Metodi Matematici per la Fisica

Prova scritta - 3 luglio 2018

Si risolvano cortesemente i seguenti problemi, sapendo che verranno valutati:

1. la correttezza del risultato ottenuto e della procedura utilizzata;
2. la completezza dei passaggi riportati;
3. il livello di esemplificazione con cui sono espressi i risultati (ad esempio un risultato numerico reale non deve contenere l'unità immaginaria);
4. la correttezza del formalismo utilizzato;
5. la chiarezza dell'esposizione e la leggibilità del testo.

Primo problema (punteggio: 6/30)

Si calcoli l'integrale

$$J = \int_{|z-1|=1} \exp\left(\frac{z^2 - z - 6}{z-1}\right) dz\,,$$

il percorso d'integrazione è la circonferenza di centro $z = 1$ e raggio unitario, esprimendo il risultato in termini delle funzioni di Bessel modificate di primo tipo $I_1(z)$, che sono rappresentate dalla serie

$$I_\alpha(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{2m+\alpha}}{m!\,\Gamma(m+\alpha+1)}\,.$$

Soluzione del primo problema

L'integranda ha, al finito, la sola singolarità essenziale in $z = 1$, che rappresenta un polo semplice per l'esponente dell'esponenziale. Tale esponente è una funzione meromorfa, rapporto di due polinomi, la cui serie di Laurent centrata in $z = 1$ si ottiene dalla serie di Taylor del numeratore. Infatti si ha

$$\begin{aligned}
\frac{z^2 - z - 6}{z-1} &= \frac{\left(z^2 - z - 6\right)\Big|_{z=1} + \frac{d\left(z^2-z-6\right)}{dz}\Big|_{z=1}(z-1) + \frac{d^2\left(z^2-z-6\right)}{dz^2}\Big|_{z=1}\frac{1}{2}(z-1)^2}{z-1} \\
&= \frac{-6 + (z-1) + (z-1)^2}{z-1} = \frac{-6}{z-1} + 1 + (z-1) \equiv \frac{C_{-1}}{z-1} + C_0 + C_1(z-1)\,,
\end{aligned}$$

con: $C_{-1} = -6$ e $C_0 = C_1 = 1$. Lo sviluppo di Laurent dell'integranda in $z = 1$ è

$$\exp\left[\frac{C_{-1}}{z-1} + C_0 + C_1(z-1)\right] = e^{C_0} e^{C_{-1}/(z-1)} e^{C_1(z-1)} = e^{C_0} \sum_{k,j=0}^{\infty} \frac{C_{-1}^k C_1^j}{k!\,j!}(z-1)^{j-k} \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n (z-1)^n\,,$$

il residuo coincide con il coefficiente della potenza "-1", D_{-1}, che si ottiene, ancora in forma di serie, dalla doppia serie con la condizione $j - k = -1$. Posto $j = k - 1$, la serie in j può essere eliminata, mentre quella in k ha limite inferiore 1, non può avere lo 0 poiché $j \geq 0$ e $k = j + 1 \geq 1$, si ha

$$D_{-1} = e^{C_0} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_{-1}^k C_1^{k-1}}{k!(k-1)!} = e^{C_0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_{-1}^{k+1} C_1^k}{(k+1)!\,k!} = e^{C_0} C_{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(C_{-1}C_1\right)^k}{k!(k+1)!}\,.$$

Le funzioni di Bessel modificate di primo tipo $I_1(z)$ hanno rappresentazione

$$I_1(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{2m+1}}{m!\,\Gamma(m+2)} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{2m+1}}{m!(m+1)!}\,,$$

ne consegue che

$$D_{-1} = e^{C_0} C_{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\sqrt{C_{-1}C_1}\right)^{2k}}{k!(k+1)!} . = \frac{e^{C_0} C_{-1}}{\sqrt{C_{-1}C_1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\sqrt{C_{-1}C_1}\right)^{2k+1}}{k!(k+1)!} = \frac{e^{C_0} C_{-1}}{\sqrt{C_{-1}C_1}} I_1\left(2\sqrt{C_{-1}C_1}\right) .$$

