# Metodi Matematici per la Fisica

## Prova scritta - 3 luglio 2019

Si risolvano cortesemente i seguenti problemi, sapendo che verranno valutati:

1. la correttezza del risultato ottenuto e della procedura utilizzata;
2. la completezza dei passaggi riportati;
3. il livello di esemplificazione con cui sono espressi i risultati (ad esempio un risultato numerico reale non deve contenere l'unità immaginaria);
4. la correttezza del formalismo utilizzato;
5. la chiarezza dell'esposizione e la leggibilità del testo.

## Primo problema (punteggio: 6/30)

Si calcoli l'integrale

$$X = \oint_{|z|=1} \frac{e^{-(z^*)^2}}{z+\mathrm{Re}(z)} dz \,.$$

### Soluzione del primo problema

Il percorso di integrazione è il cerchio unitario che può essere parametrizzato come: $z(t)=e^{it}$ con $t\in[0,2\pi]$. Con questa parametrizzazione il complesso coniugato e la parte reale sul cerchio unitario possono essere scritti in termini della sola $z(t)$, infatti

$$z^*(t)=e^{-it}=\frac{1}{z(t)}\,, \qquad \mathrm{Re}(z)=\frac{z(t)+z^*(t)}{2}=\frac{z(t)+1/z(t)}{2}\,,$$

quindi la funzione integranda diventa

$$X=\oint_{|z|=1}\frac{e^{-1/z^2}}{z+\frac{z+1/z}{2}}dz=\frac{2}{3}\oint_{|z|=1}\frac{ze^{-1/z^2}}{z^2+1/3}dz\,.$$

Essa ha tre singolarità all'interno del percorso di integrazione, si tratta di due poli semplici $z_\pm=\pm i/\sqrt{3}$, dovuti al polinomio di secondo grado a denominatore e di una singolarità essenziale nell'origine, $z_0=0$, data dall'esponenziale a numeratore. Applicando il teorema dei residui avremo

$$X=2i\pi\frac{2}{3}\left(\mathrm{Res}\left[\frac{ze^{-1/z^2}}{z^2+1/3},z_-\right]+\mathrm{Res}\left[\frac{ze^{-1/z^2}}{z^2+1/3},z_+\right]+\mathrm{Res}\left[\frac{ze^{-1/z^2}}{z^2+1/3},z_0\right]\right)\,.$$

I residui nei poli semplici sono

$$\mathrm{Res}\left[\frac{ze^{-1/z^2}}{z^2+1/3},z_\pm\right]=\frac{z_\pm e^{-1/z_\pm^2}}{2z_\pm}=\frac{e^3}{2}\,.$$

Per ottenere quello nell'origine calcoliamo il coefficiente "$-1$" della serie di Laurent della funzione integranda centrata nell'origine. Sfruttiamo la serie di potenze dell'esponenziale e la somma della serie geometrica, si ha

$$\frac{ze^{-1/z^2}}{z^2+1/3}=3\frac{ze^{-1/z^2}}{3z^2+1}=3z\sum_{j,k=0}^{\infty}\frac{\left(-z^{-2}\right)^k}{k!}\left(-3z^2\right)^j=3\sum_{j,k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+j}3^j}{k!}z^{2(j-k)+1}=3\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_nz^n\,.$$

Il coefficiente cercato si ottiene imponendo la condizione $2(j-k)+1=-1$, ovvero $j=k-1$, per cui

$$C_{-1}=\mathrm{Res}\left[\frac{ze^{-1/z^2}}{z^2+1/3},z_0\right]=3\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2k-1}3^{k-1}}{k!}=-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3^k}{k!}=1-e^3\,,$$

la serie non ha il termine $k = 0$, poiché $k = j + 1$ e $j = 0, 1, \ldots \geq 0$, da cui $k \geq 1$.
Si ha quindi:

$$X = 2i\pi \frac{2}{3} \left( \underbrace{\mathrm{Res}\left[\frac{ze^{-1/z^2}}{z^2+1/3}, z_-\right]}_{=e^3/2} + \underbrace{\mathrm{Res}\left[\frac{ze^{-1/z^2}}{z^2+1/3}, z_+\right]}_{=e^3/2} + \underbrace{\mathrm{Res}\left[\frac{ze^{-1/z^2}}{z^2+1/3}, z_0\right]}_{=1-e^3} \right) = \frac{4i\pi}{3}.$$

## Secondo problema (punteggio 6/30)

Si ottenga il valore principale dell'integrale

$$Y = \mathrm{Pr} \int_{|z|=r} z \frac{\mathrm{Re}(z) - \mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z)} dz,$$

con $r > 0$.

