# Metodi Matematici per la Fisica

## Prova scritta del 2 luglio 2021

Si risolvano cortesemente i seguenti problemi, sapendo che il punteggio assegnato a ciascuna procedura di risoluzione può variare tra lo zero e il massimo indicato ed è stabilito valutando:

1. la correttezza del risultato ottenuto e della procedura utilizzata;
2. la completezza dei passaggi riportati;
3. il livello di esemplificazione con cui sono espressi i risultati (ad esempio un risultato numerico reale non deve contenere l'unità immaginaria);
4. la correttezza del formalismo utilizzato;
5. la chiarezza dell'esposizione e la leggibilità del testo.

## Primo problema (punteggio massimo: 6/30)

Si calcoli l'integrale in valore principale

$$\Delta = \Pr\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\big(1-\operatorname{sen}(\eta)\big)^2}{\operatorname{sen}(\eta)+\cos(2\eta)}d\eta\,.$$

### Soluzione del primo problema

Manipoliamo il denominatore della funzione integranda usando la formula di duplicazione della funzione coseno e sommiamo e sottraiamo a denominatore la funzione $\operatorname{sen}(\eta)$, si ottiene così che nello stesso denominatore si possa fattorizzare il binomio $\big(1-\operatorname{sen}(\eta)\big)$, che, quindi può essere semplificato. In dettaglio si ha

$$\begin{aligned}
\Delta &= \Pr\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\big(1-\operatorname{sen}(\eta)\big)^2}{\operatorname{sen}(\eta)+\cos(2\eta)}d\eta = \Pr\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\big(1-\operatorname{sen}(\eta)\big)^2}{\operatorname{sen}(\eta)+1-2\operatorname{sen}^2(\eta)}d\eta\\
&= \Pr\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\big(1-\operatorname{sen}(\eta)\big)^2}{\operatorname{sen}(\eta)+1-2\operatorname{sen}^2(\eta)+\operatorname{sen}(\eta)-\operatorname{sen}(\eta)}d\eta = \Pr\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\big(1-\operatorname{sen}(\eta)\big)^2}{1-\operatorname{sen}(\eta)+2\operatorname{sen}(\eta)\big(1-\operatorname{sen}(\eta)\big)}d\eta\\
&= \Pr\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-\operatorname{sen}(\eta)}{1+2\operatorname{sen}(\eta)}d\eta\,.
\end{aligned}$$

Già a questo livello è evidente la presenza di singolarità sul percorso di integrazione, rispetto alle quali deve essere applicato il valore principale. Le singolarità sono in corrispondenza dei quei valori di $\eta$ tali che: $\operatorname{sen}(\eta) = -1/2$, quindi: $\eta_k = -\pi/6+2k\pi, -5\pi/6+2k\pi$, $\forall\, k\in\mathbb{Z}$.
Usando le formule di Eulero per le funzioni trigonometriche e facendo la sostituzione $e^{i\eta}=z$, $d\eta = -i dz/z$, si ottiene

$$\begin{aligned}
\Delta &= \Pr\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-\operatorname{sen}(\eta)}{1+2\operatorname{sen}(\eta)}d\eta = \Pr\int_{-\pi}^{\pi} \frac{2i-e^{i\eta}+e^{-i\eta}}{2i+2\left(e^{i\eta}-e^{-i\eta}\right)}d\eta = \frac{1}{2}\Pr\int_{-\pi}^{\pi} \frac{-e^{2i\eta}+2ie^{i\eta}+1}{e^{2i\eta}+ie^{i\eta}-1}d\eta\\
&= \frac{i}{2}\Pr\oint_{|z|=1} \frac{z^2-2iz-1}{z^2+iz-1}\frac{dz}{z} = \frac{i}{2}\Pr\oint_{|z|=1} \frac{(z-i)^2}{(z-z_0)(z-z_2)}\frac{dz}{z}\,,
\end{aligned}$$

dove: $z_{0,2} = -i/2\pm\sqrt{3}/2 = e^{-i\pi/6}, e^{-5i\pi/6} = -i\left(1/2\pm i\sqrt{3}/2\right) = -ie^{\pm i\pi/3}$ e si considera come determinazione principale quella per cui: $\arg(z)\in[-\pi,\pi]$. I simboli $z_0$ e $z_2$, anziché $z_1$ e $z_2$, sono stati utilizzati con il senno di poi, ovvero alla luce di quanto verrà discusso in seguito.
La stessa semplificazione fatta al livello delle funzioni trigonometriche, cioè prima del cambiamento di variabile, può essere fatta, ovviamente, anche dopo la sostituzione $e^{i\eta}=z$. Infatti, facendo il suddetto cambiamento di variabile,

si ha

$$\Delta = \mathrm{Pr}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\big(1-\mathrm{sen}(\eta)\big)^2}{\mathrm{sen}(\eta)+\cos(2\eta)}d\eta = \frac{1}{2i}\,\mathrm{Pr}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\big(2i-e^{2i\eta}+1\big)^2}{e^{3i\eta}-e^{i\eta}+i\,(e^{4i\eta}+1)}d\eta = \frac{1}{2i}\,\mathrm{Pr}\oint_{|z|=1} \frac{\big(-z^2+2iz+1\big)^2}{z^3-z+i\,(z^4+1)}\,\frac{-i dz}{z}$$

$$= \frac{i}{2}\,\mathrm{Pr}\oint_{|z|=1} \frac{(z-i)^4}{z^4-iz^3+iz+1}\,\frac{dz}{z}\,.$$

È immediato osservare come $z=i$ sia uno zero del polinomio a denominatore, infatti al livello delle funzioni trigonometriche il valore $z=i$ coincide con l'angolo $\eta=-i\ln(z)=\pi/2$, che, come già visto, rappresenta uno zero del denominatore. Ne consegue che il denominatore può essere fattorizzato come

$$z^4-iz^3+iz+1=(z-i)\big(z^3+az^2+bz+i\big)=z^4+z^3(-i+a)+z^2(-ia+b)+z(i-ib)+1 \qquad \Rightarrow \qquad a=b=0\,,$$

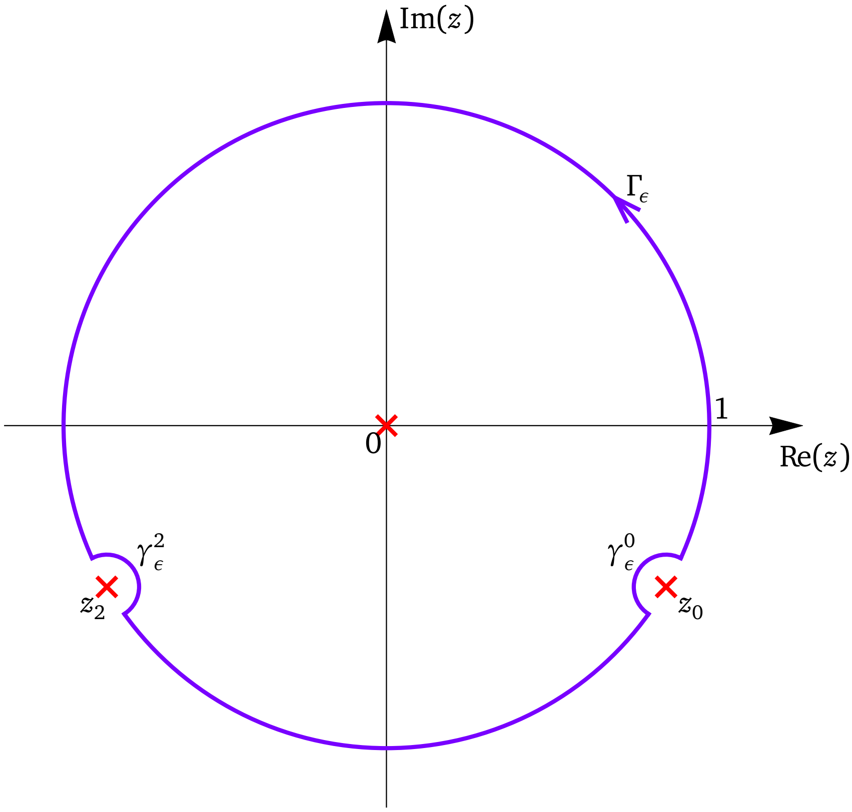
ovvero: $z^4-iz^3+iz+1=(z-i)\big(z^3+i\big)$. Gli zeri del polinomio di terzo grado, che contiene solo le potenze minima e massima, sono immediatamente calcolabili. Quindi i quattro zeri del polinomio di quarto grado a denominatore della funzione integranda sono: $z_i=i$ e $z_k=e^{i\pi(-1/2+2k)/3}$, con $k=0,1,2$; cui va aggiunto lo zero semplice nell'origine. Le espressioni esplicite nella determinazione principale degli zeri $z_k$, con $k=0,1,2$, sono:

