Metodi Matematici per la Fisica

Prova parziale del 2 luglio 2020

Si risolvano cortesemente i seguenti problemi, sapendo che soltanto due problemi, uno dei primi tre e uno degli ultimi tre, che il candidato sceglierà prima della chiusura della prova, saranno oggetto di valutazione. A ciascun problema è assegnato un punteggio che varia nell'intervallo $[0, 15/30]$ ed è stabilito in base ai seguenti criteri:

1. la correttezza del risultato ottenuto e della procedura utilizzata;
2. la completezza dei passaggi riportati;
3. il livello di esemplificazione con cui sono espressi i risultati (ad esempio un risultato numerico reale non deve contenere l'unità immaginaria);
4. la correttezza del formalismo utilizzato;
5. la chiarezza dell'esposizione e la leggibilità del testo;

Inoltre, al fine di favorire una preparazione che copra il maggior numero di argomenti del programma, verranno valutati i contributi relativi, premiando i casi in cui il modulo della differenza tra i punteggi dei due problemi sia minimo.

Primo problema (punteggio massimo: 15/30)

Si calcoli l'integrale

$$A_1 = \int_0^{2\pi} \ln(\cos(\alpha)+3)\cos(\alpha)d\alpha\,.$$

Soluzione del primo problema

Integriamo per parti così da ottenere un'integranda non polidroma, ovvero senza la funzione logaritmo, infatti si ha

$$A_1 = \ln(\cos(\alpha)+3)\,\mathrm{sen}(\alpha)\Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{sen}^2(\alpha)}{\cos(\alpha)+3}d\alpha = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{sen}^2(\alpha)}{\cos(\alpha)+3}d\alpha\,,$$

l'annullamento del primo termine segue dalla periodicità delle funzioni trigonometriche. Facciamo la sostituzione $z = e^{i\alpha}$ che implica

$$\mathrm{sen}(\alpha) = \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right), \qquad \cos(\alpha) = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right), \qquad d\alpha = -i\frac{dz}{z}\,,$$

quindi l'integrale diventa

$$A_1 = \frac{i}{2}\oint_{|z|=1} \frac{\left(z^2-1\right)^2}{z^2\left(z^2+6z+1\right)}dz\,.$$

La funzione integranda ha un polo doppio nell'origine e due poli semplici negli zeri del polinomio z^2+6z+1, che sono: $z_{1,2} = -3 \mp 2\sqrt{2}$. Il percorso d'integrazione è la circonferenza unitaria e avvolge il polo doppio nell'origine e il polo semplice z_2, infatti $|z_2| = 3-2\sqrt{2} < 1$, mentre $|z_1| = 3+2\sqrt{2} > 1$. Applichiamo il teorema dei residui

$$A_1 = 2i\pi\frac{i}{2}\left(\mathrm{Res}\left[\frac{\left(z^2-1\right)^2}{z^2\left(z^2+6z+1\right)}, 0\right] + \mathrm{Res}\left[\frac{\left(z^2-1\right)^2}{z^2\left(z^2+6z+1\right)}, z_2 = -3+2\sqrt{2}\right]\right),$$

il residuo nell'origine vale

$$\mathrm{Res}\left[\frac{\left(z^2-1\right)^2}{z^2\left(z^2+6z+1\right)}, 0\right] = \frac{d}{dz}\frac{\left(z^2-1\right)^2}{z^2+6z+1}\Bigg|_{z=0} = \frac{4z\left(z^2+1\right)\left(z^2+6z+1\right)^2 - (2z+6)\left(z^2-1\right)^2}{\left(z^2+6z+1\right)^2}\Bigg|_{z=0} = -6\,.$$

Il residuo nel polo semplice z_2

$$\operatorname{Res}\left[\frac{\left(z^2-1\right)^2}{z^2\left(z^2+6z+1\right)}, z_2\right] = \frac{\left(z_2^2-1\right)^2}{z_2^2\left(z_2-z_1\right)} = \left(z_2-\frac{1}{z_2}\right)^2\frac{1}{z_2-z_1} = \left(2i\operatorname{sen}(\alpha_2)\right)^2\frac{1}{z_2-z_1} = -\frac{\operatorname{sen}^2(\alpha_2)}{\sqrt{2}},$$

dove si è fatta la sostituzione $z_2 = e^{i\alpha_2}$ e si ha che, essendo z_2 uno zero del polinomio di secondo grado a denominatore, $\cos(\alpha_2) = -3$ e quindi $\operatorname{sen}^2(\alpha_2) = 1-\cos^2(\alpha_2) = -8$, allora il residuo vale

$$\operatorname{Res}\left[\frac{\left(z^2-1\right)^2}{z^2\left(z^2+6z+1\right)}, z_2\right] = -\frac{\operatorname{sen}^2(\alpha_2)}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}.$$