### Soluzione del secondo problema

Seguiamo la procedura del primo problema, ovvero usiamo la parametrizzazione del percorso di integrazione $z(t) = re^{it}$, con $t \in [0, 2\pi]$, per cui il complesso coniugato è proporzionale all'inverso, cioè $z^*(t) = re^{-it} = r^2/z(t)$. È quindi possibile scrivere le parti reale e immaginaria di $z$ come

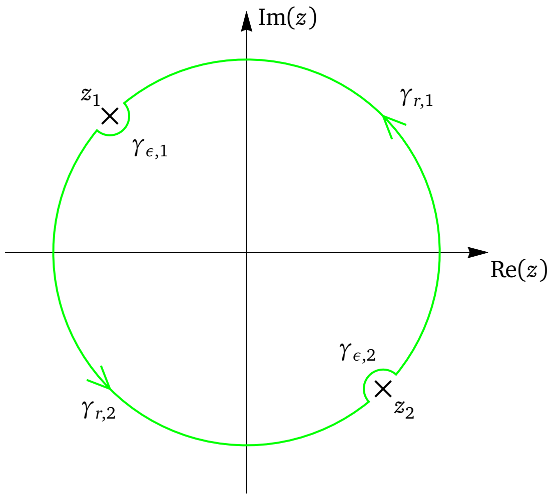
$$\mathrm{Re}(z) = \frac{z + z^*}{2} = \frac{z^2 + r^2}{2z}, \qquad \mathrm{Im}(z) = \frac{z - z^*}{2i} = \frac{z^2 - r^2}{2iz}.$$

Con queste definizioni la funzione integranda assume la forma

$$Y = \mathrm{Pr} \int_{|z|=r} z \frac{i(z^2+r^2) - z^2 + r^2}{i(z^2+r^2) + z^2 - r^2} dz = \mathrm{Pr} \int_{|z|=r} z \frac{z^2(-1+i) + r^2(1+i)}{z^2(1+i) + r^2(-1+i)} dz = \mathrm{Pr} \int_{|z|=r} z \frac{z^2 e^{3i\pi/4} + r^2 e^{i\pi/4}}{z^2 e^{i\pi/4} + r^2 e^{3i\pi/4}} dz$$
$$= \frac{e^{3i\pi/4}}{e^{i\pi/4}} \mathrm{Pr} \int_{|z|=r} z \frac{z^2 + r^2 e^{-i\pi/2}}{z^2 + r^2 e^{i\pi/2}} dz = i \, \mathrm{Pr} \int_{|z|=r} z \frac{z^2 + r^2 e^{-i\pi/2}}{z^2 + r^2 e^{i\pi/2}} dz.$$

Si tratta di una funzione meromorfa con due poli semplici $z_1 = re^{3i\pi/4}$ e $z_2 = re^{7i\pi/4}$. Consideriamo il percorso $\Gamma_\epsilon$ mostrato in figura, costituito dall'unione di quattro archi, ovvero $\Gamma_\epsilon = \gamma_{r,1} \cup (-\gamma_{\epsilon,1}) \cup \gamma_{r,2} \cup (-\gamma_{\epsilon,2})$, con

$$\gamma_{r,1} = \left\{ z : z = re^{i\theta}, \theta \in [-\pi/4 + \epsilon/r, 3\pi/4 - \epsilon/r] \right\}, \qquad \gamma_{r,2} = \left\{ z : z = re^{i\theta}, \theta \in [3\pi/4 + \epsilon/r, 7\pi/4 - \epsilon/r] \right\},$$
$$\gamma_{\epsilon,1} = \left\{ z : z = z_1 + \epsilon e^{i\theta}, \theta \in [-5\pi/4, \pi/4] \right\}, \qquad \gamma_{\epsilon,2} = \left\{ z : z = z_2 + \epsilon e^{i\theta}, \theta \in [\pi/4, 5\pi/4] \right\}.$$




L'integrale su $\Gamma_\epsilon$ è nullo in quanto le singolarità dell'integranda non sono avvolte dallo stesso percorso, inoltre, nel limite $\epsilon \to 0$, la somma dei contributi sugli archi $\gamma_{r,1}$ e $\gamma_{r,2}$ tende all'integrale in valore principale cercato, per cui si ha

$$\begin{aligned}
0 = i \lim_{\epsilon\to 0^+} \oint_{\Gamma_\epsilon} z \frac{z^2 + r^2 e^{-i\pi/2}}{z^2 + r^2 e^{i\pi/2}} dz &= i \,\mathrm{Pr}\!\int_{\Gamma_\epsilon} z \frac{z^2 + r^2 e^{-i\pi/2}}{z^2 + r^2 e^{i\pi/2}} dz \\
&\quad + i \lim_{\epsilon\to 0^+} \left( \int_{-\gamma_{1,\epsilon}} z \frac{z^2 + r^2 e^{-i\pi/2}}{z^2 + r^2 e^{i\pi/2}} dz + \int_{-\gamma_{2,\epsilon}} z \frac{z^2 + r^2 e^{-i\pi/2}}{z^2 + r^2 e^{i\pi/2}} dz \right) \\
&= i \,\mathrm{Pr}\!\int_{\Gamma_\epsilon} z \frac{z^2 + r^2 e^{-i\pi/2}}{z^2 + r^2 e^{i\pi/2}} dz - i \left( i\pi A_1 + i\pi A_2 \right) \\
&= \underbrace{i \,\mathrm{Pr}\!\int_{\Gamma_\epsilon} z \frac{z^2 + r^2 e^{-i\pi/2}}{z^2 + r^2 e^{i\pi/2}} dz}_{=Y} + \pi \left( A_1 + A_2 \right) ,
\end{aligned}$$

da cui

$$Y = -\pi \left( A_1 + A_2 \right) .$$

I valori di $A_1$ e $A_2$ sono dati dai limiti

$$A_{1,2} = \lim_{\epsilon\to 0^+} z \frac{z^2 + r^2 e^{-i\pi/2}}{z^2 + r^2 e^{i\pi/2}} \left( z - z_{1,2} \right) = z_{1,2} \frac{r^2 \left( -e^{i\pi/2} + e^{-i\pi/2} \right)}{2 z_{1,2}} = -i r^2 ,$$