$$z_0=e^{-i\pi/6}\,,\qquad z_1=e^{i\pi/2}=i\,,\qquad z_2=e^{-5i\pi/6}\,.$$

Ne consegue che si hanno due poli semplici in $z=z_0$ e $z=z_2$, e un polo doppio in $z=z_i=z_1=i=e^{i\pi/2}$. Il polinomio a denominatore può essere fattorizzato come $z^4-iz^3+iz+1=(z-i)^2(z-z_0)(z-z_2)$ e l'integrale assume la forma che abbiamo ottenuto con la semplificazione al livello di integranda trigonometrica, cioè

$$\Delta = \frac{i}{2}\,\mathrm{Pr}\oint_{|z|=1} \frac{(z-i)^4}{z^4-iz^3+iz+1}\,\frac{dz}{z} = \frac{i}{2}\,\mathrm{Pr}\oint_{|z|=1} \frac{(z-i)^4}{(z-i)^2(z-z_0)(z-z_2)}\,\frac{dz}{z} = \frac{i}{2}\,\mathrm{Pr}\oint_{|z|=1} \frac{(z-i)^2}{(z-z_0)(z-z_2)}\,\frac{dz}{z}\,.$$

Consideriamo il percorso di integrazione $\Gamma_\epsilon$ mostrato in figura, ovvero la circonferenza unitaria, dentata internamente in corrispondenza dei poli semplici $z_0$ e $z_2$ della funzione integranda, indicati con il simbolo "×" in rosso.




Il percorso $\Gamma_\epsilon$ è l'unione di quattro archi: i primi due, percorsi in senso anti-orario, sono centrati nell'origine e hanno raggio unitario; gli ultimi due, $\gamma_\epsilon^0$ e $\gamma_\epsilon^2$, hanno raggio $\epsilon$, sono percorsi in senso orario, quindi negativo, e sono centrati, rispettivamente, nei poli semplici $z_0$ e $z_2$, quindi

$$\Gamma_\epsilon = \left(-\gamma_\epsilon^0\right) \cup \left\{z : z = e^{i\theta}, \theta[-\pi/6+\epsilon, -5\pi/6-\epsilon]\right\} \cup \left(-\gamma_\epsilon^2\right) \cup \left\{z : z = e^{i\theta}, \theta[-5\pi/6+\epsilon, -\pi/6-\epsilon]\right\} .$$

Il valore limite, per $\epsilon \to 0^+$ dell'integrale della funzione integranda originaria sul percorso chiuso $\Gamma_\epsilon$, considerandone i singoli contributi, vale

$$\begin{aligned}\lim_{\epsilon\to 0^+} \frac{i}{2} \oint_{\Gamma_\epsilon} \frac{(z-i)^2}{(z-z_0)(z-z_2)}\frac{dz}{z} = \frac{i}{2}\,\mathrm{Pr}\oint_{|z|=1} \frac{(z-i)^2}{(z-z_0)(z-z_2)}\frac{dz}{z} \\ -\frac{i}{2}\lim_{\epsilon\to 0^+}\left(\int_{\gamma_\epsilon^0} \frac{(z-i)^2}{(z-z_0)(z-z_2)}\frac{dz}{z} + \int_{\gamma_\epsilon^2} \frac{(z-i)^2}{(z-z_0)(z-z_2)}\frac{dz}{z}\right).\end{aligned}$$

I valori limite degli integrali sugli archi $\gamma_\epsilon^0$ e $\gamma_\epsilon^2$ si calcolano sfruttando i lemmi d'integrazione noti. Esplicitamente, usando per i poli le espressioni: $z_{0,2} = -ie^{\pm i\pi/3}$, si hanno i seguenti risultati

$$\begin{aligned}\lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{\gamma_\epsilon^{0,2}} \frac{(z-i)^2}{(z-z_0)(z-z_2)}\frac{dz}{z} &= i\pi \lim_{\epsilon\to 0^+} \frac{(z-i)^2}{(z-z_0)(z-z_2)}\frac{z-z_{0,2}}{z} = i\pi \frac{(z_{0,2}-i)^2}{\pm(z_0-z_2)}\frac{1}{z_{0,2}} = i\pi\frac{(z_{0,2}-i)^2}{\pm\sqrt{3}}\frac{1}{z_{0,2}} \\ &= i\pi \frac{i^2\left(e^{\pm i\pi/3}+1\right)^2}{\pm\sqrt{3}}\frac{1}{-ie^{\pm i\pi/3}} = \pi\frac{e^{\pm 2i\pi/3}+1+2e^{\pm i\pi/3}}{\pm\sqrt{3}}\frac{1}{e^{\pm i\pi/3}} \\ &= \pi\frac{e^{\pm i\pi/3}+e^{\mp i\pi/3}+2}{\pm\sqrt{3}} = \pi\frac{\left(e^{\pm i\pi/6}+e^{\mp i\pi/6}\right)^2}{\pm\sqrt{3}} = \pi\frac{\cos^2(\pm\pi/6)}{\pm\sqrt{3}} \\ &= \pm\sqrt{3}\,\pi ,\end{aligned}$$

ovvero i due contributi sono opposti e quindi la loro somma è nulla. Ne consegue che l'integrale cercato coincide con il precedente valore limite, cioè

$$\Delta = \lim_{\epsilon\to 0^+} \frac{i}{2} \oint_{\Gamma_\epsilon} \frac{(z-i)^2}{(z-z_0)(z-z_2)}\frac{dz}{z} .$$

D'altro canto, l'integrale di cui si sta considerando il valore limite può essere calcolato con il teorema dei residui. Osservando come il percorso chiuso $\Gamma_\epsilon$, per ogni $\epsilon > 0$, avvolga una volta il solo polo nell'origine della funzione integranda, si evince che il residuo da considerare è solo e soltanto quello nell'origine, appunto, indipendentemente da $\epsilon$. Quindi l'integrale in valore principale $\Delta$ vale

$$\Delta = \lim_{\epsilon\to 0^+} \frac{i}{2} \oint_{\Gamma_\epsilon} \frac{(z-i)^2}{(z-z_0)(z-z_2)}\frac{dz}{z} = 2i\pi\,\mathrm{Res}\left[\frac{i}{2}\frac{(z-i)^2}{(z-z_0)(z-z_2)}\frac{1}{z}, z=0\right] = -\pi\frac{(-i)^2}{z_0 z_2} = \frac{\pi}{z_0 z_2} ,$$

ma si ha $z_0 z_2 = \left(-ie^{i\pi/3}\right)\left(-ie^{-i\pi/3}\right) = (-i)^2 = -1$, quindi il risultato finale è

$$\Delta = -\pi .$$

## Secondo problema (punteggio massimo: 6/30)

Si dimostrino

$$\begin{aligned}A_{2n} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+x}{1+x^{2n}}dx = \frac{\pi}{n\,\mathrm{sen}(\pi/(2n))} , \\ A_{2n-1} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+x}{1+x^{2n-1}}dx = \frac{\pi}{2n-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sen}(\pi/(2n-1))} + \frac{2}{\mathrm{sen}(2\pi/(2n-1))}\right), \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}\cap(1,\infty) = \{2,3,\ldots\} .\end{aligned}$$

