottiene l'integrale nel piano complesso

$$\text{💡}=-2i\Pr\int_\Omega\frac{dz/z}{z+1/z+z^2+1/z^2}=-2i\Pr\int_\Omega\frac{zdz}{z^4+z^2+z+1}=-2i\Pr\int_\Omega\frac{zdz}{(z+1)^2(z-z_1)(z-z_2)}\,,$$

dove $z_{1,2}=e^{\pm i\pi/3}$ e $\Omega$ è la semicirconferenza unitaria appartenente al semipiano delle parti reali positive, cioè

$$\Omega=\left\{z:z=e^{i\theta},\theta\in[-\pi/2,\pi/2]\right\}\,.$$




Consideriamo il percorso chiuso $\Delta_\epsilon$ mostrato in figura dato dall'unione della semicirconferenza unitaria dentata internamente in corrispondenza dei poli semplici $z_1$ e $z_2$ con archi $\gamma_{1,\epsilon}$ e $\gamma_{2,\epsilon}$, e del segmento di rette di estremi $i$ e $-i$, appartenente all'asse immaginario. Questo percorso non avvolge singolarità della funzione integranda, le stesse sono indicate in figura dal simbolo $\times$, anche nel limite $\epsilon \to 0^+$, ovvero per raggi infinitesimi degli archi $\gamma_{1,\epsilon}$ e $\gamma_{1,\epsilon}$. Consideriamo le due espressioni, in termini dei residui e dei singoli contributi, dell'integrale sul percorso chiuso $\Delta_\epsilon$, si hanno, rispettivamente

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \oint_{\Delta_\epsilon} \frac{z\,dz}{(z+1)^2(z-z_1)(z-z_2)} = 0\,,$$

è nullo in quanto il percorso chiuso non avvolge singolarità della funzione integranda e

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \oint_{\Delta_\epsilon} \frac{z\,dz}{(z+1)^2(z-z_1)(z-z_2)} = -\frac{1}{2i} - \lim_{\epsilon\to 0^+} \oint_{\gamma_{1,\epsilon}} \frac{z\,dz}{(z+1)^2(z-z_1)(z-z_2)} - \lim_{\epsilon\to 0^+} \oint_{\gamma_{2,\epsilon}} \frac{z\,dz}{(z+1)^2(z-z_1)(z-z_2)}$$
$$+ \int_1^{-1} \frac{i^2 y\,dy}{(iy+1)^2(iy-z_1)(iy-z_2)}\,,$$

dove i contributi sugli archi infinitesimi sono sottratti poiché gli stessi archi sono percorsi in senso orario e cioè negativo, mentre l'ultimo integrale rappresenta il contributo lungo il segmento di retta con estremi $i$ e $-i$, in cui si è fatta la sostituzione $z = iy$. Calcoliamo i limiti degli integrali sugli archi, si hanno

$$\begin{aligned}
\lim_{\epsilon\to 0^+} \oint_{\gamma_{1,\epsilon}} \frac{z\,dz}{(z+1)^2(z-z_1)(z-z_2)} &= i\pi \lim_{\epsilon\to 0^+} \frac{z}{(z+1)^2(z-z_1)(z-z_2)}(z-z_1) = i\pi \frac{z_1}{(z_1+1)^2(z_1-z_2)} \\
&= \pi \frac{2\left(1+i\sqrt{3}\right)}{\left(3+i\sqrt{3}\right)^2\sqrt{3}} = \pi \frac{\left(1+i\sqrt{3}\right)\left(1-i\sqrt{3}\right)}{12\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}\,; \\
\lim_{\epsilon\to 0^+} \oint_{\gamma_{2,\epsilon}} \frac{z\,dz}{(z+1)^2(z-z_1)(z-z_2)} &= i\pi \lim_{\epsilon\to 0^+} \frac{z}{(z+1)^2(z-z_1)(z-z_2)}(z-z_1) = i\pi \frac{z_2}{(z_2+1)^2(z_2-z_1)} \\
&= -\pi \frac{2\left(1-i\sqrt{3}\right)}{\left(3-i\sqrt{3}\right)^2\sqrt{3}} = -\pi \frac{\left(1-i\sqrt{3}\right)\left(1+i\sqrt{3}\right)}{12\sqrt{3}} = -\frac{\pi}{3\sqrt{3}}\,,
\end{aligned}$$

sono opposti, il contributo complessivo è nullo. Calcoliamo l'integrale sul segmento di retta con estremi $i$ e $-i$, a tal fine consideriamo lo sviluppo di Mittag-Leffler della funzione integranda

$$\frac{z}{(z+1)^2(z-z_1)(z-z_2)} = \frac{A}{(z+1)^2} + \frac{B_1}{z-z_1} + \frac{B_2}{z-z_2}\,,$$