Il risultato cercato è

$$A_1 = \pi\left(6-4\sqrt{2}\right).$$

Secondo problema (punteggio massimo: 15/30)

Si calcoli l'integrale

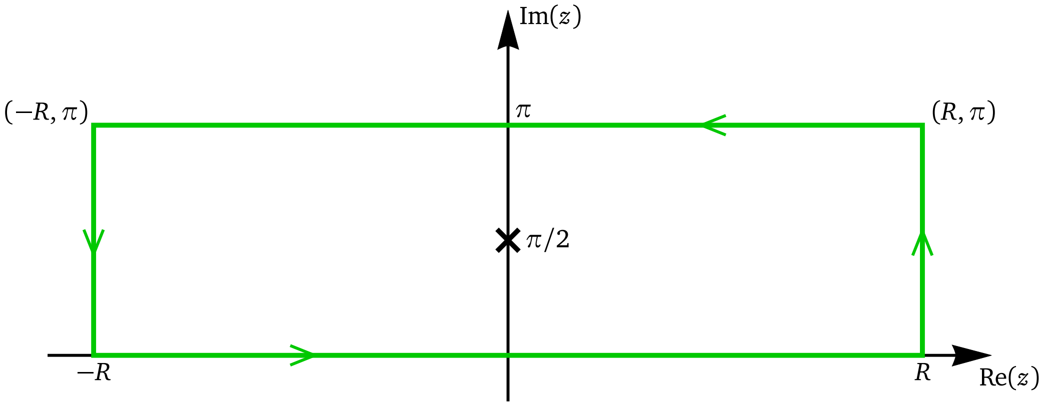
$$A_2 = \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(\sqrt{w})}{\cosh(\sqrt{w})}dw.$$

Soluzione del secondo problema

Facendo la sostituzione $x = \sqrt{w}$ e considerando la parità della funzione integranda si ha

$$A_2 = 2\int_0^\infty \frac{x\operatorname{sen}(x)}{\cosh(x)}dx = \int_{-\infty}^\infty \frac{x\operatorname{sen}(x)}{\cosh(x)}dx.$$

La funzione integranda ha nel piano complesso infiniti poli semplici allineati lungo l'asse immaginario, nei punti dell'insieme $\{z_k = (2k+1)i\pi/2\}_{k\in\mathbb{Z}}$.



Consideriamo il percorso chiuso, rettangolare Γ_R mostrato in figura, dato dall'unione di quattro tratti rettilinei, cioè

$$\Gamma_R = [-R,R]\cup[R,R+i\pi]\cup[R+i\pi,-R+i\pi]\cup[-R+i\pi,-R],$$

dove si è usato il simbolo $[w_1,w_2]$ per indicare il segmento di estremi w_1 e w_2 orientato nel verso che va dal primo al secondo estremo. Usando il teorema dei residui si ha

$$\oint_{\Gamma_R}\frac{z\operatorname{sen}(z)}{\cosh(z)}dz = 2i\pi\operatorname{Res}\left[\frac{z\operatorname{sen}(z)}{\cosh(z)}, z = i\pi/2\right] = 2i\pi\frac{i\pi\, i\operatorname{senh}(\pi/2)}{2}\lim_{z\to i\pi/2}\frac{z-i\pi/2}{\cosh(z)} = -\pi^2\operatorname{senh}(\pi/2).$$

Questo valore non dipende da R, possiamo considerare il limite $R \to \infty$ e scomporre l'integrale su Γ_R nella somma dei quattro contributi dovuti ai tratti rettilinei che costituiscono il percorso d'integrazione, avremo

$$
\begin{aligned}
-\pi^2 \operatorname{senh}(\pi/2) = \lim_{R\to\infty} \oint_{\Gamma_R} \frac{z \operatorname{sen}(z)}{\cosh(z)} dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \operatorname{sen}(x)}{\cosh(x)} dx + \int_{\infty}^{-\infty} \frac{(x+i\pi)\operatorname{sen}(x+i\pi)}{\cosh(x+i\pi)} dx \\
+ i \lim_{R\to\infty} \left(\int_0^{\pi} \frac{(R+iy)\operatorname{sen}(R+iy)}{\cosh(R+iy)} dy + \int_{\pi}^{0} \frac{(-R+iy)\operatorname{sen}(-R+iy)}{\cosh(-R+iy)} dy \right).
\end{aligned}
$$