Ovvero, in generale,

$$A_m = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+x}{1+x^m}dx = \begin{cases} 2\dfrac{\pi/m}{\mathrm{sen}(\pi/m)} & \text{per } m \text{ pari} \\[2ex] \dfrac{\pi/m}{\mathrm{sen}(\pi/m)} + \dfrac{2\pi/m}{\mathrm{sen}(2\pi/m)} & \text{per } m \text{ dispari}\end{cases} , \qquad \forall\, m \in \mathbb{N}\cap(2,\infty) = \{3,4,\ldots\} .$$

## Soluzione del secondo problema

Calcoliamo $A_{2n}$, sfruttando, innanzitutto, la parità della funzione integranda, per cui si ha

$$A_{2n} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+x}{1+x^{2n}} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^{2n}} dx \,,$$

in quanto il termine con la $x$ a numeratore è dispari e ha integrale nullo sull'intervallo simmetrico $(-\infty, \infty)$, ovvero l'asse reale. La funzione integranda ha $2n$ poli semplici nel piano complesso, coincidenti le $2n$ radici $2n$-esime di $-1$ e quindi con i punti dell'insieme $\left\{z_k = e^{i\pi(2k+1)/(2n)}\right\}_{k=0}^{2n-1}$. Nessuna di esse appartiene all'asse reale, come si evince dal fatto che le parti immaginarie sono sempre diverse da zero, infatti

$$z_k = \cos\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Im}\,(z_k) = \mathrm{sen}\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right) \neq 0\,, \quad \forall\, k \in \{0, 1, \ldots, 2n-1\}\,,$$

più in dettaglio, la disuguaglianza è conseguenza del fatto che, $\forall\, k, n \in \mathbb{N}$, si ha: $(2k+1)/(2n) \notin \mathbb{N}$; cioè che il rapporto tra un numero dispari e un numero pari non è mai intero, condizione necessaria, quest'ultima, al fine di annullare la parte immaginaria.
Per calcolare gli integrali "pari" $A_{2n}$ consideriamo il percorso di integrazione chiuso $\Gamma_R^+$ dato dall'unione del tratto rettilineo $[-R, R]$, con $R > 1$ e la semicirconferenza centrata nell'origine, di raggio $R$ e immersa nel semipiano delle parti immaginarie positive, quindi

$$\Gamma_R^+ = [-R, R] \cup \left\{z : z = Re^{i\theta},\, \theta \in [0, \pi]\right\} .$$

Questo percorso avvolge una sola volta i poli semplici della funzione integranda che hanno parti immaginarie positive, seguendo la definizione precedente, i punti dell'insieme $\{z_k\}_{k=0}^{n-1}$, cioè i primi $n$ poli dei $2n$ totali. L'integrale della funzione integranda originale sul percorso $\Gamma_R^+$ nel limite $R \to \infty$ vale

$$\lim_{R\to\infty} \oint_{\Gamma_R^+} \frac{dz}{1+z^{2n}} = 2i\pi \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{Res}\left[\frac{1}{1+z^{2n}}, z = z_k\right] = 2i\pi \sum_{k=0}^{n-1} \frac{z_k^{-2n+1}}{2n} = \frac{i\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} z_k^{-2n+1} .$$

D'altro canto, in termini dei contributi dovuti al tratto rettilineo e alla semicirconferenza che costituiscono il percorso $\Gamma_R^+$ si ha

$$\lim_{R\to\infty} \oint_{\Gamma_R^+} \frac{dz}{1+z^{2n}} = A_{2n} + \lim_{R\to\infty} \int_{|z|=R,\, \arg(z)\in[0,\pi]} \frac{dz}{1+z^{2n}} .$$

Dimostriamo che il valore limite a secondo membro è nullo, verificando che tale è il limite uniforme della funzione integranda moltiplicata per la $z$, ovvero che vale

$$\lim_{R\to\infty} \frac{z}{1+z^{2n}} \overset{\text{U.}}{=} 0 .$$

A tal fine usiamo la minorazione del modulo, con $z = Re^{i\theta}$ e $\theta \in [0, \pi]$, inoltre poniamo $R > 1$, senza perdita di generalità dovendo considerare il limite $R \to \infty$, si ha

$$0 \leq \left|\frac{z}{1+z^{2n}}\right| = \frac{R}{|1+z^{2n}|} \leq \frac{R}{|R^{2n}-1|} \leq \frac{R}{|R^{2n}-R|} = \frac{R}{R^{2n}-R} = \frac{1}{R^{2n-1}-1} \xrightarrow[R\to\infty]{(2n-1\geq 3)} 0 .$$

L'uniformità del valore limite segue dall'indipendenza dalla fase $\theta$ della funzione $1/\left(R^{2n-1}-1\right)$ che minora il modulo $|z|/\left|1+z^{2n}\right|$.
Alla luce dei precedenti risultati, si ha che gli integrali pari $A_{2n}$ possono essere calcolati con la somma dei residui, cioè

$$A_{2n} = \frac{i\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} z_k^{-2n+1} ,$$

usando le espressioni esplicite dei poli, $z_k = e^{(2k+1)i\pi/(2n)}$, si ha

$$A_{2n} = \frac{i\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{(2k+1)(-2n+1)i\pi/(2n)} = \frac{i\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{(2k+1)(-1+1/(2n))i\pi} = -\frac{i\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{(2k+1)i\pi/(2n)} = -\frac{i\pi e^{i\pi/(2n)}}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{ik\pi/n} .$$

La somma può essere calcolata come somma parziale $(n-1)$-esima della serie geometrica di ragione $e^{i\pi/n}$, ovvero moltiplicando e dividendo per il binomio $\left(1-e^{i\pi/n}\right)$, quindi, sfruttando anche la formula di Eulero per la funzione seno,

$$\begin{aligned}
A_{2n} &= -\frac{i\pi e^{i\pi/(2n)}}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{i\pi/n}\right)^k = -\frac{i\pi e^{i\pi/(2n)}}{n}\frac{1-\left(e^{i\pi/n}\right)^n}{1-e^{i\pi/n}} = -\frac{i\pi e^{i\pi/(2n)}}{n}\frac{2}{e^{i\pi/(2n)}\left(e^{-i\pi/(2n)}-e^{i\pi/(2n)}\right)} \\
&= -\frac{i\pi}{n}\frac{2}{e^{-i\pi/(2n)}-e^{i\pi/(2n)}} = -\frac{i\pi}{n}\frac{2}{-2i\,\mathrm{sen}\,(\pi/(2n))} \\
A_{2n} &= \frac{\pi}{n\,\mathrm{sen}\,(\pi/(2n))}\,,
\end{aligned}$$

che è esattamente l'espressione cercata.
Consideriamo gli integrali dispari

$$A_{2n-1} = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1+x}{1+x^{2n-1}}dx\,, \qquad \forall\, n\in\mathbb{N}\cap(1,\infty)\,,$$