dove $A$ è il coefficiente $-2$ della serie di Laurent centrata nel polo doppi sensi $z=-1$, mentre $B_1$ e $B_2$ sono i coefficienti $-1$ delle serie di Laurent centrate rispettivamente nei poli semplici $z_1$ e $z_2$. Dalla forma razionale della funzione si evince che il coefficiente $-1$ della serie di Laurent centrata nel polo doppi in $z=-1$ è nullo. Avremo

$$A=\frac{1}{2i\pi}\oint_{|z+1|=r}\frac{zdz}{(z+1)^2(z-z_1)(z-z_2)(z+1)^{-1}}=\frac{1}{2i\pi}\oint_{|z+1|=r}\frac{zdz}{(z+1)(z-z_1)(z-z_2)},$$

con $r\in(0,|z_1+1|)$ e dove la potenza $-1$ a denominatore della funzione integranda del secondo membro si ottiene poiché si sta calcolando il coefficiente $k$-esimo con $k=-2$, ovvero la potenza è: $k+1=-2+1=-1$. Possiamo usare la rappresentazione integrale di Cauchy per ottenere il valore del coefficiente $A$, che coincide con quello della funzione che moltiplica il polo semplice $1/(z+1)$, cioè

$$A=\frac{1}{2i\pi}\oint_{|z+1|=r}\frac{zdz}{(z+1)(z-z_1)(z-z_2)}=\frac{-1}{(-1-z_1)(-1-z_2)}=\frac{-1}{\left(-3/2-i\sqrt{3}/2\right)\left(-3/2+i\sqrt{3}/2\right)}=-\frac{1}{3}.$$

Allo stesso modo, per i coefficienti $B_1$ e quindi $B_2$ si hanno le espressioni

$$B_1=\frac{1}{2i\pi}\oint_{|z-z_1|=d}\frac{zdz}{(z+1)^2(z-z_1)(z-z_2)}=\frac{z_1}{(z_1+1)^2(z_1-z_2)}=\frac{e^{i\pi/3}}{(3/2+i\sqrt{3}/2)^2 i\sqrt{3}}=\frac{-i}{3\sqrt{3}},$$

$$B_2=\frac{1}{2i\pi}\oint_{|z-z_2|=d}\frac{zdz}{(z+1)^2(z-z_1)(z-z_2)}=\frac{z_2}{(z_2+1)^2(z_2-z_1)}=-\frac{e^{-i\pi/3}}{(3/2-i\sqrt{3}/2)^2 i\sqrt{3}}=\frac{i}{3\sqrt{3}}.$$

con $d\in(0,|z_1+1|)$. L'integrale sul tratto rettilineo è

$$\begin{aligned}
\int_{[i,-i]}\frac{zdz}{(z+1)^2(z-z_1)(z-z_2)}&=A\int_{[i,-i]}\frac{dz}{(z+1)^2}+B_1\int_{[i,-i]}\frac{dz}{z-z_1}+B_2\int_{[i,-i]}\frac{dz}{z-z_2}\\
&=iA\int_{-1}^{1}\frac{dy}{(y-i)^2}-B_1\int_{-1}^{1}\frac{dy}{y+iz_1}-B_2\int_{-1}^{1}\frac{dy}{y+iz_2}\\
&=-iA\left.\frac{1}{y-i}\right|_{-1}^{1}-B_1\ln(y+iz_1)\Big|_{-1}^{1}-B_2\ln(y+iz_2)\Big|_{-1}^{2}\\
&=\frac{i}{3}\left(\frac{1}{1-i}+\frac{1}{1+i}\right)+\frac{i}{3\sqrt{3}}\ln\left(\frac{1+iz_1}{-1+iz_1}\,\frac{-1+iz_2}{1+iz_2}\right)\\
&=\frac{i}{3}+\frac{i}{3\sqrt{3}}\ln\left(\frac{1-\sqrt{3}/2+i/2}{-1-\sqrt{3}/2+i/2}\,\frac{-1+\sqrt{3}/2+i/2}{1+\sqrt{3}/2+i/2}\right)\\
&=\frac{i}{3}+\frac{i}{3\sqrt{3}}\ln\left(\frac{(1-\sqrt{3}/2)^2+1/4}{(1+\sqrt{3}/2)^2+1/4}\right)=\frac{i}{3}+\frac{i}{3\sqrt{3}}\ln\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)\\
&=\frac{i}{3}\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\ln\left(2-\sqrt{3}\right)\right).
\end{aligned}$$

Dalla relazione

$$0=-\frac{1}{2i}💡+\int_{[i,-i]}\frac{zdz}{(z+1)^2(z-z_1)(z-z_2)},$$

si ricava integrale cercato come

$$💡=2i\int_{[i,-i]}\frac{zdz}{(z+1)^2(z-z_1)(z-z_2)},$$

che, usando il risultato precedente dà

$$💡=-\frac{2}{3}\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\ln\left(2-\sqrt{3}\right)\right).$$

## Terzo problema (punteggio massimo: 6/30)

Si ottengano le espressione dei coefficienti di tutte le serie di Laurent della funzione

$$😊(z)=\frac{e^{1/(z-1)}}{z+1},$$

con centro in $z=1$.