Dimostriamo che i valori limite degli ultimi due integrali, sui tratti verticali, sono nulli, utilizzando la disuguaglianza di Darboux, si ha

$$
\begin{aligned}
\left| \int_0^{\pi} \frac{(\pm R+iy)\operatorname{sen}(\pm R+iy)}{\cosh(\pm R+iy)} dy \right| &\le (R+\pi) \int_0^{\pi} \frac{\left| e^{\pm iR-y} - e^{\mp iR+y} \right|}{\left| e^{\pm R+iy} + e^{\mp R-iy} \right|} dy \le (R+\pi) \int_0^{\pi} \frac{\left| e^{\pm iR-y} \right| + \left| e^{\mp iR+y} \right|}{\left| \left| e^{\pm R+iy} \right| - \left| e^{\mp R-iy} \right| \right|} dy \\
&= (R+\pi) \int_0^{\pi} \frac{e^{-y}+e^{y}}{\left| e^{\pm R} - e^{\mp R} \right|} dy = \frac{R+\pi}{\operatorname{senh}(R)} \int_0^{\pi} \cosh(y) dy \\
&= \frac{(R+\pi)\operatorname{senh}(\pi)}{\operatorname{senh}(R)} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0 .
\end{aligned}
$$

Ne consegue che la relazione precedente diventa

$$
\begin{aligned}
-\pi^2 \operatorname{senh}(\pi/2) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \operatorname{sen}(x)}{\cosh(x)} dx + \int_{\infty}^{-\infty} \frac{(x+i\pi)\operatorname{sen}(x+i\pi)}{\cosh(x+i\pi)} dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \operatorname{sen}(x)}{\cosh(x)} dx + \int_{\infty}^{-\infty} \frac{(x+i\pi)\left(\operatorname{sen}(x)\cosh(\pi) + i\cos(x)\operatorname{senh}(\pi)\right)}{-\cosh(x)} dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \operatorname{sen}(x)}{\cosh(x)} dx + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \operatorname{sen}(x)\cosh(\pi) - \pi\cos(x)\operatorname{senh}(\pi)}{\cosh(x)} dx \\
&= A_2\left(1+\cosh(\pi)\right) - \pi \operatorname{senh}(\pi) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{\cosh(x)} dx ,
\end{aligned}
$$

la penultima e quindi l'ultima identità seguono dal fatto che gli integrali con integrande proporzionali alle funzioni dispari $x/\cosh(x)$ e $x\cos(x)/\cosh(x)$ danno contributi nulli.
Alla luce del risultato precedente otteniamo l'integrale cercato come

$$
\begin{aligned}
A_2 &= \frac{1}{1+\cosh(\pi)} \left(-\pi^2 \operatorname{senh}(\pi/2) + \pi \operatorname{senh}(\pi) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{\cosh(x)} dx \right) \\
&= \frac{1}{2\cosh^2(\pi/2)} \left(-\pi^2 \operatorname{senh}(\pi/2) + 2\pi \operatorname{senh}(\pi/2)\cosh(\pi/2) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{\cosh(x)} dx \right) \\
&= \frac{\pi \operatorname{senh}(\pi/2)}{2\cosh^2(\pi/2)} \left(-\pi + 2\cosh(\pi/2) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{\cosh(x)} dx \right).
\end{aligned}
$$

Per calcolare l'integrale a secondo membro usiamo la stessa procedura d'integrazione nel piano complesso, ovvero consideriamo l'integrale della stessa funzione integranda sul percorso chiuso Γ_R, usiamo il teorema dei residui e facciamo il limite per $R \to \infty$, si ha

$$
\lim_{R\to\infty} \oint_{\Gamma_R} \frac{\cos(z)}{\cosh(z)} dz = 2i\pi \operatorname{Re}\left[\frac{\cos(z)}{\cosh(z)}, z = i\pi/2 \right] = 2i\pi \cosh(\pi/2) \lim_{z\to i\pi/2} \frac{z - i\pi/2}{\cosh(z)} = 2\pi \cosh(\pi/2).
$$