in questo caso gli zeri semplici del polinomio di grado $(2n-1)$ che rappresenta il denominatore della funzione integranda sono le $(2n-1)$ radici $(2n-1)$-esime di $-1$, ovvero sono gli elementi dell'insieme $\left\{p_k = e^{i\pi(2k+1)/(2n-1)}\right\}_{k=0}^{2n}$. Non tutti questi zeri rappresentano dei poli semplici per la funzione integranda, infatti lo zero $p_{n-1} = -1$, l'unico reale e quindi appartenente al percorso di integrazione, rappresenta anche il solo zero semplice del polinomio di primo grado a numeratore della stessa funzione integranda. Ne consegue che il punto $p_{n-1}$ rappresenta una singolarità eliminabile per la funzione integranda e che l'insieme degli zeri semplici si riduce all'unione $\left\{p_k = e^{i\pi(2k+1)/(2n-1)}\right\}_{k=0}^{n-2}\cup\left\{p_k = e^{i\pi(2k+1)/(2n-1)}\right\}_{k=n}^{2n}$, che contiene $(2n-2)$ punti. In particolare, i punti del primo insieme si trovano nel semipiano delle parti immaginarie positive, mentre quelli del secondo insieme, essendo i complessi coniugati di quelli del precedente, appartengono al semipiano delle parti immaginari negative. Per le parti immaginarie dei punti dell'insieme $\left\{p_k = e^{i\pi(2k+1)/(2n-1)}\right\}_{k=0}^{n-2}$ si ha la limitazione

$$\underbrace{\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2n-1}\right)}_{\in(0,1)} \le \mathrm{Im}(p_k) = \mathrm{sen}\left(\frac{2k+1}{2n-1}\pi\right) < 0\,,$$

come conseguenza della limitazione dell'indice $k$

$$0\le k < n-1 \quad\Rightarrow\quad 1\le 2k+1 < 2n-1 \quad\Rightarrow\quad \frac{\pi}{2n-1}\le\frac{2k+1}{2n-1}\pi < \pi\,.$$

Alla luce di queste considerazioni, usando la stessa procedura del caso precedente, dopo aver constatato che le condizioni di convergenza siano verificate anche in questo caso, si ottiene

$$A_{2n-1} = 2i\pi\sum_{k=0}^{n-2}\mathrm{Res}\left[\frac{1+z}{1+z^{2n-1}}, z=p_k\right] = \frac{2i\pi}{2n-1}\sum_{k=0}^{n-2}\frac{1+p_k}{p_k^{2n-2}} = \frac{2i\pi}{2n-1}\sum_{k=0}^{n-2}\left(p_k^{-2n+2}+p_k^{-2n+3}\right)\,.$$

Il $k$-esimo polo $p_k$, con $k\in\{0,1,\ldots,n-2\}$, può essere fattorizzato nel prodotto di un primo termine costante e la potenza $k$-esima del quadrato dello stesso primo termine, cioè

$$p_k = e^{i\pi(2k+1)/(2n-1)} = e^{i\pi/(2n-1)}e^{2i\pi k/(2n-1)} = e^{i\pi/(2n-1)}\left(e^{2i\pi/(2n-1)}\right)^k = \sqrt{\alpha}\,\alpha^k\,, \qquad k\in\{0,1,\ldots,n-2\}\,,$$

con $\alpha = e^{2i\pi/(2n-1)}$. Sostituendo questa espressione di $p_k$ nelle somme precedenti si ha

$$A_{2n-1} = \frac{2i\pi}{2n-1}\left(\sum_{k=0}^{n-2}p_k^{-2n+2}+\sum_{k=0}^{n-2}p_k^{-2n+3}\right) = \frac{2i\pi}{2n-1}\left(\alpha^{-n+1}\sum_{k=0}^{n-2}\alpha^{(-2n+2)k}+\alpha^{-n+3/2}\sum_{k=0}^{n-2}\alpha^{(-2n+3)k}\right),$$

inoltre, poiché, per definizione il parametro $\alpha$ ha le seguenti proprietà

$$\alpha^{-2n+2} = \alpha^{-2n+1+1} = \underbrace{\alpha^{-2n+1}}_{=e^{-2i\pi}=1}\alpha = \alpha\,, \qquad \alpha^{-2n+3} = \alpha^{-2n+1+2} = \underbrace{\alpha^{-2n+1}}_{=e^{-2i\pi}=1}\alpha^2 = \alpha^2\,,$$

le due somme assumono la forma di somme parziali $(n-2)$-esime di serie geometriche di ragioni, rispettivamente, $\alpha$ e $\alpha^2$. Usando, quindi, la procedura di somma della serie geometrica, l'ulteriore identità $\alpha^{\pm(n-1/2)} = e^{\pm i\pi} = -1$ e le formule di Eulero per le funzioni trigonometriche si ha

$$\begin{aligned}
A_{2n-1} &= \frac{2i\pi}{2n-1}\left(\alpha^{-n+1}\frac{1-\alpha^{n-1}}{1-\alpha} + \alpha^{-n+3/2}\frac{1-\alpha^{2(n-1)}}{1-\alpha^2}\right) = \frac{2i\pi}{2n-1}\,\alpha^{-n+1}\frac{1-\alpha^{n-1}}{1-\alpha}\left(1+\alpha^{1/2}\frac{1+\alpha^{n-1}}{1+\alpha}\right)\\
&= \frac{2i\pi}{2n-1}\,\frac{\alpha^{-n+1}-1}{1-\alpha}\left(1+\frac{\alpha^{1/2}-1}{1+\alpha}\right) = \frac{2i\pi}{2n-1}\,\frac{-\alpha^{1/2}-1}{1-\alpha}\,\frac{\alpha+\alpha^{1/2}}{1+\alpha}\\
&= -\frac{2i\pi}{2n-1}\,\frac{\alpha^{1/2}+2+\alpha^{-1/2}}{\alpha^{-1}-\alpha} = -\frac{2i\pi}{2n-1}\,\frac{\alpha^{1/2}+2+\alpha^{-1/2}}{\alpha^{-1}-\alpha} = -\frac{2i\pi}{2n-1}\,\frac{e^{i\pi/(2n-1)}+e^{-i\pi/(2n-1)}+2}{e^{-2i\pi/(2n-1)}-e^{2i\pi/(2n-1)}}\\
&= -\frac{2i\pi}{2n-1}\,\frac{2\cos(\pi/(2n-1))+2}{-2i\,\mathrm{sen}(2\pi/(2n-1))} = \frac{2\pi}{2n-1}\,\frac{\cos(\pi/(2n-1))+1}{\mathrm{sen}(2\pi/(2n-1))}\\
&= \frac{2\pi}{2n-1}\left(\frac{\cos(\pi/(2n-1))}{2\mathrm{sen}(\pi/(2n-1))\cos(\pi/(2n-1))} + \frac{1}{\mathrm{sen}(2\pi/(2n-1))}\right).
\end{aligned}$$

Infine, con le ultime semplificazioni, si arriva alla forma cercata

$$A_{2n-1} = \frac{\pi}{2n-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sen}(\pi/(2n-1))} + \frac{2}{\mathrm{sen}(2\pi/(2n-1))}\right),$$

valida $\forall\, n \in \mathbb{N} \cap (1,\infty)$.

## TERZO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

Si ottenga la serie di Laurent della funzione

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{z^4-k^4},$$

centrata nell'origine, analitica in $z = i/2$ e se ne determini il dominio di convergenza.
**Suggerimento.** I coefficienti della serie di Laurent sono definiti in termini della funzione zeta di Riemann.