e quindi il risultato finale

$$Y = -\pi \left( A_1 + A_2 \right) = 2 i \pi r^2 .$$

## Terzo problema (punteggio 6/30)

Si calcoli il prodotto infinito

$$P(z) = \prod_{k=0}^{\infty} \left( 1 - \frac{z^4}{(2k+1)^4} \right) .$$

**Suggerimento**. Potrebbe essere utile considerare un'espansione di Weierstrass.

### Soluzione del terzo problema

Possiamo interpretare il prodotto infinito come una espansione di Weierstrass. In generale per una funzione intera che abbia zeri nei punti dell'insieme $\{z_k\}_k \subset \mathbb{C}$ con molteplicità $\{\beta_k\}_k \subset \mathbb{N}$ e nel caso in cui $0 \notin \{ z_k \}_k$, ovvero: la funzione non si annulla nell'origine, si ha l'espansione di Weierstrass

$$f(z) = f(0) e^{z f'(0)/f(0)} \prod_k \left( 1 - \frac{z}{z_k} \right)^{\beta_k} e^{\beta_k z / z_k} .$$

Riscriviamo il prodotto dato fattorizzando ulteriormente

$$\begin{aligned}
P(z) &= \prod_{k=0}^{\infty} \left( 1 - \frac{z^2}{(2k+1)^2} \right) \left( 1 + \frac{z^2}{(2k+1)^2} \right) \\
&= \prod_{k=0}^{\infty} \left( 1 - \frac{z}{2k+1} \right) \left( 1 + \frac{z}{2k+1} \right) \left( 1 - \frac{z}{(2k+1)i} \right) \left( 1 + \frac{z}{(2k+1)i} \right) .
\end{aligned}$$

In questa forma i fattori hanno la forma di quelli dell'espansione di Weierstrass, per cui si hanno zeri reali nei numeri dispari positivi e negativi e zeri puramente immaginari, che hanno parti immaginarie corrispondenti agli zeri reali, ovvero ai dispari positivi e negativi. Il fatto di avere zeri positivi e negativi permette di riscrivere il prodotto inserendo anche gli esponenziali che sono coppie di inversi, cioè

$$
\begin{aligned}
P(z) &= \prod_{k=0}^{\infty}\left(1-\frac{z}{2k+1}\right)\left(1+\frac{z}{2k+1}\right)\left(1-\frac{z}{(2k+1)i}\right)\left(1+\frac{z}{(2k+1)i}\right) \\
&= \prod_{k=0}^{\infty}\left(1-\frac{z}{2k+1}\right)e^{\frac{z}{2k+1}}\left(1+\frac{z}{2k+1}\right)e^{-\frac{z}{2k+1}}\left(1-\frac{z}{(2k+1)i}\right)e^{\frac{z}{(2k+1)i}}\left(1+\frac{z}{(2k+1)i}\right)e^{-\frac{z}{(2k+1)i}}\,.
\end{aligned}
$$

A questo punto è possibile includere i casi "positivo" e "negativo" in un unico fattore estendendo il prodotto a $\mathbb{Z}$, cioè

$$
P(z) = \prod_{k=-\infty}^{\infty}\left(1-\frac{z}{2k+1}\right)e^{\frac{z}{2k+1}}\left(1-\frac{z}{(2k+1)i}\right)e^{\frac{z}{(2k+1)i}}\,,
$$

si hanno quindi due insiemi di zeri semplici $\{x_k = 2k+1\}_{k=-\infty}^{\infty}$ e $\{z_k = (2k+1)i\}_{k=-\infty}^{\infty}$.
Questo prodotto rappresenta l'espansione di Weierstrass di una funzione che ha infiniti zeri semplici nei punti dell'insieme $\{x_k = 2k+1\}_{k=-\infty}^{\infty} \cup \{z_k = (2k+1)i\}_{k=-\infty}^{\infty}$ e che ha derivata prima nulla nell'origine. Le funzioni che hanno un comportamento periodico e quindi anche zeri periodici sono ovviamente le funzioni trigonometriche. In particolare la funzione seno ha zeri semplici nei multipli di $\pi$, ovvero nei multipli pari di $\pi/2$, mentre la funzione coseno li ha nei multipli dispari di $\pi/2$. Per cui una funzione che abbia zeri semplici nei punti dell'insieme $\{x_k = 2k+1\}_{k=-\infty}^{\infty}$ è

$$
f(z) = \cos\left(\frac{\pi z}{2}\right)\,,
$$

quella che li ha nei punti dell'insieme $\{z_k = (2k+1)i\}_{k=-\infty}^{\infty}$ sarà banalmente

$$
g(z) = \cos\left(\frac{i\pi z}{2}\right) = \cosh\left(\frac{\pi z}{2}\right)\,.
$$