In definitiva l'integrale cercato vale

$$J = \int_{|z-1|=1} \exp\left(\frac{z^2-z-6}{z-1}\right) dz = 2i\pi \operatorname{Res}\left[\exp\left(\frac{z^2-z-6}{z-1}\right), z=1\right] = 2i\pi D_{-1} = \frac{-12i\pi e}{\sqrt{-6}} I_1\left(2\sqrt{-6}\right) ,$$

ovvero

$$J = -2\sqrt{6}\,\pi e\, I_1\left(2i\sqrt{6}\right) .$$

Secondo problema (punteggio 6/30)

Si ottenga il valore dell'integrale

$$Q = \oint_{\Gamma} \frac{\operatorname{senh}(z)}{\cosh(z)-2} dz ,$$

dove Γ è il quadrato centrato nell'origine, con lati paralleli agli assi e di lunghezza 2π, ovvero i quattro vertici sono: $z_1 = \pi(1+i)$, $z_1 = \pi(-1+i)$, $z_3 = \pi(-1-i)$ e $z_4 = \pi(1-i)$.

Soluzione del secondo problema

L'integranda è una funzione meromorfa, i cui poli al finito coincidono con gli zeri del denominatore, ovvero con le soluzione dell'equazione

$$\cosh(z) - 2 = 0 .$$

Facendo la sostituzione $w = e^z$ si ottiene l'equazione di secondo grado in w

$$w^2 - 4w + 1 = 0 ,$$

che ammette le soluzioni

$$w_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3} \qquad \Longrightarrow \qquad z_{1,2}^{(k)} = \ln\left(2\pm\sqrt{3}\right) + 2ik\pi , \qquad k \in \mathbb{Z} .$$

Questi poli sono allineati lungo le rette parallele all'asse immaginario e simmetriche rispetto ad esso, di equazioni $\operatorname{Re}(z) = \ln(2\pm\sqrt{3})$. Si tratta di poli semplici, infatti, $\forall\, k \in \mathbb{Z}$,

$$\lim_{z\to z_{1,2}^{(k)}} \frac{z - z_{1,2}^{(k)}}{\cosh(z)-2} = \lim_{z\to z_{1,2}^{(k)}} \frac{1}{\operatorname{senh}(z)} = \frac{1}{\operatorname{senh}\left(z_{1,2}^{(k)}\right)} = \frac{2}{2\pm\sqrt{3} - \frac{1}{2\pm\sqrt{3}}} = \frac{2\left(2\pm\sqrt{3}\right)}{\left(2\pm\sqrt{3}\right)^2 - 1} = \frac{2\pm\sqrt{3}}{3\pm2\sqrt{3}} \frac{3\mp2\sqrt{3}}{3\mp2\sqrt{3}} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} .$$

Inoltre hanno tutti lo stesso residuo unitario

$$\operatorname{Res}\left[\frac{\operatorname{senh}(z)}{\cosh(z)-2}, z = z_{1,2}^{(k)}\right] = \lim_{z\to z_{1,2}^{(k)}} \frac{\operatorname{senh}(z)}{\cosh(z)-2}\left(z - z_{1,2}^{(k)}\right) = 1 .$$

Solo i due poli $z_{1,2}^{(0)} = \ln\left(2\pm\sqrt{3}\right)$ sono interni al quadrato Γ, in particolare $z_1^{(0)}$ e $z_2^{(0)}$ sono reali e l'uno l'opposto dell'altro, essendo gli argomenti del logaritmo l'uno l'inverso dell'altro. Il valore dell'integrale è

$$Q = \oint_{\Gamma} \frac{\operatorname{senh}(z)}{\cosh(z)-2} dz = 2i\pi\left(\operatorname{Res}\left[\frac{\operatorname{senh}(z)}{\cosh(z)-2}, z = z_1^{(0)}\right] + \operatorname{Res}\left[\frac{\operatorname{senh}(z)}{\cosh(z)-2}, z = z_2^{(0)}\right]\right) = 4i\pi .$$

Terzo problema (punteggio 6/30)

La funzione $f(z)$ ha la rappresentazione

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a^{kz} \,,$$

con $a > 1$.