## Soluzione del terzo problema

La funzione $\smiley(z)$ ha una singolarità essenziale nel punto $z = 1$ e un polo semplice in $z = -1$. Ne consegue che si hanno due serie di Laurent con centro in $z = 1$, la prima convergente nella corona circolare $C(1)_{0,2} = \{z : 0 < |z-1| < 2\}$, di centro $z = 1$ e raggi 0 e 2, dove il raggio esterno è dato dalla distanza tra le due singolarità. La seconda serie di Laurent converge nella corona circolare $C(1)_{2,\infty} = \{z : |z-1| > 2\}$, concentrica alla precedente e con raggi 2 e $\infty$. Consideriamo l'espressione formale dell prima serie

$$\smiley(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k (z-1)^k \,, \qquad \forall\, z \in C(1)_{0,2}$$

Per ottenere l'insieme dei coefficienti $\{A_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ sfruttiamo le serie di Taylor della funzione esponenziale e la formula di somma della serie geometrica. Nella corona circolare $C(1)_{0,2}$, si ha $|z-1|/2 < 1$, quindi

$$\smiley(z) = \frac{e^{1/(z-1)}}{z+1} = \frac{e^{1/(z-1)}}{z-1+2} = \frac{1}{2} e^{1/(z-1)} \frac{1}{1+(z-1)/2} = \frac{1}{2} \sum_{j,l=0}^{\infty} \frac{(-1/2)^l}{j!} (z-1)^{l-j} \,,$$

dove la serie con l'indice $j$ è la serie di Taylor della funzione esponenziale, mentre quella con l'indice $l$ è la serie geometrica, che, nella corona circolare $C(1)_{0,2}$, converge al terzo fattore del penultimo membro. Ovviamente, per opportuni valori degli indici $j, l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, la differenza $l - j$ può assumere un qualsiasi valore in $\mathbb{Z}$, ciò implica che tutti i coefficienti di Laurent sono diversi da zero. Il coefficiente $k$-esimo, cioè il coefficiente della del binomio $(z-1)^k$, con $k \in \mathbb{Z}$, è dato dalla serie

$$A_k = \frac{1}{2} \sum_{j,l=0}^{\infty} \frac{(-1/2)^l}{j!} \delta_{l-j,k} = \frac{1}{2} \sum_{j,l=0}^{\infty} \frac{(-1/2)^l}{j!} \delta_{l,k+j} \,,$$

da cui $l = k + j$, ovvero $j = l - k \ge 0$. Se $k \ge 0$, quest'ultima condizione è inefficace, cioè la somma su $j$ rimane su tutto i naturali compreso lo zero. Se, invece, $k \le -1$, allora $j \ge l - k \ge -k = |k| \ge 1$, si ha quindi che la somma su $j$ contiene solo la coda da $|k| \in \mathbb{N}$. I coefficienti sono quindi definiti dalla duplice legge

$$A_k = \begin{cases} \dfrac{1}{2} \displaystyle\sum_{j=-k}^{\infty} \frac{(-1/2)^{k+j}}{j!} = -\left(-\frac{1}{2}\right)^{k+1} \left( \frac{1}{\sqrt{e}} - \sum_{j=0}^{-k-1} \frac{(-1/2)^j}{j!} \right) & k \le -1 \\[2ex] \dfrac{1}{2} \displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1/2)^{k+j}}{j!} = -\left(-\frac{1}{2}\right)^{k+1} \frac{1}{\sqrt{e}} & k \ge 0 \end{cases} .$$

Consideriamo la seconda serie di Laurent che converge nella corona circolare $C(1)_{2,\infty}$

$$\smiley(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} B_k (z-1)^k \,,$$

anche in questo caso sfruttiamo la serie di Taylor della funzione esponenziale e la somma della serie geometrica che, conseguentemente alla condizione di convergenza, ha ragione $2/(z-1)$, che, $\forall\, z \in C(1)_{2,\infty}$, verifica la condizione $2/|z-1| < 1$. Si ha

$$\smiley(z) = \frac{e^{1/(z-1)}}{z+1} = \frac{e^{1/(z-1)}}{z-1+2} = \frac{1}{z-1} e^{1/(z-1)} \frac{1}{1+2/(z-1)} = \sum_{j,l=0}^{\infty} \frac{(-2)^l}{j!} (z-1)^{-l-j-1} \,.$$