La funzione che si ottiene dal prodotto delle precedenti avrà sia gli zeri della funzione coseno che quelli della funzione coseno iperbolico, ovvero avrà zeri semplici nei punti dell'insieme $\{x_k = 2k+1\}_{k=-\infty}^{\infty} \cup \{z_k = (2k+1)i\}_{k=-\infty}^{\infty}$, proprio come richiesto, rappresenta quindi il prototipo di quella cercata. Proviamo a farne l'espansione di Weierstrass, detta $F(z) = \cos(\pi z/2)\cosh(\pi z/2)$, si ha

$$
F(z) = F(0)e^{zF'(0)/F(0)}\prod_{k=-\infty}^{\infty}\left(1-\frac{z}{x_k}\right)e^{z/x_k}\left(1-\frac{z}{z_k}\right)e^{z/z_k}\,,
$$

il valore nell'origine della funzione e della sua derivata prima sono

$$
F(0) = \cos(0)\cosh(0) = 1\,, \qquad F'(0) = \Big(-\operatorname{sen}(z)\cosh(z) - \cos(z)\operatorname{senh}(z)\Big)_{z=0} = 0\,,
$$

quindi

$$
F(z) = \prod_{k=-\infty}^{\infty}\left(1-\frac{z}{x_k}\right)e^{z/x_k}\left(1-\frac{z}{z_k}\right)e^{z/z_k}
$$

usando, infine, le identità $x_k = 2k+1 = -x_{-k-1}$ e $z_k = (2k+1)i = -z_{-k-1}$, con $k = 0, 1, 2, \ldots$, si ottiene il prodotto infinito iniziale,

$$
\begin{aligned}
F(z) &= \prod_{k=0}^{\infty}\left(1-\frac{z}{2k+1}\right)\left(1+\frac{z}{2k+1}\right)\left(1-\frac{z}{(2k+1)i}\right)\left(1+\frac{z}{(2k+1)i}\right) \\
&= \prod_{k=0}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{(2k+1)^2}\right)\left(1+\frac{z^2}{(2k+1)^2}\right) \\
&= \prod_{k=0}^{\infty}\left(1-\frac{z^4}{(2k+1)^4}\right)\,.
\end{aligned}
$$

Si evince che il prodotto infinito $P(z)$ coincide con la funzione $F(z)$, ovvero

$$
P(z) = \cos\left(\frac{z\pi}{2}\right)\cosh\left(\frac{z\pi}{2}\right)\,.
$$

## QUARTO PROBLEMA (PUNTEGGIO 6/30)

Dopo aver ricavato i valori del parametro reale $\alpha$ nell'intervallo $[0,\pi)$ per cui la matrice

$$A(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{sen}(\alpha) & 0 \\ \cos(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) \\ 0 & -\mathrm{sen}(\alpha) & -1 \end{pmatrix},$$

risulta non diagonalizzabile, si ottenga la rappresentazione spettrale

$$A(\pi/2) = \sum_{k=1}^{3} \lambda_k P_k\,,$$

ovvero si ottengano l'insieme $\{\lambda_k\}_{k=1}^3$ degli autovalori di $A(\pi/2)$ e quello dei corrispondenti proiettori ortogonali $\{P_k\}_{k=1}^3$.

### SOLUZIONE DEL QUARTO PROBLEMA

Calcoliamo gli autovalori per un generico $\alpha \in [0,2\pi]$ risolvendo l'equazione secolare

$$\begin{aligned} \det(A-\lambda I) &= 0 \\ \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & -\mathrm{sen}(\alpha) & 0 \\ \cos(\alpha) & -\lambda & \cos(\alpha) \\ 0 & -\mathrm{sen}(\alpha) & -1-\lambda \end{pmatrix} &= 0 \\ (1-\lambda)\big[\lambda(1+\lambda)+\mathrm{sen}(\alpha)\cos(\alpha)\big] - \mathrm{sen}(\alpha)\cos(\alpha)(1+\lambda) &= 0 \\ -\lambda^3 + \lambda\big(1-2\,\mathrm{sen}(\alpha)\cos(\alpha)\big) &= 0\,. \end{aligned}$$

Si hanno i tre autovalori

$$\lambda_0 = 0\,, \qquad \lambda_{1,2} = \pm\sqrt{1-2\,\mathrm{sen}(\alpha)\cos(\alpha)} = \pm\sqrt{1-\mathrm{sen}(2\alpha)}\,,$$

solo gli autovalori $\lambda_1$ e $\lambda_2$ dipendono dal parametro $\alpha$. Studiamo il caso in cui non ci sia degenerazione. Ciò accade se $\lambda_{1,2} \neq 0$, ovvero se $\mathrm{sen}(2\alpha) \neq 1$ che, considerando che il dominio di $\alpha$ è l'intervallo $[0,\pi)$, implica $\alpha \neq \pi/4$.
In generale le componenti $x_k$, $y_k$ e $z_k$ del $k$-esimo autovettore $v_k$, con $k = 0,1,2$, si ottengono dall'equazione agli autovalori

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda_k & -\mathrm{sen}(\alpha) & 0 \\ \cos(\alpha) & -\lambda_k & \cos(\alpha) \\ 0 & -\mathrm{sen}(\alpha) & -1-\lambda_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ovvero dal sistema

$$\begin{cases} (1-\lambda_k)x_k - \mathrm{sen}(\alpha)y_k = 0 \\ \cos(\alpha)x_k - \lambda_k y_k + \cos(\alpha)z_k = 0 \\ -\mathrm{sen}(\alpha)y_k - (1+\lambda_k)z_k = 0 \end{cases}.$$