- Si stabilisca il dominio di convergenza della rappresentazione;
- si sommi la serie ottenendone l'espressione analitica completa;
- si stabiliscano le posizioni e la natura delle singolarità;
- si determinino i primi quattro coefficienti non nulli della serie di Laurent di $f(z)$, centrata nell'origine e convergente nella corona circolare di superficie minore.

Soluzione del terzo problema

Si tratta di una serie geometrica di ragione a^z, ne consegue che il dominio di convergenza è

$$D_0 = \{z : |a^z| < 1\} = \{z : \mathrm{Re}(z) < 0\} \,,$$

ovvero il semipiano delle parti reali negative, infatti, poiché $a > 1$ e quindi $\ln(a) > 0$, si ha

$$1 > |a^z| = \left| e^{z\ln(a)} \right| = e^{\mathrm{Re}(z)\ln(a)} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{Re}(z) < 0 \,.$$

La somma della serie e quindi la forma analitica completa della funzione è

$$f(z) = \frac{1}{1 - a^z} \,.$$

Ovviamente questa funzione ha un dominio di analiticità D più ampio di D_0,

$$D = \{z : a^z \neq 1\} \,,$$

coincide con tutto il piano complesso privato di un insieme numerabile di punti isolati, rappresentato dalle soluzioni dell'equazione $a^z = 1$. In particolare, i punti di singolarità z_k sono

$$a^{z_k} = e^{2ik\pi} \qquad \Rightarrow \qquad z_k = \frac{2ik\pi}{\ln(a)} \,, \qquad k \in \mathbb{Z} \,,$$

tali punti rappresentano gli elementi di una successione simmetrica di immaginari puri che si accumula all'infinito. Si tratta di poli semplici ed hanno tutti lo stesso residuo

$$\mathrm{Res}\left[f(z), z = z_k\right] = \lim_{z \to z_k} f(z)(z - z_k) = \lim_{z \to z_k} \frac{z - z_k}{1 - e^{z\ln(a)}} = \lim_{z \to z_k} \frac{1}{-\ln(a) a^z} = -\frac{1}{\ln(a)} \neq 0 \,.$$

Gli sviluppi in serie di Laurent centrati nell'origine convergono nelle corone circolari

$$C_k = \{z : 2k\pi/\ln(a) < |z| < 2(k+1)\pi/\ln(a)\} \,, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \,,$$

di superfici

$$A_k = \frac{4\pi^3}{\ln^2(a)} (2k + 1) \,.$$

La più piccola è C_0, che ha raggio interno nullo, raggio esterno pari a $2\pi/\ln(a)$ e superficie $A_0 = 4\pi^3/\ln^2(a)$.
Per determinare i primi quattro coefficienti non nulli della prima serie di Laurent centrata nell'origine sfruttiamo la serie di Taylor della funzione potenza a denominatore e la serie geometrica, nel limite $z\ln(a) \to 0$ si ha

$$\begin{aligned}
f(z) = \frac{1}{1 - a^z} = \frac{1}{1 - e^{z\ln(a)}} &= \frac{1}{-z\ln(a) - (z\ln(a))^2/2! + O\left[(z\ln(a))^3\right]} \\
&= -\frac{1}{z\ln(a)} \frac{1}{1 + (z\ln(a))/2! + O\left[(z\ln(a))^2\right]} \\
&= -\frac{1}{z\ln(a)} \left[1 - \left(\frac{z\ln(a)}{2!} + \frac{(z\ln(a))^2}{3!} + \ldots\right) + \left(\frac{z\ln(a)}{2!} + \frac{(z\ln(a))^2}{3!} + \ldots\right)^2 + \ldots\right] .
\end{aligned}$$