È immediato verificare che la serie consta della sola parte principale, ovvero tutti i coefficienti di Laurent con indice maggiore o uguale di zero sono nulli. Il coefficiente $k$-esimo della parte principale, $\forall\, -k \in \mathbb{N}$, si ottiene come

$$B_k = \sum_{j,l=0}^{\infty} \frac{(-2)^l}{j!} \delta_{-l-j-1,k} \,,$$

da cui $l = -k - j - 1 = |k| - j - 1$. La serie che esprime il $k$-esimo coefficiente $B_k$ si riduce alla somma

$$B_k = \sum_{j=0}^{-k-1} \frac{(-2)^{-k-j-1}}{j!} \,, \qquad \forall\, -k \in \mathbb{N} \,.$$

Ad esempio, i primi tre coefficienti sono

$$B_{-1}=\frac{(-2)^{1-0-1}}{0!}=1\,,\qquad B_{-2}=\frac{(-2)^{2-0-1}}{0!}+\frac{(-2)^{2-1-1}}{1!}=-1\,,\qquad B_{-3}=\frac{(-2)^{3-0-1}}{0!}+\frac{(-2)^{3-1-1}}{1!}+\frac{(-2)^{3-2-1}}{2!}=\frac{5}{2}\,.$$

Infine, anche i coefficienti dell'insieme $\{B_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ possono essere definiti dalla duplice legge

$$B_k=\begin{cases}\displaystyle\sum_{j=0}^{-k-1}\frac{(-2)^{-k-j-1}}{j!} & k\leq -1\\[2ex] 0 & k\geq 0\end{cases}\,.$$

## Quarto problema (punteggio massimo: 6/30)

Si ottenga lo sviluppo di Mittag-Leffler della funzione

$$\Psi(z)=\left(\frac{1}{\mathrm{sen}(z)}+\frac{1}{\cos(z)}\right)^2\,.$$

### Soluzione del quarto problema

Facendo il quadrato e usando la formula di duplicazione della funzione seno si ha

$$\Psi(z)=\frac{\mathrm{sen}^2(z)+\cos^2(z)+2\mathrm{sen}(z)\cos(z)}{\mathrm{sen}^2(z)\cos^2(z)}=\frac{4}{\mathrm{sen}^2(2z)}+\frac{4}{\mathrm{sen}(2z)}\,,$$

da questa espressione si evince che i poli sono gli elementi dell'insieme $\{z_k=k\pi/2\}_{k\in\mathbb{Z}}$. I poli sono di ordine due, infatti si ha

$$\lim_{z\to z_k}\Psi(z)(z-z_k)^n=\begin{cases}0 & n\geq 3\\ \displaystyle\lim_{z\to z_k}\frac{4(z-z_k)^2}{\mathrm{sen}^2(2z)}+\lim_{z\to z_k}\frac{4(z-z_k)^2}{\mathrm{sen}(2z)}=1+0=1 & n=2\\ \text{indeterminato} & n\leq 1\end{cases}\,.$$

Ne consegue che sono nulli tutti i coefficienti della parte principale della serie di Laurent centrata nel $k$-esimo polo $z_k$, $\forall\, k\in\mathbb{Z}$, con indice minore o uguale a tre, ovvero, usando l'espressione integrale,

$$C_j^{(k)}=\frac{1}{2i\pi}\oint_{|z-z_k|=r}\left(\frac{4}{\mathrm{sen}^2(2z)}+\frac{4}{\mathrm{sen}(2z)}\right)\frac{dz}{(z-z_k)^{j+1}}=0\,,\qquad \forall\, k\in\mathbb{Z}\,,\ \forall\, j\in\{\ldots,-5,-4,-3\}\,,$$

con $0<r<\pi/2$ e dove $C_j^{(k)}$ rappresenta il $j$-esimo coefficiente della serie di Laurent della funzione $\Psi(z)$ centrata nel $k$-esimo polo doppio $z_k$, con: $k,j\in\mathbb{Z}$. Possono essere non nulli solo i primi due coefficienti delle parti principali delle serie di Laurent. Si possono ottenere usando la somma della serie geometrica e la serie di Taylor della funzione seno. Consideriamo singolarmente le due funzioni $4/\mathrm{sen}^2(2z)$ e $4/\mathrm{sen}(2z)$. È facile dedurre che la prima, in virtù della parità nell'intorno di ogni polo, rispetto allo stesso polo, ovvero

$$\frac{4}{\mathrm{sen}^2(2(z_k-z))}=\frac{4}{\mathrm{sen}^2(2(z_k+z))}\,,\qquad \forall\, k\in\mathbb{Z}\,,\qquad \forall\, z\in\mathbb{C}\,,$$

contribuirà al solo coefficiente di ordine $-2$, mentre la prima, avendo solo un polo semplice in $z_k$ contribuirà al coefficiente di ordine $-1$. Ne consegue che il coefficiente di ordine $-1$ del $k$-esimo polo può essere ottenuto considerando solo la funzione $4/\mathrm{sen}(2z)$ e, come anticipato, usando la sua serie di Taylor e la somma della serie geometrica, si ha