Nel caso in cui $\mathrm{sen}(\alpha) \neq 0$ e $\lambda_k \neq \pm 1$ ($\alpha \neq 0$, $\alpha \neq \pi/2$), sottraendo membro a membro la prima e la terza equazione si ha

$$(1-\lambda_k)x_k + (1+\lambda_k)z_k = 0\,,$$

posto $x_k = 1$ otteniamo

$$z_k = \frac{\lambda_k - 1}{\lambda_k + 1}\,, \qquad y_k = \frac{1-\lambda_k}{\mathrm{sen}(\alpha)}\,.$$

Per verificare la dipendenza lineare degli autovettori e quindi la diagonalizzabilità della matrice $A(\alpha)$ calcoliamo il determinante della matrice

$$\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ y_0 & y_1 & y_2 \\ z_0 & z_1 & z_2 \end{pmatrix} &= \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1/\mathrm{sen}(\alpha) & (1-\lambda_1)/\mathrm{sen}(\alpha) & (1-\lambda_2)/\mathrm{sen}(\alpha) \\ -1 & (\lambda_1-1)/(\lambda_1+1) & (\lambda_2-1)/(\lambda_2+1) \end{pmatrix} \\
&= \frac{1-\lambda_1}{\mathrm{sen}(\alpha)}\frac{\lambda_2-1}{\lambda_2+1} - \frac{1-\lambda_2}{\mathrm{sen}(\alpha)}\frac{\lambda_1-1}{\lambda_1+1} - \frac{1}{\mathrm{sen}(\alpha)}\frac{\lambda_2-1}{\lambda_2+1} - \frac{1-\lambda_2}{\mathrm{sen}(\alpha)} + \frac{1}{\mathrm{sen}(\alpha)}\frac{\lambda_1-1}{\lambda_1+1} + \frac{1-\lambda_1}{\mathrm{sen}(\alpha)} \\
&= \frac{1-\lambda_1}{\mathrm{sen}(\alpha)}\frac{\lambda_2-1}{\lambda_2+1} - \frac{1-\lambda_2}{\mathrm{sen}(\alpha)}\frac{\lambda_1-1}{\lambda_1+1} - \frac{1}{\mathrm{sen}(\alpha)}\frac{\lambda_2-1}{\lambda_2+1} + \frac{\lambda_2-\lambda_1}{\mathrm{sen}(\alpha)} + \frac{1}{\mathrm{sen}(\alpha)}\frac{\lambda_1-1}{\lambda_1+1} \\
&= \frac{-\lambda_1(\lambda_2-1)}{\mathrm{sen}(\alpha)(\lambda_2+1)} + \frac{\lambda_2(\lambda_1-1)}{\mathrm{sen}(\alpha)(\lambda_1+1)} + \frac{\lambda_2-\lambda_1}{\mathrm{sen}(\alpha)} \\
&= \frac{-\lambda_1(\lambda_2-1)(\lambda_1+1)+\lambda_2(\lambda_1-1)(\lambda_2+1)+(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_1+1)(\lambda_2+1)}{\mathrm{sen}(\alpha)(\lambda_1+1)(\lambda_2+1)} \\
&= \frac{-2\lambda_1\lambda_2(\lambda_1+1)+2\lambda_1\lambda_2(\lambda_2+1)}{\mathrm{sen}(\alpha)(\lambda_1+1)(\lambda_2+1)} \\
&= 2\lambda_1\lambda_2\frac{\lambda_2-\lambda_1}{\mathrm{sen}(\alpha)(\lambda_1+1)(\lambda_2+1)}\,.
\end{aligned}$$

Poichè si hanno le condizioni: $\lambda_1 \neq \lambda_2$; $\lambda_1, \lambda_2 \neq -1$; $\mathrm{sen}(\alpha) \neq 0$, il determinate è non nullo e quindi la matrice è diagonalizzabile.
Nel caso $\alpha = 0$, che implica $\mathrm{sen}(\alpha) = 0$ e $\cos(\alpha) = 1$, gli autovalori sono

$$\lambda_0 = 0\,, \qquad \lambda_{1,2} = \pm 1\,,$$

e il sistema da cui si ottengono le componenti dell'autovettori $v_0$ e quindi l'autovettore sono

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 1 \\ z_0 = 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad v_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Le componenti del secondo autovettore, relativo all'autovalore $\lambda_1 = 1$,

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ x_1 - y_1 + z_1 = 0 \\ -2z_1 = 0 \end{cases} \qquad \underset{\text{normalizzazione}}{\Longrightarrow} \qquad v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Infine il terzo autovettore, $v_2$, relativo all'autovalore $\lambda_2 = -1$,

$$\begin{cases} -2x_2 = 0 \\ x_2 + y_2 + z_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \qquad \underset{\text{normalizzazione}}{\Longrightarrow} \qquad v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Sono linearmente indipendenti, infatti