Consideriamo le prime cinque potenze di $z\ln(a)$ nella parentesi quadra,

$$
\begin{aligned}
f(z) = &-\frac{1}{z\ln(a)}\left[1-\underbrace{\frac{z\ln(a)}{2!}}_{()}+(z\ln(a))^2\left(\underbrace{-\frac{1}{6}}_{()}\underbrace{+\frac{1}{4}}_{()^2}\right)+(z\ln(a))^3\left(\underbrace{-\frac{1}{24}}_{()}\underbrace{+\frac{1}{6}}_{()^2}\underbrace{-\frac{1}{8}}_{()^3}\right)\right.\\
&\left.+(z\ln(a))^4\left(\underbrace{-\frac{1}{120}}_{()}\underbrace{+\frac{1}{36}+\frac{1}{24}}_{()^2}\underbrace{-\frac{3}{24}}_{()^3}\underbrace{+\frac{1}{16}}_{()^4}\right)+\ldots\right]\\
= &-\frac{1}{z\ln(a)}+\frac{1}{2}-\frac{z\ln(a)}{12}+\frac{(z\ln(a))^3}{720}+\ldots,
\end{aligned}
$$

dove il simbolo $()^n$ indica che il termine corrispondente proviene dalla potenza n-esima della serie: $z\ln(a)/2!+(z\ln(a))^2/3!+\ldots$. I primi quattro coefficienti non nulli sono C_{-1}, C_0, C_1 e C_3, poiché C_2 è nullo, e valgono

$$
C_{-1} = -\frac{1}{\ln(a)}, \qquad C_0 = \frac{1}{2}, \qquad C_1 = -\frac{\ln(a)}{12}, \qquad C_3 = \frac{\ln^3(a)}{720}.
$$

Quarto problema (punteggio 6/30)

Dopo aver dimostrato che anche per la norma degli operatori lineari definiti in spazi di Hilbert a dimensione finita, E_N, vale la diseguaglianza triangolare, si verifichi che, per ogni operatore $\hat{T}: E_N \to E_N$,

$$
\left\|\hat{T}\right\| \le N^2 \max_{j,k=1,\ldots,N}\left\{\left|T^j_k\right|\right\},
$$

dove i valori T^j_k, con $j,k=1,\ldots,N$, sono gli elementi della matrice T, che rappresenta l'operatore rispetto a una base ortonormale arbitraria di E_N.

Soluzione del quarto problema

Data un generica coppia di operatori lineari definiti nello spazio di Hilbert E_N, $\hat{A},\hat{B}: E_N \to E_N$ e detto $\hat{S}$ l'operatore somme $\hat{S}=\hat{A}+\hat{B}$, si ha

$$
\left\|\hat{S}\right\| = \left\|\hat{A}+\hat{B}\right\| = \sup_{\|v\|=1}\left\{\left\|\left(\hat{A}+\hat{B}\right)|v\rangle\right\|\right\} = \sup_{\|v\|=1}\left\{\left\|\hat{A}|v\rangle+\hat{B}|v\rangle\right\|\right\}.
$$

Usando la disuguaglianza triangolate per i vettori $\hat{A}|v\rangle$ e $\hat{B}|v\rangle$ e il fatto che l'estremo superiore della somma sia minore o al più uguale alla somma degli estremi superiori, si ha

$$
\left\|\hat{S}\right\| = \sup_{\|v\|=1}\left\{\left\|\hat{A}|v\rangle+\hat{B}|v\rangle\right\|\right\} \le \sup_{\|v\|=1}\left\{\left\|\hat{A}|v\rangle\right\|+\left\|\hat{B}|v\rangle\right\|\right\} \le \sup_{\|v\|=1}\left\{\left\|\hat{A}|v\rangle\right\|\right\}+\sup_{\|v\|=1}\left\{\left\|\hat{B}|v\rangle\right\|\right\} = \left\|\hat{A}\right\|+\left\|\hat{B}\right\|.
$$

Data una generica base ortonormale di E_N, ogni operatore $\hat{T}: E_N \to E_N$ può essere scritto come la somma degli N^2 operatori dell'insieme $\left\{\hat{t}_{(j,k)}\right\}_{j,k=1}^N$, definiti in modo tale che la lora rappresentazione rispetto alla base data sia una matrice che ha solo l'elemento (j,k) non nullo. Dette T e $t_{(j,k)}$ le matrici che rappresentano rispettivamente gli operatori $\hat{T}$ e $\hat{t}_{(j,k)}$, rispetto alla base data, si ha

$$
\hat{T} = \sum_{j,k=1}^N \hat{t}_{(j,k)} \hookleftarrow T = \sum_{j,k=1}^N t_{(j,k)} = \sum_{j,k=1}^N \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ldots & 0 & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & T^j_k & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ldots & 0 & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}. \tag{1}
$$