### SOLUZIONE DEL TERZO PROBLEMA

Innanzitutto, per la parità dei termini della serie, possiamo riscrivere la funzione come

$$f(z) = \frac{1}{z^4} + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{z^4-k^4}.$$

Ciascun termine della serie è una funzione polidroma con quattro poli, il $k$-esimo termine, con $k \in \mathbb{N}$, ha i poli

$$z_{k,m} = k e^{im\pi/2}, \qquad m = 0,1,2,3,$$

ovvero le quattro radici quarte dell'unità moltiplicate per $k$. Quindi, ad eccezione di quello nell'origine, che si ha ovviamente per $k = 0$ ed è $z_{0,m} \equiv z_0 = 0$, che è un polo di ordine 4, tutti gli altri sono poli semplici. Poiché le singolarità più vicine a quella nell'origine, centro dello sviluppo di Laurent, sono i quattro poli semplici $z_{1,m}$, con $m = 0,1,2,3$ e sono da essa equidistanti, infatti $|z_{1,m}| = |e^{im\pi/2}| = 1$, $\forall \in \{0,1,2,3\}$, si ha che il dominio di convergenza dello sviluppo di Laurent è la corona circolare $C_{0,1} = \{z : 0 < |z| < 1\}$.
Formalmente lo sviluppo di Laurent cercato è

$$f(z) = \sum_{k=-4}^{\infty} C_k z^k,$$

infatti, l'origine è un polo di ordine 4, per cui $C_{-4} \neq 0$, mentre $C_k = 0$, $\forall\, k < -4$. Nella corona di convergenza ciascun termine può essere scritto come somma di una serie geometrica, infatti, per il $k$-esimo termine, con $k \in \mathbb{N}$ si ha

$$\frac{1}{z^4-k^4} = -\frac{1}{k^4}\,\frac{1}{1-(z/k)^4},$$

l'ultimo fattore rappresenta la somma della serie geometrica di ragione $(z/k)^4$. La serie è convergente nella corona circolare perché le condizioni $0 < |z| < 1$ e $k \geq 1$ implicano $|z/k| < 1$ e quindi anche $|z/k|^4 < 1$. Ne consegue che per il termine $k$-esimo si ha

$$\frac{1}{z^4 - k^4} = -\frac{1}{k^4}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{z^{4m}}{k^{4m}} = -\sum_{m=0}^{\infty}\frac{z^{4m}}{k^{4(m+1)}}\,, \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Sostituendo questa espressione nella serie che definisce la funzione $f(z)$ avremo

$$f(z) = \frac{1}{z^4} - 2\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{z^{4m}}{k^{4(m+1)}} = \frac{1}{z^4} - 2\sum_{m=0}^{\infty} z^{4m}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{4(m+1)}}\,.$$

La serie con indice $k$ può essere calcolata in termini della funzione zeta di Riemann $\zeta(z)$ e, in particolare, in termini della sua rappresentazione

$$\zeta(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-z}\,,$$

che ha dominio di convergenza $D = \{z : \mathrm{Re}(z) > 1\}$. Avremo quindi

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{4(m+1)}} = \zeta\,(4(m+1))\,,$$

la cui convergenza è assicurata, infatti, $m \geq 0$ implica $4(m+1) \geq 4$ e quindi $4(m+1) \in D$, $\forall\, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.
In definitiva si ha la serie di Laurent

$$f(z) = \frac{1}{z^4} - 2\sum_{m=0}^{\infty}\zeta\,(4(m+1))\,z^{4m} = \frac{1}{z^4} - \frac{\pi^4}{45} - \frac{\pi^8}{4725}z^4 + \mathcal{O}\left(z^8\right) = \sum_{k=-4}^{\infty} C_k z^k\,,$$

con

$$C_k = \begin{cases} 1 & k = -4 \\ -2\zeta(k+4) & k = 4m\,, \forall\, m \in \mathbb{N} \cup \{0\} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}\,.$$

La serie contiene solo potenze multipli interi di 4.

## Quarto problema (punteggio massimo: 6/30)

Si ottengano lo spettro discreto e l'insieme degli autovettori dell'operatore $\hat{C}$, definito nello spazio di Hilbert a tre dimensioni $E_3$, sapendo che

$$\hat{C}|u_1\rangle = 3|u_1\rangle\,, \quad \hat{C}\,(|u_2\rangle + 2|u_3\rangle) = -5|u_2\rangle\,, \quad \left\|\hat{C}^\dagger|u_1\rangle\right\| = \left\|\hat{C}|u_1\rangle\right\|\,, \quad \det\left(\hat{C}\right) = 15\,, \quad \mathrm{Tr}\left(\hat{C}\right) = -1\,,$$

dove $\{|u_k\rangle\}_{k=1}^{3} \subset E_3$ è una base ortonormale dello spazio vettoriale $E_3$.

### Soluzione del quarto problema

La matrice $C$, $3 \times 3$ che rappresenta l'operatore rispetto alla base data ha la forma

$$C = \begin{pmatrix} \langle u_1|\hat{C}|u_1\rangle & \langle u_1|\hat{C}|u_2\rangle & \langle u_1|\hat{C}|u_3\rangle \\ \langle u_2|\hat{C}|u_2\rangle & \langle u_2|\hat{C}|u_2\rangle & \langle u_2|\hat{C}|u_3\rangle \\ \langle u_3|\hat{C}|u_3\rangle & \langle u_3|\hat{C}|u_2\rangle & \langle u_3|\hat{C}|u_3\rangle \end{pmatrix}.$$

Dall'azione nota $\hat{C}|u_1\rangle = 3|u_1\rangle$, che rappresenta un'equazione agli autovalori da cui si evince che $|u_1\rangle$ è l'autovettore relativo all'autovalore $\lambda_1 = 3$, si deduce anche la prima colonna della matrice $C$, cioè

$$C = \begin{pmatrix} 3 & \langle u_1|\hat{C}|u_2\rangle & \langle u_1|\hat{C}|u_3\rangle \\ 0 & \langle u_2|\hat{C}|u_2\rangle & \langle u_2|\hat{C}|u_3\rangle \\ 0 & \langle u_3|\hat{C}|u_2\rangle & \langle u_3|\hat{C}|u_3\rangle \end{pmatrix}.$$

La seconda azione nota, $\hat{C}\left(|u_2\rangle + 2|u_3\rangle\right) = -5|u_2\rangle$, stabilisce relazioni tra gli elementi della stessa riga della seconda e terza colonna, indicando con $x = \langle u_1|\hat{C}|u_2\rangle$, $y = \langle u_2|\hat{C}|u_2\rangle$ e $z = \langle u_3|\hat{C}|u_2\rangle$, si hanno le relazioni: la mia $\langle u_1|\hat{C}|u_3\rangle = -x/2$, $\langle u_|\hat{C}|u_3\rangle = -y/2 - 5/2$ e $\langle u_3|\hat{C}|u_3\rangle = -z/2$. La matrice ha la forma

$$C = \begin{pmatrix} 3 & x & -x/2 \\ 0 & y & -y/2-5/2 \\ 0 & z & -z/2 \end{pmatrix}$$

le condizioni sul determinante e la traccia permettono di ottenere i valori di $y$ e $z$, infatti

$$15 = \det(C) = 3\left(-\frac{yz}{2} + \frac{yz}{2} + \frac{5z}{2}\right) = \frac{15z}{2} \quad \Rightarrow \quad z = 2, \qquad -1 = \mathrm{Tr}(C) = 3 + y - \frac{z}{2} \quad \Rightarrow \quad y = -3.$$

Si arriva quindi alla forma

$$C = \begin{pmatrix} 3 & x & -x/2 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