$$\begin{aligned}\frac{4}{\mathrm{sen}(2z)}&=\frac{4(-1)^k}{\mathrm{sen}(2(z-z_k))}=\frac{4(-1)^k}{2(z-z_k)-2^3(z-z_k)^3/3!+\mathcal{O}\left((z-z_k)^5\right)}\\&=\frac{2(-1)^k}{z-z_k}\frac{1}{1-2^2(z-z_k)^2/3!+2^4(z-z_k)^4/5!+\mathcal{O}\left((z-z_k)^5\right)}\\&=\frac{2(-1)^k}{z-z_k}\left[1+\left(\frac{2^2(z-z_k)^2}{3!}-\frac{2^4(z-z_k)^4}{5!}+\mathcal{O}\left((z-z_k)^5\right)\right)\right.\\&\qquad\left.+\left(\frac{2^2(z-z_k)^2}{3!}-\frac{2^4(z-z_k)^4}{5!}+\mathcal{O}\left((z-z_k)^5\right)\right)^2+\cdots\right]\\&=\frac{2(-1)^k}{z-z_k}+\mathcal{O}(z-z_k)\,,\end{aligned}$$

da cui si evince che il coefficiente −1 della serie di Laurent centrata nel $k$-esimo polo è

$$C_{-1}^{(k)} = 2(-1)^k\,, \qquad \forall\, k \in \mathbb{Z}\,.$$

Per ottenere il coefficiente −2 usiamo la somma della derivata prima rispetto alla ragione della serie geometrica, ovvero,

$$\frac{d}{d\alpha}\frac{1}{1-\alpha} = \frac{1}{(1-\alpha)^2} = \frac{d}{d\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}\alpha^k = \sum_{k=1}^{\infty}k\alpha^{k-1}\,, \qquad |\alpha| < 1\,.$$

La funzione è $4/\mathrm{sen}^2(2z)$, si ha

$$\begin{aligned}
\frac{4}{\mathrm{sen}^2(2z)} &= \frac{4}{\mathrm{sen}^2\left(2\left(z-z_k\right)\right)} = \frac{4}{\left[2\left(z-z_k\right) - 2^3\left(z-z_k\right)^3/3! + \mathcal{O}\left(\left(z-z_k\right)^5\right)\right]^2} \\
&= \frac{1}{\left(z-z_k\right)^2}\frac{1}{\left[1 - 2^2\left(z-z_k\right)^2/3! + 2^4\left(z-z_k\right)^4/5! + \mathcal{O}\left(\left(z-z_k\right)^5\right)\right]^2} \\
&= \frac{1}{\left(z-z_k\right)^2}\left[1 + 2\left(\frac{2^2\left(z-z_k\right)^2}{3!} - \frac{2^4\left(z-z_k\right)^4}{5!} + \mathcal{O}\left(\left(z-z_k\right)^5\right)\right)\right. \\
&\qquad \left. +3\left(\frac{2^2\left(z-z_k\right)^2}{3!} - \frac{2^4\left(z-z_k\right)^4}{5!} + \mathcal{O}\left(\left(z-z_k\right)^5\right)\right)^2 + \cdots\right] \\
&= \frac{1}{\left(z-z_k\right)^2} + \frac{4}{3} + \mathcal{O}\left(\left(z-z_k\right)^2\right)\,,
\end{aligned}$$

il coefficiente −2 della serie di Laurent centrata nel $k$-esimo polo è

$$C_{-2}^{(k)} = 1\,, \qquad \forall\, k \in \mathbb{Z}\,.$$

Lo sviluppo di Mittag-Leffler è

$$\text{❦}(z) = \phi(z) + \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\left(z-z_k\right)^2} + \frac{2(-1)^k}{z-z_k}\right)\,,$$

dove la funzione $\phi(z)$ rappresenta la parte intera di $\text{❦}(z)$ e ha lo stesso comportamento asintotico, cioè

$$\lim_{j\to\infty}\text{❦}(q_j) = \lim_{j\to\infty}\phi(q_j)\,,$$

per ogni successione $\left\{q_j\right\}_{j=1}^{\infty}$ che si accumula all'infinito e tale che $\left\{q_j\right\}_{j=1}^{\infty} \cap \{z_k\}_{k\in\mathbb{Z}} = \emptyset$. Poiché si ha $z_{-k} = -z_k$, è possibile riscrivere la somma come

$$\begin{aligned}
\text{❦}(z) &= \phi(z) + \frac{2}{z} + \frac{1}{z^2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\left(z-z_k\right)^2} + \frac{1}{\left(z+z_k\right)^2} + \frac{2(-1)^k}{z-z_k} + \frac{2(-1)^k}{z+z_k}\right) \\
&= \phi(z) + \frac{2}{z} + \frac{1}{z^2} + 2\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{z^2+z_k^2}{\left(z^2-z_k^2\right)^2} + \frac{2z(-1)^k}{z^2-z_k^2}\right)\,.
\end{aligned}$$