In altri termini, l'elemento (m,n) della matrice $t_{(j,k)}$ è

$$
\left(t_{(j,k)}\right)^m_n = \delta^m_k \delta^j_n T^n_m = \begin{cases} T^j_k & \text{se } (m,n)=(j,k) \\ 0 & \text{se } (m,n)\neq(j,k) \end{cases}.
$$

La norma della matrice $t_{(j,k)}$ coincide con il modulo dell'unico elemento non nullo. Infatti, $\forall |v\rangle \in E_N$, la norma del vettore che si ottiene dall'azione di $\hat{t}_{(j,k)}$ sullo stesso vettore $|v\rangle$ é

$$\left\| \hat{t}_{(j,k)} |v\rangle \right\| = \sqrt{\sum_{m=1}^{N} \left| \left(t_{(j,k)} \right)^m_{\ n} v^n \right|^2} = \sqrt{\sum_{m=1}^{N} \left| \delta^m_k \delta^j_n T^n_m v^n \right|^2} = \sqrt{\sum_{m=1}^{N} \left| \delta^m_k T^j_m v^j \right|^2} = \left| T^j_k v^j \right| .$$

Per la norma dell'operatore $\hat{t}_{(j,k)}$ si ha

$$\left\| \hat{t}_{(j,k)} \right\| = \sup_{|v\rangle \neq |0\rangle} \left\{ \frac{\left\| \hat{t}_{(j,k)} |v\rangle \right\|}{\| v \|} \right\} = \sup_{|v\rangle \neq |0\rangle} \left\{ \frac{\left| T^j_k v^j \right|}{\sqrt{\sum_{m=1}^N |v^m|^2}} \right\} \leq \sup_{|v\rangle \neq |0\rangle} \left\{ \left| T^j_k \right| \right\} = \left| T^j_k \right| .$$

La norma coincide con $\left| T^j_k \right|$, poiché scegliendo $|v\rangle$ parallelo alla direzione j-esima, ovvero tale che abbia la sola j-esima componente non nulla, per cui $\|v\| = |v^j|$, la precedente relazione vale con l'identità, si ha cioè

$$\left\| \hat{t}_{(j,k)} \right\| = \left| T^j_k \right| .$$

Usando la disuguaglianza triangolare per le norme degli operatori, la decomposizione di Eq. (1) e il risultato precedente si ottiene la relazione richiesta, infatti

$$\left\| \hat{T} \right\| = \left\| \sum_{j,k=1}^{N} \hat{t}_{(j,k)} \right\| \leq \sum_{j,k=1}^{N} \left\| \hat{t}_{(j,k)} \right\| = \sum_{j,k=1}^{N} \left| T^j_k \right| \leq \max_{j,k=1,\ldots,N} \left\{ \left| T^j_k \right| \right\} \sum_{j,k=1}^{N} = N^2 \max_{j,k=1,\ldots,N} \left\{ \left| T^j_k \right| \right\} .$$

Quinto problema (punteggio 5/30)

Si determini lo spettro discreto della matrice

$$C(w) = \begin{pmatrix} w & 1 & 1 & 1 \\ 1 & w & 1 & 1 \\ 1 & 1 & w & 1 \\ 1 & 1 & 1 & w \end{pmatrix} ,$$

con $w \in \mathbb{C}$.

Suggerimento. Si potrebbe esprimere lo spettro discreto di $C(w)$ in termini di quello di $C(0)$, che può essere calcolato più facilmente.

