Metodi Matematici per la Fisica

Prova scritta - 30 aprile 2015

Si svolgano cortesemente i seguenti esercizi.

Esercizio 1 (punteggio: 4/30)

Si studi il comportamento dell'integrale in valore principale

$$P_n = \mathrm{Pr}\int_{-\infty}^{\infty} r^n \, dr$$

al variare di n in $\mathbb{Z}$.

Soluzione 1

Consideriamo i seguenti casi.

1. $\underline{n = 2k,\ k = 0, 1, \ldots}$.
   Nel caso $k = 0$ non ci sono singolarità sul percorso, mentre per $k > 0$ la singolarità è all'infinito, in ogni caso potremmo scrivere

$$P_{2k} = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} r^{2k} dr = \lim_{R\to\infty} \left[\frac{r^{2k+1}}{2k+1}\right]_{-R}^{R} = \lim_{R\to\infty} \frac{2R^{2k+1}}{2k+1} = \infty\,, \qquad k = 0, 1, \ldots\,.$$

2. $\underline{n = 2k+1,\ k = 0, 1, \ldots}$.
   La singolarià è sempre all'infinito, si procede come nel caso precedente, ovvero

$$P_{2k+1} = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} r^{2k+1} dr = \lim_{R\to\infty} \left[\frac{r^{2k+2}}{2k+2}\right]_{-R}^{R} = \lim_{R\to\infty} \frac{R^{2k+2} - R^{2k+2}}{2k+2} = 0\,, \qquad k = 0, 1, \ldots\,.$$

3. $\underline{n = -1}$.
   In questo caso dobbiamo considerare la singolarità polare in $r = 0$

$$P_{-1} = \lim_{R\to\infty} \left[\int_{-R}^{-1/R} \frac{dr}{r} + \int_{1/R}^{R} \frac{dr}{r}\right] = 0\,,$$

4. $\underline{n = -2k,\ k = 1, 2, \ldots}$.
   La singolariàè nell'origine, si tratta di un polo di ordine $2k$, quindi

$$P_{-2k} = \lim_{\epsilon\to 0} \left[\int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{dr}{r^{2k}} + \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{dr}{r^{2k}}\right] = \frac{-1}{2k-1} \lim_{\epsilon\to 0} \left[\left.\frac{1}{r^{2k-1}}\right|_{-\infty}^{-\epsilon} + \left.\frac{1}{r^{2k-1}}\right|_{\epsilon}^{\infty}\right] = \frac{2}{2k-1} \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{\epsilon^{2k-1}} = \infty\,,$$
$$k = 1, 2, \ldots\,.$$

5. $\underline{n = -(2k+1),\ k = 1, 2, \ldots}$.
   La singolarià è, anche in questi casi, nell'origine, si tratta di un polo di ordine $2k+1$, quindi

$$P_{-2k-1} = \lim_{\epsilon\to 0} \left[\int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{dr}{r^{2k+1}} + \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{dr}{r^{2k+1}}\right] = \frac{-1}{2k} \lim_{\epsilon\to 0} \left[\left.\frac{1}{r^{2k}}\right|_{-\infty}^{-\epsilon} + \left.\frac{1}{r^{2k}}\right|_{\epsilon}^{\infty}\right] = 0\,, \qquad k = 1, 2, \ldots\,.$$

Ne consegue che

$$P_n = \begin{cases} \infty & \text{per } |n| \text{ pari e } n = 0 \\ 0 & \text{per } |n| \text{ dispari} \end{cases} .$$

Esercizio 2 (punteggio 6/30)

Si verifichi che la successione $\{G_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{C}$, definita come

$$G_n = \mathrm{Pr}\int_{|z|=1} \frac{z}{\operatorname{sen}(z^n+1)}\,dz\,,$$

ha tutti gli elementi nulli ad eccezione di

$$G_1 = -i\pi\,, \qquad G_2 = i\pi\,.$$

Soluzione 2

Nel caso $n = 0$ l'integrale si annulla in quanto non ci sono singolarità, quindi, per il teorema di Cauchy si ha $G_0 = 0$. Per $n > 1$, l'integranda ha poli semplici in tutti i valori di z che verificano l'identità

$$z^n = j\pi - 1\,, \qquad \forall\, j \in \mathbb{Z}\,.$$

Il modulo di tali valori può essere minorato e si ha

$$|z|^n = |j\,\pi - 1| \geq \Big||j|\pi - 1\Big| \geq 1 \qquad \Longrightarrow \qquad |z| \geq 1\,,$$

ne consegue che non ci sono singolarità all'interno del cerchio unitario. Gli unici poli appartenenti alla circonferenza unitaria si hanno per $j = 0$ e sono le n radici $\{z_k\}_{k=0}^{n-1}$ del polinomio $z^n + 1$, cioè

$$z_k = e^{i\pi(2k+1)/n}\,, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1\,.$$