Poiché, per ogni successione $\left\{q_j\right\}_{j=1}^{\infty}$ che si accumuli all'infinito e avente intersezione vuota con l'insieme dei poli $\{z_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ si ha

$$\lim_{j\to\infty}\text{❦}(q_j) \neq \infty\,,$$

si ha che la parte intera $\phi(z)$ è costante, indichiamo con $\phi_0$ il suo valore. Lo sviluppo di Mittag-Leffler diventa

$$\text{❦}(z) = \phi_0 + \frac{2}{z} + \frac{1}{z^2} + 2\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{z^2+z_k^2}{\left(z^2-z_k^2\right)^2} + \frac{2z(-1)^k}{z^2-z_k^2}\right)\,.$$

Per ottenere $\phi_0$ valutiamo l'espressione precedente nell'origine, ovvero, essendo l'origine un polo, studiamo il limite

$$\lim_{z\to 0}\left[\mathfrak{F}(z)-\left(\frac{2}{z}+\frac{1}{z^2}\right)\right]=\phi_0+2\lim_{z\to 0}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{z^2+z_k^2}{\left(z^2-z_k^2\right)^2}+\frac{2z(-1)^k}{z^2-z_k^2}\right).$$

Il termine tra parentesi tonde a primo membro è la parte principale della serie di Laurent della funzione $\mathfrak{F}(z)$ centrata nell'origine, quindi il limite dà il coefficiente zero della stessa serie che, come già ottenuto, è $C_0^{(0)}=4/3$, quindi

$$\frac{4}{3}=\phi_0+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{z_k^2}=\phi_0+\frac{8}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2},$$

la somma della serie degli inversi dei quadrati dei numeri naturali è nota e vale $\pi^2/6$, ne consegue che $\phi_0$ è nullo, infatti

$$\frac{4}{3}=\phi_0+\frac{8}{\pi^2}\frac{\pi^2}{6}=\phi_0+\frac{4}{3}\qquad\Rightarrow\qquad\phi_0=0\,.$$

Alla luce di questo risultato, lo sviluppo di Mittag-Leffler è

$$\mathfrak{F}(z)=\frac{1}{z^2}+\frac{2}{z}+2\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{z^2+z_k^2}{\left(z^2-z_k^2\right)^2}+\frac{2z(-1)^k}{z^2-z_k^2}\right).$$

## Quinto problema (punteggio massimo: 5/30)

Si dimostri la seguente identità

$$\frac{\cos(z\pi)}{z}-\frac{\operatorname{sen}(z\pi)}{\pi z^2}=2z\prod_{j=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{j^2}\right)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{z^2-k^2}\,.$$

### Soluzione del quinto problema

La funzione a primo membro rappresenta la derivata prima della funzione meromorfa $f(z)=\operatorname{sen}(z\pi)/(z\pi)$, infatti

$$f'(z)=\frac{d}{dz}\frac{\operatorname{sen}(z\pi)}{z\pi}=\frac{d\operatorname{sen}(z\pi)}{dz}\frac{1}{z\pi}+\frac{\operatorname{sen}(z\pi)}{\pi}\frac{dz^{-1}}{dz}=\pi\cos(z\pi)\frac{1}{z\pi}-\frac{\operatorname{sen}(z\pi)}{\pi}z^{-2}=\frac{\cos(z\pi)}{z}-\frac{\operatorname{sen}(z\pi)}{\pi z^2}\,.$$

Della funzione $f(z)$ è nota l'espansione di Weierstrass

$$f(z)=\prod_{j=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{j^2}\right),$$

la derivata prima è

$$f'(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{-2z}{k^2}\prod_{j\neq k}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{j^2}\right).$$

Dividiamo e moltiplichiamo per il fattore $k$-esimo $\left(1-z^2/k^2\right)$ così da ottenere prodotti completi, si ha

$$\begin{aligned}f'(z)&=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{-2z}{k^2}\left(1-\frac{z^2}{k^2}\right)^{-1}\left(1-\frac{z^2}{k^2}\right)\prod_{j\neq k}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{j^2}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{-2z}{k^2}\frac{k^2}{k^2-z^2}\prod_{j=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{j^2}\right)\\&=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{-2z}{k^2-z^2}\prod_{j=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{j^2}\right).\end{aligned}$$

Infine, cambiando segno a numeratore e denominatore del termine della somma si arriva l'identità cercata

$$f'(z)=\frac{\cos(z\pi)}{z}-\frac{\operatorname{sen}(z\pi)}{\pi z^2}=2z\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{z^2-k^2}\prod_{j=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{j^2}\right).$$