Soluzione del quinto problema

La matrice $C(w)$ può essere posta nella forma

$$C(w) = C(0) + w\, I ,$$

ne consegue che se u è autovettore di $C(w)$ con autovalore $\lambda_{(w)}$, ovvero vale l'equazione agli autovalori

$$C(w) u = (C(0) + w\, I) u = C(0) u + w\, u = \lambda_{(w)} u ,$$

u è anche autovettore di $C(0)$ con autovalore $\lambda_0 = \lambda_{(w)} - w$. In generale, se l'insieme σ_0 rappresenta lo spettro discreto di $C(0)$ allora lo spettro discreto di $C(w)$ è $\sigma_w = \sigma_0 + w = \{\eta : \eta - w \in \sigma_0\}$. Gli elementi dello spettro discreto di $C(0)$ si ottengono come soluzioni dell'equazione caratteristica

$$\det(C(0) - \lambda\, I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = 0 .$$

Si tratta di un'equazione di quarto grado in λ le cui soluzione possono essere ottenute scrivendo opportunamente i quattro sotto-determinanti di ordine tre, infatti

$$
\begin{aligned}
-\lambda \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} &= 0 \\
-\lambda \left(-\lambda(\lambda^2-1)+2(\lambda+1)\right) - \left(\lambda^2+2\lambda+1\right) + \left(-\lambda^2-2\lambda-1\right) - \left(\lambda^2+2\lambda+1\right) &= 0 \\
\lambda(\lambda+1)\left(\lambda^2-\lambda-2\right) - 3(\lambda+1)^2 &= 0 \\
\lambda(\lambda+1)^2(\lambda-2) - 3(\lambda+1)^2 &= 0 \\
(\lambda+1)^2\left(\lambda^2-2\lambda-3\right) &= 0 \\
(\lambda+1)^3(\lambda-3) &= 0 \,.
\end{aligned}
$$

Le soluzioni, ovvero gli autovalori, sono

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1\,, \qquad \lambda_4 = 3\,.$$

Lo spettro discreto della generica matrice $C(w)$ è

$$\sigma_w = \left\{\lambda_{(w)1} = \lambda_{(w)2} = \lambda_{(w)3} = -1+w, \lambda_{(w)4} = 3+w\right\}\,.$$

Sesto problema (punteggio 6/30)

Si determini la funzione $f(x)$ che verifica l'equazione

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-y|}\frac{df}{dy}dy = e^{-|x|}\,.$$

Soluzione del sesto Problema

Facendo la trasformata di Fourier (TF) di ambo i membri si ottiene un'equazione lineare nella TF della soluzione, ovvero

$$
\begin{aligned}
-k^2\tilde{f}(k) - \sqrt{2\pi}\,\mathscr{F}_k\left[e^{-|x|}\right]k^2\tilde{f}(k) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{k^2+1} \\
-k^2\tilde{f}(k) - \frac{2}{k^2+1}k^2\tilde{f}(k) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{k^2+1} \\
\tilde{f}(k) &= -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{k^2\left(k^2+3\right)}\,.
\end{aligned}
$$

La soluzione è l'anti-TF di questa funzione

$$f(x) = \mathscr{F}_{-x}\left[\tilde{f}(k)\right] = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\mathscr{F}_{-x}\left[\frac{1}{k^2+3}\right] - \mathscr{F}_{-x}\left[\frac{1}{k^2}\right]\right)\,.$$

La prima anti-TF dell'ultimo membro ha il valore noto

$$\mathscr{F}_{-x}\left[\frac{1}{k^2+3}\right] = \sqrt{\frac{\pi}{6}}e^{-\sqrt{3}|x|}\,.$$

Per la seconda si ha

$$\begin{aligned}\mathscr{F}_{-x}\left[\frac{1}{k^2}\right] &= ix\mathscr{F}_{-x}\left[\frac{1}{k}\right] = \frac{ix}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{Pr}\!\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ikx}}{k}dk = \frac{ix}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ikx}}{k-i\epsilon}dk - i\pi\right)\\ &= \frac{ix}{\sqrt{2\pi}}\begin{cases} 2i\pi\,\mathrm{Res}[k=0]-i\pi = i\pi & x>0\\ 0-i\pi=-i\pi & x<0\end{cases}\\ &= -\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,x\,\mathrm{Segno}[x]\,.\end{aligned}$$

In definitiva la soluzione è

$$f(x)=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\sqrt{\frac{\pi}{6}}e^{-\sqrt{3}|x|}+\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,x\,\mathrm{Segno}[x]\right)=\frac{1}{3\sqrt{3}}\left(e^{-\sqrt{3}|x|}+\sqrt{3}\,x\,\mathrm{Segno}[x]\right)\,.$$