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}.$$

Nel caso $\alpha = \pi/2$, che implica $\mathrm{sen}(\alpha) = 1$ e $\cos(\alpha) = 0$, gli autovalori sono gli stessi del caso con $\alpha = 0$

$$\lambda_0 = 0\,, \qquad \lambda_{1,2} = \pm 1\,,$$

ma cambia la forma della matrice. Infatti il sistema da cui si ottengono le componenti dell'autovettori $v_0$ e quindi l'autovettore sono

$$\begin{cases} x_0 - y_0 = 0 \\ 0 = 0 \\ -y_0 - z_0 = 0 \end{cases} \qquad \underset{\text{normalizzazione}}{\Longrightarrow} \qquad v_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Le componenti del secondo autovettore, relativo all'autovalore $\lambda_1 = 1$,

$$\begin{cases} -y_1 = 0 \\ -y_1 = 0 \\ -y_1 - 2z_1 = 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Infine il terzo autovettore, $v_2$, relativo all'autovalore $\lambda_2 = -1$,

$$\begin{cases} -2x_2 - y_2 = 0 \\ y_2 = 0 \\ -y_2 = 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Sono linearmente indipendenti, infatti

$$\det \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 0 \\ -1/\sqrt{3} & 0 & 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Consideriamo, infine, il caso di massima degenerazione, ovvero $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = 0$, che si ha per $\alpha = \pi/4$. Il sistema per ottenere le componenti degli autovettori diventa

$$\begin{cases} x_k - y_k/\sqrt{2} = 0 \\ x_k + z_k = 0 \\ -y_k/\sqrt{2} - z_k = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} x_k - y_k/\sqrt{2} = 0 \\ x_k + z_k = 0 \end{cases}, \qquad k = 0, 1, 2.$$

Consideriamo i due possibili casi $x_k \neq 0$ e $x_k = 0$, nel primo si ha, ad esempio per $k = 0$,

$$\begin{cases} 1 - y_0/\sqrt{2} = 0 \\ 1 + z_0 = 0 \end{cases} \qquad \underset{\text{normalizzazione}}{\Longrightarrow} \qquad v_0 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Posto invece $x_{1,2} = 0$ si ha che gli autovettori corrispondenti coincidono con il vettore nullo, infatti

$$\begin{cases} -y_{1,2}/\sqrt{2} = 0 \\ +z_{1,2} = 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad v_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Sono quindi linearmente dipendenti, ne consegue che la matrice $A(\pi/4)$ non è diagonalizzabile, mentre lo è per ogni altro valore di $\alpha$ nell'intervallo $[0, \pi)$.
Gli autovalori e di $A(\pi/2)$ sono, come già visto,

$$\lambda_0 = 0, \qquad \lambda_{1,2} = \pm 1.$$

Poiché gli autovettori corrispondenti

$$v_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

non sono ortogonali non è possibile definire i proiettori in termini dei prodotti delle componenti ci ciascun autovettore. Li otteniamo, invece, valutando i polinomi

$$p_k(x) = \prod_{j \neq k} \frac{x - \lambda_j}{\lambda_k - \lambda_j}, \qquad k = 0, 1, 2,$$

sulla matrice $A(\pi/2)$, per cui avremo

$$P_k(A(\pi/2)) = \prod_{j \neq k} \frac{A(\pi/2) - \lambda_j I}{\lambda_k - \lambda_j}, \qquad k = 0, 1, 2,$$

dove $I$ è la matrice identità $3 \times 3$.
Avendo che

$$A(\pi/2) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

i proiettori sono

$$P_0 = \frac{(A(\pi/2) - I)(A(\pi/2) + I)}{\lambda_1 \lambda_2} = -\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix};$$
$$P_1 = \frac{A(\pi/2)(A(\pi/2) + I)}{\lambda_1(\lambda_1 - \lambda_2)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$
$$P_2 = \frac{A(\pi/2)(A(\pi/2) - I)}{\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La rappresentazione spettrale della matrcie $A(\pi/2)$ è

$$\begin{aligned} A(\pi/2) &= \lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 \\ &= \lambda_0 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

## Quinto problema (punteggio 6/30)

Sia $\hat{A}$ un operatore normale definito nello spazio di Hilbert a tre dimensioni di cui sono noti l'autovalore non degenere $\alpha_1 = e^{4i\pi/3}$, il determinante $\det(\hat{A}) = 1$ e la traccia $\mathrm{Tr}(\hat{A}) = 0$. Dopo aver ottenuto lo spettro completo dell'operatore, si determinino i coefficienti $a_1$, $a_2$ e $a_3$ per i quali è verificata la seguente identità

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^j \hat{A}^j = \hat{I} + a_1 \hat{A} + a_2 \hat{A}^2 + a_3 \hat{A}^3.$$

### Soluzione del quinto problema

Il determinante e la traccia sono rispettivamente il prodotto e la somma degli autovalori, per cui si hanno

$$1 = \det(\hat{A}) = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 = e^{4i\pi/3} \alpha_2 \alpha_3 \qquad \Rightarrow \qquad \alpha_3 = \frac{e^{-4i\pi/3}}{\alpha_2},$$
$$0 = \mathrm{Tr}(\hat{A}) = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = e^{4i\pi/3} + \alpha_2 + \frac{e^{-4i\pi/3}}{\alpha_2}.$$

Poiché il determinante non è nullo nessuno degli autovalori può essere nullo ed è lecito dividere e moltiplicare per $\alpha_2$. Dall'ultima identità si ottiene un'equazione di secondo grado per il secondo autovalore

$$\alpha_2^2 + \alpha_2 e^{4i\pi/3} + e^{-4i\pi/3} = 0,$$

da cui, usando $e^{4i\pi/3} = -1/2 - i\sqrt{3}/2$,

$$
\begin{aligned}
(\alpha_2)_{1,2} &= \frac{-e^{4i\pi/3} \pm \sqrt{e^{8i\pi/3} - 4e^{-4i\pi/3}}}{2} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \pm \sqrt{-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - 4\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \pm \sqrt{3\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \pm \sqrt{3e^{-i\pi/3}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \pm \sqrt{3}e^{-i\pi/6}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \pm \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \pm \left(\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right] \\
&= \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 \\[2ex] \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{3}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = e^{2i\pi/3} \end{cases} .
\end{aligned}
$$