Consideriamo il percorso Γ_n, dentato internamente, ovvero tale da non contenere alcuna singolarità e indichiamo con γ_k l'arco infinitesimo, centrato in z_k di raggio ϵ angolo sotteso α_k, con $\alpha_k \to \pi$ per $\epsilon \to 0$. Integrando su Γ_n e tenendo conto del fatto che gli archi γ_k sono percorsi in senso orario si ottiene

$$0 = \lim_{\epsilon\to 0}\oint_{\Gamma_n} \frac{z}{\operatorname{sen}(z^n+1)}\,dz = \mathrm{Pr}\int_{|z|=1} \frac{z}{\operatorname{sen}(z^n+1)}\,dz - \sum_{k=0}^{n-1}\int_{\gamma_k} \frac{z}{\operatorname{sen}(z^n+1)}\,dz = G_n - \sum_{k=0}^{n-1}\int_{\gamma_k} \frac{z}{\operatorname{sen}(z^n+1)}\,dz\,,$$

da cui

$$G_n = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{\gamma_k} \frac{z}{\operatorname{sen}(z^n+1)}\,dz\,.$$

Gli integrali sugli archi γ_k si calcolano sfruttando il lemma per l'integrazione su archi infinitesimi

$$\int_{\gamma_k} \frac{z}{\operatorname{sen}(z^n+1)}\,dz = i\pi A_k\,, \qquad k = 1, 2, \ldots, n-1\,,$$

dove A_k rappresenta il valore limite

$$A_k = \lim_{z\to z_k} \frac{z}{\operatorname{sen}(z^n+1)}(z - z_k) = \frac{z_k}{n z_k^{n-1}\cos(z_k^n+1)} = \frac{e^{-i\pi(2k+1)(n-2)/n}}{n}\,, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1\,.$$

Ne consegue che G_n ha la forma della somma parziale $(n-1)$-esima della serie geometrica,

$$G_n = \frac{i\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1} e^{-i\pi(2k+1)(n-2)/n} = \frac{i\pi}{n} e^{-i\pi(n-2)/n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{-2i\pi(n-2)/n}\right)^k ,$$

di ragione $e^{-2i\pi(n-2)/n}$.
Nel caso $n = 1$, la ragione è uguale ad uno e si ha un solo termine, quindi

$$G_1 = i\pi(-1) = -i\pi .$$

Anche per $n = 2$ la ragione è l'unità, si hanno due termini, ovvero

$$G_2 = \frac{i\pi}{2}(1+1) = i\pi .$$

Infine per $n > 2$, la ragione è sempre diversa dall'unità, infatti la sua fase è

$$-2i\pi < -2i\pi\frac{n-2}{n} < 0 ,$$

quindi, la somma parziale della serie geometrica è

$$G_n = \frac{i\pi}{n} e^{-i\pi(n-2)/n}\frac{1-e^{-2i\pi(n-2)}}{1-e^{-2i\pi(n-2)/n}} = 0 , \qquad \forall\, n = 3,4,\dots ,$$

poichè la differenza a numeratore è sempre nulla.

Esercizio 3 (punteggio 6/30)

La funzione $f(z)$ ha elemento iniziale $\{D_0, R_0(z)\}$, con $D_0 = \{z : |z| < 1\}$ e

$$R_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(1+(-1)^k - \frac{k(k-1)}{2}\right) z^k .$$

Si ottenga il prolungamento analitico $f(z)$ e il relativo dominio di analiticità D. Si calcoli, infine, lo sviluppo di Laurent nella corona circolare $C_2(1) = \{z : 0 < |z-1| < 2\}$.