## Sesto problema (punteggio massimo: 6/30)

Si calcoli l'integrale

$$🐸 = \oint_{|z|=1} \frac{\ln\left(z^2+2\right)}{2z^2-2z+1} dz\,.$$

## Soluzione del sesto Problema

La funzione integranda è polidroma come conseguenza della presenza della funzione logaritmo. I punti di diramazione sono gli zeri del polinomio di secondo grado che costituisce l'argomento del logaritmo, ovvero

$$d_\pm = \pm i\sqrt{2},$$

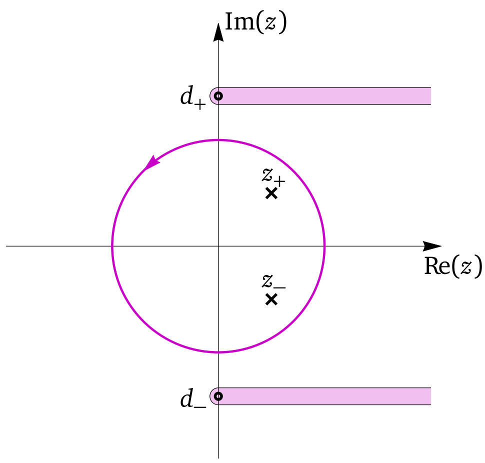
sono indicati nella figura dal simbolo "∘". In corrispondenza di questi punti, definiamo i due tagli:

$$T_\pm = \left\{z : z = x \pm i\sqrt{2}, x \in (0,\infty)\right\}\,,$$

Sono due semirette parallele all'asse reale, l'una complessa coniugata dell'altra, evidenziate nella figura dalle bande viola e disposti in modo tale da non intersecare il percorso d'integrazione, ovvero la circonferenza unitaria. La funzione integranda ha inoltre due poli semplici nei punti

$$z_\pm = \frac{1}{2} \pm \frac{i}{2},$$

indicati nella figura dai simboli "×", sono gli zeri del polinomio di secondo grado a denominatore e, avendo modulo $|z_\pm| = 1/\sqrt{2} < 1$, sono avvolti dal percorso d'integrazione.




Alla luce di queste considerazioni, il valore dell'integrale si ottiene usando il teorema dei residui e si ha

$$\begin{aligned}
🐸 &= 2i\pi\left(\mathrm{Res}\left[\frac{\ln\left(z^2+2\right)}{2z^2-2z+1}, z_- = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}\right] + \mathrm{Res}\left[\frac{\ln\left(z^2+2\right)}{2z^2-2z+1}, z_+ = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right]\right)\\
&= 2i\pi\left(\frac{\ln\left(z_-^2+2\right)}{4z_- - 2} + \frac{\ln\left(z_+^2+2\right)}{4z_+ - 2}\right)\\
&= 2i\pi\left(\frac{\ln\left(z_-^2+2\right)}{-2i} + \frac{\ln\left(z_+^2+2\right)}{2i}\right)\\
&= \pi\left(\ln\left(z_+^2+2\right) - \ln\left(z_-^2+2\right)\right)
\end{aligned}$$

Dimostriamo che la differenza dei logaritmi non dipende dalla determinazione scelta, ovvero dalla forma dei tagli purché questi non intersechino il percorso d'integrazione. Scriviamo il polinomio di secondo grado argomento della funzione logaritmo come

$$z^2+2 = \left(z - i\sqrt{2}\right)\left(z + i\sqrt{2}\right) = \left|z - i\sqrt{2}\right|\left|z + i\sqrt{2}\right| e^{i(\theta_1+\theta_2)}\,,$$

dove $\theta_1$ e $\theta_2$ sono, rispettivamente, le fasi dei binomi $z - i\sqrt{2}$ e $z + i\sqrt{2}$. Ne consegue che