Le due scelte sono equivalenti, infatti, con $\alpha_2 = 1$, si ha la terna

$$\alpha_1 = e^{4i\pi 3}\,, \qquad \alpha_2 = 1\,, \qquad \alpha_3 = \frac{e^{-4i\pi 3}}{\alpha_2} = e^{-4i\pi 3} = e^{2i\pi/3}\,;$$

mentre con $\alpha_2 = e^{2i\pi/3}$ si ha

$$\alpha_1 = e^{4i\pi 3}\,, \qquad \alpha_2 = e^{2i\pi 3}\,, \qquad \alpha_3 = \frac{e^{-4i\pi 3}}{\alpha_2} = e^{-6i\pi 3} = 1\,.$$

Nel seguito useremo la seconda terna.
Per valutare la serie di potenze dell'operatore $\hat{A}$ studiamo l'azione della sua potenza intera $n \in \mathbb{N}$. A tal fine consideriamo una base ortonormale di sui autovettori $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^{3}$, che esiste in quanto l'operatore è normale. Dato un generico vettore $|v\rangle$, con $|v\rangle = v^j|e_j\rangle$, si ha

$$\hat{A}^n|v\rangle = v^j\alpha_j^n|e_j\rangle = v^1e^{4ni\pi/3}|e_1\rangle + v^2e^{2ni\pi/3}|e_2\rangle + v^3|e_3\rangle\,,$$

in particolare se $n$ è un multiplo di 3, $n = 3m$, con $m \in \mathbb{N}$, si ha

$$\hat{A}^{3m}|v\rangle = v^j\alpha_j^{3m}|e_j\rangle = v^1e^{4mi\pi}|e_1\rangle + v^2e^{2mi\pi}|e_2\rangle + v^3|e_3\rangle = v^j|e_j\rangle = |v\rangle\,,$$

da cui: $\hat{A}^{3m} = \hat{I}$, o meglio $\hat{A}^3 = \hat{I}$, dove $\hat{I}$ è l'operatore identità.
La serie data può essere scritta come

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^j\hat{A}^j &= \sum_{j=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{3k}\hat{A}^{3k} + \left(-\frac{1}{2}\right)\hat{A}\sum_{j=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{3k}\hat{A}^{3k} + \left(-\frac{1}{2}\right)^2\hat{A}^2\sum_{j=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{3k}\hat{A}^{3k} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{3k}\underbrace{\hat{A}^{3k}}_{=\hat{I}}\left(\hat{I} + \left(-\frac{1}{2}\right)\hat{A} + \left(-\frac{1}{2}\right)^2\hat{A}^2\right) \\
&= \hat{I}\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{3k} - \frac{1}{2}\hat{A}\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{3k} + \frac{1}{4}\hat{A}^2\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{3k} \\
&= \frac{8}{9}\hat{I} - \frac{4}{9}\hat{A} + \frac{1}{9}\hat{A}^2\,.
\end{aligned}
$$

Confrontando con l'identità proposta

$$\sum_{j=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^j\hat{A}^j = \hat{I} + a_1\hat{A} + a_2\hat{A}^2 + a_3\hat{A}^3 = (1 + a_3)\hat{I} + a_1\hat{A} + a_2\hat{A}^2\,,$$

dove si è posto $\hat{A}^3 = \hat{I}$, si ottengono i valori numerici dei coefficienti

$$a_1 = -\frac{4}{9}, \qquad a_2 = \frac{1}{9}, \qquad a_3 = -\frac{1}{9}.$$

## Sesto problema (punteggio 6/30)

Si ottenga in $L^2(\mathbb{R})$ la norma della derivata $n$-esima, con $n \in \mathbb{N}$, della funzione

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}.$$

### Soluzione del sesto Problema

Dobbiamo calcolare l'integrale

$$\left\| \frac{d^n f}{dx^n} \right\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{d^n f}{dx^n}(x) \right|^2 dx, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Verifichiamo che come la funzione $f(x)$ anche tutte le derivate sono funzioni a quadrato sommabili in $\mathbb{R}$, infatti per la $f(x)$ si ha, dato $R > 0$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \right|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{x^2} dx = \underbrace{\int_{|x|<R} \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{x^2} dx}_{=Q_R<\infty} + \int_{|x|>R} \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{x^2} dx \le Q_R + \int_{|x|>R} \frac{dx}{x^2} = Q_R + \frac{2}{R} < \infty,$$

dove $Q_R$ è una quantità finita in quanto la singolarità nell'origine è eliminabile, ne consegue che $\operatorname{sen}(x)/x \in L^2(\mathbb{R})$. La derivata $n$-esima della funzione è

$$\frac{d^n}{dx^n} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \left( \frac{d^j}{dx^j} \frac{1}{x} \right) \frac{d^{n-j}}{dx^{n-j}} \operatorname{sen}(x) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^j \frac{j!}{x^{j+1}} \frac{d^{n-j}}{dx^{n-j}} \operatorname{sen}(x),$$

poiché le derivate pari della funzione seno sono ancora funzioni seno con segni alterni mentre quelle dispari sono funzioni coseno, anch'esse con segni alterni, si ha per il modulo la seguente limitazione

$$\left| \frac{d^n}{dx^n} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \right| = \left| \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^j \frac{j!}{x^{j+1}} \frac{d^{n-j}}{dx^{n-j}} \operatorname{sen}(x) \right| \le \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \frac{j!}{|x|^{j+1}}.$$