Soluzione 3

Consideriamo le tre serie che, in D_0, possono essere sommate, essendo serie geometriche o derivate si serie geometriche, ovvero

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k + \sum_{k=0}^{\infty}(-z)^k - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{k(k-1)}{2} z^k = \frac{1}{1-z} + \frac{1}{1+z} - \frac{z^2}{2}\frac{d^2}{dz^2}\sum_{k=2}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z} + \frac{1}{1+z} - \frac{z^2}{(1-z)^3}$$
$$f(z) = \frac{1}{1+z} + \frac{1-2z}{(1-z)^3} .$$

Questa è la forma analitica della funzione, che è quindi meromorfa ed ha una polo semplice in $z = -1$ ed un polo triplo in $z = 1$. Il dominio di analiticità è $D = \{z : z \neq \pm 1\}$.
Lo sviluppo di Laurent in $z = 1$ ha la forma

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k (z-1)^k .$$

Manipoliamo l'espressione ottenuta per la $f(z)$ in modo da evidenziare i primi coefficienti. Sommando e sottraendo $1/(z-1)^3$ avremo

$$f(z) = \frac{1}{z+1} + \frac{2z-1}{(z-1)^3} = \frac{1}{z+1} + \frac{2z-2}{(z-1)^3} + \frac{1}{(z-1)^3} = \frac{1}{z+1} + \frac{1}{(z-1)^3} + 2\,\frac{1}{(z-1)^2}\,,$$

rimane da sviluppare il primo termine, ovvero quello che non ha un'espressione in termini di potenze di $(z-1)$. Indichiamo con a_k i corrispondenti coefficienti di Laurent, si ha che solo quelli con $k \geq 0$, della parte regolare, sono non nulli e dati da

$$a_k = \frac{1}{2i\pi}\oint_{|z-1|=1} \frac{1}{(z+1)(z-1)^{k+1}}dz = \frac{1}{k!}\frac{d^k}{dz^k}\,\frac{1}{z+1}\bigg|_{z=1} = -\left(-\frac{1}{2}\right)^{k+1}, \qquad k \geq 0\,.$$

In definitiva

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^3} + 2\,\frac{1}{(z-1)^2} - \sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k+1}(z-1)^k = \sum_{k=-3}^{\infty} C_k (z-1)^k\,,$$

con

$$\begin{cases} C_k = 0 & k \leq -4 \\ C_{-3} = 1 & \\ C_{-2} = 2 & \\ C_{-1} = 0 & \\ C_k = -(-1/2)^{k+1} & k \geq 0 \end{cases}\,.$$

Esercizio 4 (punteggio 6/30)

Dato l'operatore normale $\hat{T}$, definito nello spazio di Hilbert a tre dimensioni E_3, si dimostri che, se l'operatore

$$\hat{S} = \hat{I} + 2i\,\hat{T}$$

è unitario, per gli autovalori τ_j di $\hat{T}$ vale la relazione

$$\left|\tau_j\right|^2 = \mathrm{Im}[\tau_j]\,, \qquad j = 1, 2, 3\,.$$

Si verifichi inoltre che, in questo eventulità ($\hat{S}$ unitario), $\hat{T}$ non può essere hermitiano a meno del caso banale dell'operatore nullo.
Infine, si calcolino gli autovalori di $\hat{T}$ e si verifichi la relazione data, considerando per l'operatore $\hat{S}$ la rappresentazione matriciale

$$S = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & i/\sqrt{2} & i/\sqrt{2} \\ 0 & i/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Soluzione 4

Dalla condizione di unitarietà si ha

$$\hat{I} = \hat{S}\hat{S}^\dagger = (\hat{I} + 2i\,\hat{T})\left(\hat{I} - 2i\,\hat{T}^\dagger\right) = \hat{I} + 2i\left(\hat{T} - \hat{T}^\dagger\right) + 4\hat{T}\hat{T}^\dagger\,,$$

da cui

$$\hat{T}\hat{T}^\dagger = \frac{1}{2i}\left(\hat{T} - \hat{T}^\dagger\right).$$

Essendo l'operatore normale, grazie al teorema spettrale, la stessa relazione vale per gli autovalori

$$\tau_i \tau_i^* = \frac{1}{2i}\left(\tau_i - \tau_i^*\right) \quad \Longrightarrow \quad \left|\tau_i\right|^2 = \mathrm{Im}\left(\tau_i\right), \qquad i = 1,2,3.$$