$$
\begin{aligned}
z_-^2 + 2 &= \left(\frac{1-i}{2} - i\sqrt{2}\right)\left(\frac{1-i}{2} + i\sqrt{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{1+\left(2\sqrt{2}+1\right)^2}\,\frac{1}{2}\sqrt{1+\left(2\sqrt{2}-1\right)^2}\,e^{i(\theta_1+\theta_2)} \\
&= \frac{\sqrt{17}}{2}e^{i\left(\arctan\left(-2\sqrt{2}-1\right)+\arctan\left(2\sqrt{2}-1\right)\right)} = \frac{\sqrt{17}}{2}\begin{cases} e^{i\left(-\arctan\left(2\sqrt{2}+1\right)+\arctan\left(2\sqrt{2}-1\right)\right)} & \theta_1 \in (-\pi,\pi) \\ e^{i\left(2\pi-\arctan\left(2\sqrt{2}+1\right)+\arctan\left(2\sqrt{2}-1\right)\right)} & \theta_1 \in (0,2\pi) \end{cases} \\
&= \frac{\sqrt{17}}{2}e^{i\left(\theta_0-\arctan\left(2\sqrt{2}+1\right)+\arctan\left(2\sqrt{2}-1\right)\right)}\,; \\
z_+^2 + 2 &= \left(\frac{1+i}{2} - i\sqrt{2}\right)\left(\frac{1+i}{2} + i\sqrt{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{1+\left(2\sqrt{2}-1\right)^2}\,\frac{1}{2}\sqrt{1+\left(2\sqrt{2}+1\right)^2}\,e^{i(\theta_1+\theta_2)} \\
&= \frac{\sqrt{17}}{2}e^{i\left(\arctan\left(-2\sqrt{2}+1\right)+\arctan\left(2\sqrt{2}+1\right)\right)} = \frac{\sqrt{17}}{2}\begin{cases} e^{i\left(-\arctan\left(2\sqrt{2}-1\right)+\arctan\left(2\sqrt{2}+1\right)\right)} & \theta_1 \in (-\pi,\pi) \\ e^{i\left(2\pi-\arctan\left(2\sqrt{2}-1\right)+\arctan\left(2\sqrt{2}+1\right)\right)} & \theta_1 \in (0,2\pi) \end{cases} \\
&= \frac{\sqrt{17}}{2}e^{i\left(\theta_0-\arctan\left(2\sqrt{2}-1\right)+\arctan\left(2\sqrt{2}+1\right)\right)}\,,
\end{aligned}
$$

con: $\theta_0 = 0$ se $\theta_1 \in (-\pi,\pi)$, ovvero $\theta_0 = 2\pi$ se $\theta_1 \in (0,2\pi)$. I valori sono indipendenti dalla scelta della determinazione della fase $\theta_2$. L'integrale cercato, proporzionale alla differenza dei logaritmi, vale

$$
\begin{aligned}
\text{🐸} &= \pi\left(\ln\left(z_+^2+2\right) - \ln\left(z_-^2+2\right)\right) \\
&= \pi\left(\ln\left(\frac{\sqrt{17}}{2}\right) + i\left(\theta_0 - \arctan\left(2\sqrt{2}-1\right) + \arctan\left(2\sqrt{2}+1\right)\right)\right. \\
&\qquad \left. - \ln\left(\frac{\sqrt{17}}{2}\right) - i\left(\theta_0 - \arctan\left(2\sqrt{2}+1\right) + \arctan\left(2\sqrt{2}-1\right)\right)\right) \\
&= 2i\pi\left(\arctan\left(2\sqrt{2}+1\right) - \arctan\left(2\sqrt{2}-1\right)\right)
\end{aligned}
$$

ed è indipendente dalla determinazione, ovvero dal parametro $\theta_0$. La differenza tra le funzioni arcotangente può essere calcolata considerando l'espressione della stessa funzione in termini della funzione logaritmo. In particolare, usando formule di Eulero, si ha

$$
w = \tan(u) = -i\frac{e^{iu}-e^{-iu}}{e^{iu}+e^{-iu}} = -i\frac{e^{2iu}-1}{e^{2iu}+1} \quad \to \quad e^{2iu}(i+w) = i-w \quad \to \quad e^{2iu} = \frac{i-w}{i+w}\,,
$$

quindi, il valore di $u$, che rappresenta l'arcotangente di $w$ è

$$
u = \arctan(w) = \frac{1}{2i}\ln\left(\frac{i-w}{i+w}\right).
$$

L'integrale cercato è

$$
\begin{aligned}
\text{🐸} &= 2i\pi\left(\arctan\left(2\sqrt{2}+1\right) - \arctan\left(2\sqrt{2}-1\right)\right) = \pi\left(\ln\left(\frac{i-2\sqrt{2}-1}{i+2\sqrt{2}+1}\right) - \ln\left(\frac{i-2\sqrt{2}+1}{i+2\sqrt{2}-1}\right)\right) \\
&= \pi\ln\left(\frac{\left(i-1-2\sqrt{2}\right)\left(i-1+2\sqrt{2}\right)}{\left(i+1+2\sqrt{2}\right)\left(i+1-2\sqrt{2}\right)}\right) = \pi\ln\left(\frac{(i-1)^2-8}{(i+1)^2-8}\right) = \pi\ln\left(\frac{-8-2i}{-8+2i}\right) \\
&= \pi\left(\ln|-8-2i| + i\arctan\left(\frac{1}{4}\right) - \ln|-8+2i| - i\arctan\left(-\frac{1}{4}\right)\right),
\end{aligned}
$$

poiché i moduli sono uguali e le fasi opposte si ha il risultato finale

$$
\text{🐸} = 2i\pi\arctan\left(\frac{1}{4}\right).
$$