L'integrale del modulo quadro della deriva $n$-esima è limitato di conseguenza, ovvero, per $R > 1$,

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{d^n}{dx^n} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \right|^2 dx &= \underbrace{\int_{|x|<R} \left| \frac{d^n}{dx^n} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \right|^2 dx}_{=P_R<\infty} + \int_{|x|>R} \left| \frac{d^n}{dx^n} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \right|^2 dx \\
&\le P_R + \int_{|x|>R} \left[ \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \frac{j!}{|x|^{j+1}} \right]^2 dx \\
&\le P_R + \int_{|x|>R} \frac{1}{x^2} \left[ \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} j! \right]^2 dx = P_R + \frac{2}{R} \left[ \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} j! \right]^2 < \infty,
\end{aligned}$$

dove $P_R$ è una quantità finita, si ha quindi

$$\frac{d^n}{dx^n} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \in L^2(\mathbb{R}).$$

Usiamo il teorema di Plancherel, ovvero l'identità tra la norma al quadrato della derivata $n$-esima della funzione e quella della sua trasformata di Fourier

$$\left\| \frac{d^n f}{dx^n} \right\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{d^n f}{dx^n}(x) \right|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \mathscr{F}_k \left[ \frac{d^n f}{dx^n} \right] \right|^2 dk = \left\| \mathscr{F}_k \left[ \frac{d^n f}{dx^n} \right] \right\|^2.$$

La trasformata di Fourier della derivata $n$-esima, che abbiamo dimostrato essere una funzione a quadrato sommabile in $\mathbb{R}$, si può scrivere come

$$\mathscr{F}_k\left[\frac{d^n f}{dx^n}\right] = (ik)^n \mathscr{F}_k\left[f\right], \qquad n \in \mathbb{N},$$

ne consegue che

$$\left\|\mathscr{F}_k\left[\frac{d^n f}{dx^n}\right]\right\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left|(ik)^n \mathscr{F}_k\left[f\right]\right|^2 dk = \int_{-\infty}^{\infty} k^{2n} \left|\mathscr{F}_k\left[f\right]\right|^2 dk\,.$$

La trasformata di Fourier della funzione $f(x)$ è

$$\mathscr{F}_k\left[f\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{sen}(x)}{x} e^{-ikx} dx\,,$$

l'integranda ha nell'origine una singolarità eliminabile è quindi possibile deformare con continuità il percorso di integrazione come

$$\mathbb{R} \to \Gamma_\epsilon = (-\infty, -\epsilon] \cup \left(-\left\{z : z = \epsilon e^{i\theta}, \theta \in [0,\pi]\right\}\right) \cup [\epsilon, \infty)\,,$$

ovvero aggirando l'origine con un arco di raggio $\epsilon$ percorso in senso orario, senza cambiare il valore dell'integrale, si ha

$$\mathscr{F}_k\left[f\right] = \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\Gamma_\epsilon} \frac{\mathrm{sen}(z)}{z} e^{-ikz} dz\,.$$

Usando la notazione esponenziale e il lemma di Jordan negli opportuni intervalli di $k$, cioè

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}_k\left[f\right] &= \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\Gamma_\epsilon} \frac{e^{iz(1-k)} - e^{iz(-1-k)}}{2iz} dz \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \begin{cases}
0 + 0 = 0 & k < -1 \quad \Rightarrow \begin{cases} (1-k) > 2 \\ (-1-k) > 0 \end{cases} \\
0 - \mathrm{Res}\left[-\frac{e^{iz(-1-k)}}{z}, 0\right] = 0 - (-1) = 1 & -1 < k < 1 \quad \Rightarrow \begin{cases} (1-k) > 0 \\ (-1-k) < 0 \end{cases} \\
-\mathrm{Res}\left[\frac{e^{iz(1-k)}}{z}, 0\right] - \mathrm{Res}\left[-\frac{e^{iz(-1-k)}}{z}, 0\right] = -1 + 1 = 0 & k > 1 \quad \Rightarrow \begin{cases} (1-k) < 0 \\ (-1-k) < -2 \end{cases}
\end{cases},
\end{aligned}$$

si ottiene che la trasformata di Fourier è la funzione rettangolare

$$\mathscr{F}_k\left[f\right] = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \begin{cases} 1 & |k| < 1 \\ 0 & |k| > 1 \end{cases}.$$

Sostituendo questo risultato nell'espressone della norma al quadrato della derivata $n$-esima

$$\left\|\mathscr{F}_k\left[\frac{d^n f}{dx^n}\right]\right\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} k^{2n} \left|\mathscr{F}_k\left[f\right]\right|^2 dk\,. = \frac{\pi}{2} \int_{-1}^{1} k^{2n} dk = \frac{\pi}{2n+1}\,,$$

ovvero

$$\left\|\frac{d^n f}{dx^n}\right\| = \sqrt{\frac{\pi}{2n+1}}\,.$$