La condizione sulla norma

$$\left\|\hat{C}^\dagger|u_1\rangle\right\| = \left\|\hat{C}|u_1\rangle\right\| = \|3|u_1\rangle\| = 3,$$

dà una condizione su $x$, infatti la prima norma è la radice quadrata della somma dei moduli quadri degli elementi della prima riga della matrice $C$. Consideriamo la norma al quadrato, si ha

$$\begin{aligned} 3^2 &= \left\|\hat{C}^\dagger|u_1\rangle\right\|^2 = \langle u_1|\hat{C}\hat{C}^\dagger|u_1\rangle = \sum_{k=1}^{3}\langle u_1|\hat{C}|u_k\rangle\langle u_k|\hat{C}^\dagger|u_1\rangle = \sum_{k=1}^{3}\langle u_1|\hat{C}|u_k\rangle\langle u_1|\hat{C}|u_k\rangle^* = \sum_{k=1}^{3}\left|\langle u_1|\hat{C}|u_k\rangle\right|^2 = \sum_{k=1}^{3}\left|C^1_k\right|^2 \\ &= 9 + |x|^2 + \frac{|x|^2}{4} = 9 + \frac{5|x|^2}{4} \quad \Rightarrow \quad x = 0, \end{aligned}$$

quindi la matrice $C$ è

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Gli autovalori sono le soluzioni dell'equazione secolare $\det(C - I\lambda) = 0$, ovvero

$$\det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -3-\lambda & -1 \\ 0 & 2 & -1-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$(3-\lambda)\left(\lambda^2 + 4\lambda + 5\right) = 0,$$

da cui si hanno

$$\lambda_1 = 3, \qquad \lambda_{2,3} = -2 \pm i.$$

Le componenti controvarianti dei vettori colonna $3 \times 1$, elementi dell'insieme $\{v_k\}_{k=1}^3$, che rappresentano gli autovettori dell'operatore, si ottengono come soluzioni dei tre sistemi omogenei

$$\begin{pmatrix} 3-\lambda_k & 0 & 0 \\ 0 & -3-\lambda_k & -1 \\ 0 & 2 & -1-\lambda_k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v^1_{(k)} \\ v^2_{(k)} \\ v^3_{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad k = 1,2,3.$$

Il primo autovettore, quello relativo all'autovalore $\lambda_1 = 3$, è $|u_1\rangle$, rispetto alla base data, ha rappresentazione

$$|u_1\rangle \stackrel{u}{\hookleftarrow} v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Per il secondo e il terzo si ha

$$\begin{pmatrix} 5\mp i & 0 & 0 \\ 0 & -1\mp i & -1 \\ 0 & 2 & 1\mp i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v^1_{(2,3)} \\ v^2_{(2,3)} \\ v^3_{(2,3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

dell'identità della prima riga si ha che le prima componente di entrambi i vettori è nulla, ovvero $v^1_{(2,3)} = 0$. Indicando con $w$ il valore comune della seconda componente di entrambi, posto cioè: $v^2_{(2,3)} = w$, si hanno le terze componenti $v^3_{(2,3)} = (-1 \mp i)w$. In definitiva, le rappresentazioni dei tre autovettori normalizzati all'unità, normalizzazione che si ottiene ponendo: $w = 1/\sqrt{1 + |-1 \mp i|^2} = 1/\sqrt{3}$, sono

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1-i \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1+i \end{pmatrix}.$$

## Quinto problema (punteggio massimo: 6/30)

Si calcoli la trasformata di Fourier della funzione

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{x^2 - 1}$$

e, usando il risultato ottenuto, si calcoli l'integrale

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2(\pi x)}{(x^2-1)^2}\, dx\,.$$

### Soluzione del quinto problema

La funzione $f(x)$ è a quadrato sommabile in $\mathbb{R}$, possiamo usare il Teorema di Plancherel. La trasformata di Fourier può essere calcolata direttamente che sfruttando il teorema della convoluzione, ovvero fattorizzando la funzione $f(x)$ nel prodotto delle funzioni

$$f_1(x) = \operatorname{sen}(\pi x)\,, \qquad f_2(x) = \frac{1}{x^2-1}\,.$$

Consideriamo il calcolo diretto, ovvero

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{x^2-1} e^{-ikx}\, dx\,.$$

La funzione integranda ha due singolarità eliminabili in $x = \pm 1$, infatti si hanno i limiti

$$\lim_{x\to\pm 1} \frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{x^2-1} e^{-ikx} = \lim_{x\to\pm 1} \frac{\pi\cos(\pi x)}{2x} e^{-ikx} = \frac{\pi(-1)}{\pm 2} e^{\mp ik} = \mp\frac{\pi}{2} e^{\mp ik}\,.$$

Alla luce di questa considerazione è possibile deformare con continuità il percorso di integrazione senza alterare il valore dell'integrale, la deformazione consiste in $\mathbb{R} \to \Gamma_\epsilon$, dove $\Gamma_\epsilon$ è l'asse reale "dentato" nel semipiano delle parti immaginarie positive, in corrispondenza dei punti $x = \pm 1$. In dettaglio si ha

$$\Gamma_\epsilon = (-\infty, -1-\epsilon] \cup \left(-\gamma_{-1,\epsilon}\right) \cup [-1+\epsilon, 1-\epsilon] \cup \left(-\gamma_{+1,\epsilon}\right) \cup [1+\epsilon, \infty)\,,$$

dove le curve $\gamma_{\pm 1,\epsilon}$ sono le semicirconferenze centrate in $x = \pm 1$ di raggio $\epsilon$, cioè

$$\gamma_{\pm 1,\epsilon} = \left\{ z : z = \pm 1 + \epsilon e^{i\theta}, \theta \in [0, \pi] \right\}\,.$$

La trasformata di Fourier può essere calcolata con l'integrale complesso

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\Gamma_\epsilon} \frac{\operatorname{sen}(\pi z)}{z^2-1} e^{-ikz}\, dz\,,$$

quindi avvalendosi dei teoremi e lemmi di integrazione nel piano complesso. Procediamo, prima scomponendo la funzione seno con la formula di Eulero poi usando il lemma di Jordan e il teorema dei residui, si ha

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\Gamma_\epsilon} \frac{\operatorname{sen}(\pi z)}{z^2-1} e^{-ikz} dz = \frac{1}{2i\sqrt{2\pi}} \int_{\Gamma_\epsilon} \frac{e^{-iz(k-\pi)} - e^{-iz(k+\pi)}}{z^2-1} dz = \frac{1}{2i\sqrt{2\pi}} (I_- - I_+) \,,$$

con

$$I_\pm = \int_{\Gamma_\epsilon} \frac{e^{-iz(k\pm\pi)}}{z^2-1} dz \,.$$

Per calcolare questi integrali consideriamo i percorsi chiusi, con $R > 1$,

$$\Gamma_R^\pm = [-R, -1-\epsilon] \cup \left(-\gamma_{-1,\epsilon}\right) \cup [-1+\epsilon, 1-\epsilon] \cup \left(-\gamma_{+1,\epsilon}\right) \cup [1+\epsilon, R] \cup \left\{z : z = Re^{i\theta}, \pm\theta \in [0,\pi]\right\} \,,$$

dati dall'unione del tratto dentato di $\Gamma_\epsilon$ compreso tra $-R$ e $R$, e la semicirconferenza centrata nell'origine, di raggio $R$ immersa nel semipiano della parti immaginarie positive $\Gamma_R^+$, percorso in senso positivo, ovvero antiorario, e negative, $\Gamma_R^-$, percorso in senso negativo, cioè orario. Poiché la "dentatura" di $\Gamma_\epsilon$ si trova nel semipiano della parti immaginarie positive, solo il percorso $\Gamma_R^-$ avvolge i punti $x = \pm 1$ che, avendo separato la funzione integranda originale, rappresentano per le due funzioni integrande degli integrali $I_\pm$ due poli semplici, che hanno residui non nulli. Infine, avvalendoci del lemma di Jordan, si ha

$$I_\pm = \begin{cases} \lim\limits_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R^-} \frac{e^{-iz(k\pm\pi)}}{z^2-1} dz = -2i\pi \left( \operatorname{Res}\left[ \frac{e^{-iz(k\pm\pi)}}{z^2-1}, z=-1 \right] + \operatorname{Res}\left[ \frac{e^{-iz(k\pm\pi)}}{z^2-1}, z=1 \right] \right) & \\ \qquad = -2i\pi \left( \frac{e^{i(k\pm\pi)}}{-2} + \frac{e^{-i(k\pm\pi)}}{2} \right) = -i\pi\left(-2i\operatorname{sen}(k\pm\pi)\right) = 2\pi\operatorname{sen}(k) & k\pm\pi > 0 \\ \lim\limits_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R^-} \frac{e^{-iz(k\pm\pi)}}{z^2-1} dz = 0 & k\pm\pi < 0 \end{cases} .$$