Se $\hat{T}$ avesse autovalori reali

$$\left|\tau_i\right|^2 = \mathrm{Im}\left(\tau_i\right) = 0, \qquad i = 1,2,3,$$

tutti gli autovalori sarebbero nulli e quindi $\hat{T}$ sarebbe l'operatore nullo.
Gli autovalori σ_i, $i = 1,2,3$, di $\hat{S}$ si ottengono risolvendo l'equazione caratteristica

$$0 = \det\begin{pmatrix} i-\sigma & 0 & 0 \\ 0 & i/\sqrt{2}-\sigma & i/\sqrt{2} \\ 0 & i/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2}-\sigma \end{pmatrix} = (i-\sigma)\left(\sigma^2+1\right),$$

e sono:

$$\sigma_1 = i, \qquad \sigma_2 = i, \qquad \sigma_3 = -i,$$

da cui, essendo $\tau_j = i\left(1-\sigma_j\right)/2$, si hanno

$$\tau_1 = \frac{1+i}{2}, \qquad \tau_2 = \frac{1+i}{2}, \qquad \tau_3 = \frac{-1+i}{2}.$$

ESERCIZIO 5 (PUNTEGGIO 5/30)

Si calcoli la trasformata di Fourier della funzione

$$f(x) = \mathrm{sen}^2(x)\theta(x+a)\theta(-x+a),$$

con $a > 0$.

SOLUZIONE 5

La trasformata di Fourier è

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{sen}^2(x)\theta(x+a)\theta(-x+a)e^{-ikx}dk \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{a} \mathrm{sen}^2(x)e^{-ikx}dk \\
&= -\frac{1}{4\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{a}\left(e^{ix(2-k)} + e^{-ix(2+k)} - 2e^{-ikx}\right)dk \\
&= -\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\left[\frac{\mathrm{sen}[a(2-k)]}{2-k} + \frac{\mathrm{sen}[a(2+k)]}{2+k} - 2\frac{\mathrm{sen}(ak)}{k}\right].
\end{aligned}$$

ESERCIZIO 6 (PUNTEGGIO 5/30)

Si risolva l'equazione differenziale

$$\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = \hat{H}|\psi(t)\rangle,$$

dove l'operatore $\hat{H}$ è definito in termini dell'operatore identità $\hat{I}$ e di un vettore unitario $|e\rangle$, ovvero tale che $\langle e|e\rangle = 1$, nello spazio di Hilbert a N dimensioni E_N, come

$$\hat{H} = \hat{I} + |e\rangle\langle e|\,,$$

usando la condizione al contorno

$$|\psi(0)\rangle = |e\rangle\,.$$

Soluzione 6

Definiamo una base ON $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^N$, con $|e_1\rangle = |e\rangle$. Un generico vettore $|\psi(t)\rangle$ può essere scomposto come

$$|\psi(t)\rangle = \psi^k(t)|e_k\rangle\,,$$

dove la dipendenza dal parametro t è solo nei coefficienti mentre i vettori della base sono costanti. L'azione dell'operatore $\hat{H}$ è definita come

$$\hat{H}|\psi(t)\rangle = \psi^k(t)\hat{H}|e_k\rangle = 2\psi^1(t)|e_1\rangle + \sum_{k=2}^N \psi^k(t)|e_k\rangle\,.$$

L'equazione differenziale diventa

$$\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = \frac{d\psi^k(t)}{dt}|e_k\rangle = \hat{H}|\psi(t)\rangle = 2\psi^1(t)|e_1\rangle + \sum_{k=2}^N \psi^k(t)|e_k\rangle\,,$$

da cui

$$\psi^1(t) = \psi^1(0)\,e^{2t}\,, \qquad \psi^k(t) = \psi^k(0)\,e^t\,, \qquad k = 2, 3, \ldots, N\,.$$

Infine, dalla condizione al contorno, si ottiene

$$|e_1\rangle = |\psi(0)\rangle = \left[\psi^1(0)e^{2t}|e_1\rangle + \sum_{k=2}^N \psi^k(0)e^t|e_k\rangle\right]_{t=0} = \psi^1(0)|e_1\rangle + \sum_{k=2}^N \psi^k(0)|e_k\rangle\,,$$

ovvero, solo il primo coefficiente non è nullo ed è

$$\psi^k(0) = \delta^k_1\,,$$

quindi la soluzione è

$$|\psi(t)\rangle = e^{2t}|e_1\rangle\,.$$