In definitiva, sommando i contributi per ottenere l'integrale completo e quindi la trasformata di Fourier si ha

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{2i\sqrt{2\pi}} (I_- - I_+) = \frac{1}{2i\sqrt{2\pi}} \begin{cases} I_- - I_+ = 0 - 0 = 0 & k < -\pi \quad (k < \pi) \\ I_- - I_+ = 0 - 2\pi\operatorname{sen}(k) = -2\pi\operatorname{sen}(k) & -\pi < k < \pi \\ I_- - I_+ = 2\pi\operatorname{sen}(k) - 2\pi\operatorname{sen}(k) = 0 & k > \pi \quad (k > -\pi) \end{cases} ,$$

semplificando

$$\tilde{f}(k) = \begin{cases} i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\operatorname{sen}(k) & |k| < \pi \\ 0 & |k| > \pi \end{cases} .$$

Per il teorema di Plancherel si ha che la norma della funzione originale $f(x)$ e quella della sua trasformata di Fourier coincidono, ovvero che vale l'identità

$$\|f\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{f}(k)|^2 dk = \left\|\tilde{f}\right\|^2 .$$

Ne consegue che l'integrale cercato rappresenta la norma al quadrato della funzione $f(x)$ e quindi può essere calcolato come la norma al quadrato della sua trasformata di Fourier. Usando le formule di duplicazione e il fatto che l'integrale di una funzione trigonometrica su un intervallo coincidente con un multiplo intero del suo periodo sia nullo, otteniamo

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2(\pi x)}{(\,x^2-1)^2} dx = \|f\|^2 = \left\|\tilde{f}\right\|^2 = \frac{\pi}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^2(k) dk = \frac{\pi}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-\cos(2k)}{2} dk = \frac{\pi}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} dk \,,$$

ovvero, il risultato finale è

$$P = \frac{\pi^2}{2} \,.$$

## Sesto problema (punteggio massimo: 6/30)

L'operatore normale $\hat{P}$, definito nello spazio di Hilbert a tre dimensioni $E_3$, ha equazioni agli autovalori

$$\hat{P}|u\rangle = |u\rangle\,, \qquad \hat{P}|v\rangle = |0\rangle\,,$$

dove il vettore $|u\rangle$ è definito in termini dei vettori della base ortonormale $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^3 \subset E_3$ come: $|u\rangle = |e_1\rangle - 2|e_2\rangle + |e_3\rangle$, mentre $|v\rangle \in E_3$ è un generico vettore ortogonale allo stesso $|u\rangle$.
Si ottengano:

- le espressione degli operatori $\hat{Q}_n$ della successione

$$\hat{Q}_n = \left\{\exp\left(in\pi\,\hat{P}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}\,,$$

  come funzioni dello stesso operatore $\hat{P}$ e dell'operatore identità $\hat{I}$;

- gli spettri discreti e gli insiemi degli autovettori degli operatori $\hat{Q}_n$, con $n \in \mathbb{N}$.

## Soluzione del sesto Problema

L'operatore $\hat{P}$ è normale, ammette, quindi, un insieme ortonormale di autovettori. A partire dall'autovettore quello dato $|u\rangle$, che ha autovalore unitario, gli altri due autovettori, aventi autovalore nullo con ordine di degenerazione pari a due, sono i due vettori ortogonali, che generano il sotto-spazio vettoriale $E_2$, a due dimensioni, ortogonale al vettore $|u\rangle$, cioè $E_2 = \{|x\rangle \in E_3 : \langle u|x\rangle = 0\}$. Li indichiamo con $|u_2\rangle$ e$|u_3\rangle$, posto $|u_1\rangle = |u\rangle$ e ne consideriamo le rappresentazioni

$$|u_{2,3}\rangle = u^j_{(2,3)}|e_j\rangle\,,$$

rispetto alla base data, essendo $\left\{u^j_{(2)}\right\}_{j=1}^3$ e $\left\{u^j_{(2)}\right\}_{j=1}^3$ gli insiemi delle loro componenti controvarianti. Le condizioni di ortogonalità sono:

$$0 = \langle u_1|u_2\rangle = u^1_{(2)} - 2u^2_{(2)} + u^3_{(2)}\,, \quad 0 = \langle u_1|u_3\rangle = u^1_{(3)} - 2u^2_{(3)} + u^3_{(3)}\,, \quad 0 = \langle u_2|u_3\rangle = u^{1*}_{(2)}u^1_{(3)} + u^{2*}_{(2)}u^2_{(3)} + u^{3*}_{(2)}u^3_{(3)}\,.$$

Ciascuna equazione impone due vincoli reali, l'annullamento della parte reale e quello della parte immaginaria, per cui si hanno 6 gradi di libertà reali, avendo due terne di componenti controvarianti complesse e quindi 12 parametri reali da determinare a fronte di soli sei vincoli reali. Fissiamo, inizialmente, quattro dei sei gradi di libertà ponendo: $u^1_{(2)} = u^1_{(3)} = 1$ si hanno

$$0 = 1 - 2u^2_{(2)} + u^3_{(2)}\,, \quad 0 = 1 - 2u^2_{(3)} + u^3_{(3)}\,, \quad 0 = 1 + u^{2*}_{(2)}u^2_{(3)} + u^{3*}_{(2)}u^3_{(3)}\,.$$

Infine, gli ultimi due gradi di libertà vengono sfruttati per porre $u^3_{(2)} = 1$, di conseguenza si hanno le equazioni

$$0 = 1 - 2u^2_{(2)} + 1\,, \quad 0 = 1 - 2u^2_{(3)} + u^3_{(3)}\,, \quad 0 = 1 + u^{2*}_{(2)}u^2_{(3)} + u^3_{(3)}\,.$$

Dalla prima di esse si ottiene $u^2_{(2)} = 1$; cosicché la seconda e la terza danno il sistema lineare

$$\left\{\begin{array}{r} -2u^2_{(3)} + u^3_{(3)} = -1 \\ u^2_{(3)} + u^3_{(3)} = -1 \end{array}\right.\,,$$

le cui soluzioni sono

$$u^2_{(3)} = \frac{\det\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} = \frac{0}{-3} = 0\,, \qquad u^2_{(3)} = \frac{\det\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} = \frac{3}{-3} = -1\,.$$

Abbiamo le due terne di componenti controvarianti e quindi, includendo anche quello dato dal problema, i tre autovettori non normalizzati sono

$$|u\rangle = |u_1\rangle = |e_1\rangle - 2|e_2\rangle + |e_3\rangle\,, \quad |u_2\rangle = |e_1\rangle + |e_2\rangle + |e_3\rangle\,, \quad |u_3\rangle = |e_1\rangle - |e_3\rangle\,.$$

Ne verifichiamo l'ortogonalità considerando i tre prodotti scalari misti

$$\begin{aligned}
\langle u_1|u_2\rangle &= \big(\langle e_1| - 2\langle e_2| + \langle e_3|\big)\big(|e_1\rangle + |e_2\rangle + |e_3\rangle\big) = \langle e_1|e_1\rangle - 2\langle e_2|e_2\rangle + \langle e_3|e_3\rangle = 1 - 2 + 1 = 0\,,\\
\langle u_1|u_3\rangle &= \big(\langle e_1| - 2\langle e_2| + \langle e_3|\big)\big(|e_1\rangle - |e_3\rangle\big) = \langle e_1|e_1\rangle - \langle e_3|e_3\rangle = 1 - 1 = 0\,,\\
\langle u_2|u_3\rangle &= \big(\langle e_1| + \langle e_2| + \langle e_3|\big)\big(|e_1\rangle - |e_3\rangle\big) = \langle e_1|e_1\rangle - \langle e_3|e_3\rangle = 1 - 2 + 1 = 0\,.
\end{aligned}$$

L'insieme degli autovettori dell'operatore $\hat{P}$ è quindi normale, possiamo normalizzare, essendo essi definiti a meno di una costante moltiplicativa, moltiplicandoli per l'inverso della norma. Ne consegue che l'insieme ortonormale dei tre autovettori è definito come

$$\left\{|w_k\rangle = \frac{|u_k\rangle}{\|u_k\|}\right\}_{k=1}^{3} = \left\{|w_1\rangle = \frac{|e_1\rangle - 2|e_2\rangle + |e_3\rangle}{\sqrt{6}}, |w_2\rangle = \frac{|e_1\rangle + |e_2\rangle + |e_3\rangle}{\sqrt{3}}, |w_3\rangle = \frac{|e_1\rangle - |e_3\rangle}{\sqrt{2}}\right\}\,.$$

Esso rappresenta una base ortonormale dello spazio vettoriale $E_3$, rispetto alla quale l'operatore $\hat{P}$ ha, ovviamente, la rappresentazione diagonale

$$P_d = \mathrm{diag}\,(1,0,0)\,,$$

gli elementi della diagonale sono gli autovalori dell'operatore, ovvero gli elementi del suo spettro discreto. Valgono quindi le equazioni agli autovalori

$$\hat{P}|w_1\rangle = 1\cdot|w_1\rangle = |w_1\rangle\,, \qquad \hat{P}|w_2\rangle = 0\cdot|w_2\rangle = |0\rangle\,, \qquad \hat{P}|w_3\rangle = 0\cdot|w_3\rangle = |0\rangle\,.$$

Potremmo scrivere le tre equazioni agli autovalori con una legge unica, in termini della delta di Kronecker, ovvero

$$\hat{P}|w_k\rangle = \delta_k^1|w_k\rangle\,, \qquad k = 1,2,3\,.$$

La matrice unitaria diagonalizzante $U$, che permette di ottenere la rappresentazione diagonale a partire da quella rispetto alla base data, ha come elementi le componenti controvarianti degli autovettori rispetto, appunto, alla base data $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^3$. In particolare, avremo $U_k^j = w_{(k)}^j$, con $k,j = 1,2,3$, con $|w_k\rangle = w_{(k)}^j|e_j\rangle$, cioè

$$U = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} \\ -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & 0 \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

La matrice $P$ che rappresenta l'operatore $\hat{P}$ rispetto alla base data si ottiene dalla trasformazione inversa di quella diagonalizzante

$$\begin{aligned}
P &= UP_dU^\dagger \\
&= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} \\ -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & 0 \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 0 & 0 \\ -2/\sqrt{6} & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{6} & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1/6 & -1/3 & 1/6 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ 1/6 & -1/3 & 1/6 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

ovvero

$$P = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Poiché lo spettro discreto contiene solo lo zero e l'unità si ha che l'operatore $\hat{P}$ è idempotente ed, essendo pure hermitiano, in quanto la matrice che lo rappresenta rispetto alla base ortonormale data è infatti reale e simmetrica, si ha che $\hat{P}$ è un operatore di proiezione. Verifichiamo l'idempotenza, a tal fine usiamo come base l'insieme ortonormale degli autovettori e consideriamo l'azione su un generico vettore $|x\rangle \in E_3$, per cui valga la rappresentazione $|x\rangle = x^k|w_k\rangle$, si ha

$$\hat{P}|x\rangle = x^k\hat{P}|w_k\rangle = x^k\delta^1_k|w_k\rangle = x^1|w_1\rangle \,.$$

Ne consegue che l'azione del quadrato dello stesso operatore coincide con quella del solo $\hat{P}$, infatti

$$\hat{P}^2|x\rangle = x^k\hat{P}^2|w_k\rangle = x^k\delta^1_k\hat{P}|w_k\rangle = x^k\left(\delta^1_k\right)^2|w_k\rangle = x^1|w_1\rangle = \hat{P}|x\rangle \,,$$

questa identità implica l'idempotenza, ovvero $\hat{P} = \hat{P}^2 = \hat{P}^3 = \cdots = \hat{P}^n$, $\forall, n \in \mathbb{N}$.
Alla luce di questi risultati, studiamo gli operatori della successione $\left\{\hat{Q}_n = \exp\left(in\pi\,\hat{P}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$, poiché l'operatore $\hat{P}$ è diagonalizzabile, sfruttiamo il teorema spettrale per scrivere l'esponenziale dell'operatore come serie, cioè

$$\hat{Q}_n = \exp\left(in\pi\,\hat{P}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(in\pi)^k}{k!}\hat{P}^k = \hat{I} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(in\pi)^k}{k!}\hat{P}^k = \hat{I} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(in\pi)^k}{k!}\hat{P} \,,$$

la penultima identità si ha poiché $\hat{P}^0 = \hat{I}$, mentre l'ultima è stata ottenuta usando l'idempotenza, ovvero $\hat{P}^k = \hat{P}$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$. La serie è scalare e, mancando il primo termine, rappresenta l'esponenziale meno l'unità. Si hanno due possibili espressioni che dipendono solo dalla parità del numero naturale $n$ e sono

$$\hat{Q}_n = \hat{I} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(in\pi)^k}{k!}\hat{P} = \hat{I} + \left(e^{in\pi} - 1\right)\hat{P} = \begin{cases} \hat{I} & \text{per } n \text{ pari} \\ \hat{I} - 2\hat{P} & \text{per } n \text{ dispari} \end{cases} \,.$$

Sono queste le espressioni richieste. Inoltre, sulla base di questo risultato e in virtù del teorema spettrale, è immediato osservare che gli operatori dispari $\hat{Q}_{2n-1}$, con $n \in \mathbb{N}$, hanno stessi autovettori dell'operatore $\hat{P}$ e come autovalori gli elementi dell'insieme $\left\{\eta_k = 1 - 2\delta^1_k\right\}_{k=1}^{3} = \{-1, 1, 1,\}$ e quindi si hanno le tre equazioni agli autovalori

$$\hat{Q}_{2n-1}|w_1\rangle = -|w_1\rangle \,, \qquad \hat{Q}_{2n-1}|w_2\rangle = |w_2\rangle \,, \qquad \hat{Q}_{2n-1}|w_3\rangle = |w_3\rangle \,.$$

Gli operatori pari $Q_{2n}$, con $n \in \mathbb{N}$, invece, coincidono con l'identità, allora si ha che: $\forall\, |x\rangle \in E_3$, $\hat{Q}_{2n}|x\rangle = |x\rangle$, ovvero, ogni vettore è autovettore con autovalore unitario.