D'altro canto, in termini dei singoli contributi sui tratti rettilinei del percorso Γ_R avremo

$$
2\pi \cosh(\pi/2) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{\cosh(x)} dx + \int_{\infty}^{-\infty} \frac{\cos(x+i\pi)}{\cosh(x+i\pi)} dx + i \lim_{R\to\infty} \left(\int_0^{\pi} \frac{\cos(R+iy)}{\cosh(R+iy)} dy + \int_{\pi}^{0} \frac{\cos(-R+iy)}{\cosh(-R+iy)} dy \right).
$$

Dimostriamo che i valori limite degli ultimi due integrali sono nulli, anche in questo caso avvalendoci della disuguaglianza di Darboux,

$$\left|\int_0^\pi \frac{\cos(\pm R+iy)}{\cosh(\pm R+iy)}dy\right| \le \int_0^\pi \frac{\left|e^{\pm iR-y}\right|+\left|e^{\mp iR+y}\right|}{\left|\left|e^{\pm R+iy}\right|-\left|e^{\mp R-iy}\right|\right|}dy = \int_0^\pi \frac{e^{-y}+e^{y}}{\left|e^{\pm R}-e^{\mp R}\right|}dy = \frac{1}{\mathrm{senh}(R)}\int_0^\pi \left(e^{-y}+e^{y}\right)dy$$
$$= \frac{\mathrm{senh}(\pi)}{\mathrm{senh}(R)} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0\,.$$

Dall'identità precedente segue che

$$\begin{aligned}
2\pi\cosh(\pi/2) &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(x)}{\cosh(x)}dx + \int_{\infty}^{-\infty}\frac{\cos(x+i\pi)}{\cosh(x+i\pi)}dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(x)}{\cosh(x)}dx + \int_{\infty}^{-\infty}\frac{\cos(x)\cosh(\pi)-i\,\mathrm{sen}(x)\,\mathrm{senh}(\pi)}{-\cosh(x)}dx \\
&= (1+\cosh(\pi))\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(x)}{\cosh(x)}dx\,,
\end{aligned}$$

dove si è considerato che l'integrale con integranda proporzionale alla funzione dispari $\mathrm{sen}(x)/\cosh(x)$ è nullo. Si ottiene quindi

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(x)}{\cosh(x)}dx = \frac{2\pi\cosh(\pi/2)}{1+\cosh(\pi)} = \frac{2\pi\cosh(\pi/2)}{2\cosh^2(\pi/2)} = \frac{\pi}{\cosh(\pi/2)}\,.$$

Sostituiamo questo risultato nell'espressione di A_2 precedentemente ricavata

$$A_2 = \frac{\pi\,\mathrm{senh}(\pi/2)}{2\cosh^2(\pi/2)}\left(-\pi + 2\cosh(\pi/2)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(x)}{\cosh(x)}dx\right)\,,$$

così da ottenere l'integrale cercato

$$A_2 = \frac{\pi^2\,\mathrm{senh}(\pi/2)}{2\cosh^2(\pi/2)}\,.$$

Terzo problema (punteggio massimo: 15/30)

Si calcoli l'integrale

$$A_3 = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(\alpha x)-\cos(\beta x)}{x^2(x^2+1)}dx\,,$$

con $\alpha, \beta > 0$.

Soluzione del terzo problema

Deformiamo con continuità il percorso d'integrazione aggirando l'origine con una semi-circonferenza immersa nel semi-piano della parti immaginarie negative, ovvero

$$(-\infty,\infty) \quad\to\quad \Gamma_\epsilon = (-\infty,-\epsilon]\cup\gamma_\epsilon^-\cup[\epsilon,\infty)\,,\qquad \gamma_\epsilon = \left\{z : z=\epsilon e^{i\theta}, \theta\in[\pi,2\pi]\right\}\,.$$

L'origine rappresenta una singolarità eliminabile della funzione integranda, infatti, usando gli sviluppi in serie di Taylor, si ha

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(\alpha x)-\cos(\beta x)}{x^2(x^2+1)} = \lim_{x\to 0}\frac{-\alpha^2x^2/2+\beta^2x^2/2+\mathcal{O}\left(x^4\right)}{x^2(x^2+1)} = \frac{\beta^2-\alpha^2}{2}\,.$$

Scomponiamo l'integrale come

$$A_3 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\alpha x) - \cos(\beta x)}{x^2(x^2+1)} dx = \underbrace{\frac{1}{2}\int_{\Gamma_\epsilon} \frac{e^{i\alpha z} - e^{i\beta z}}{z^2(z^2+1)} dz}_{=A_3^+} + \underbrace{\frac{1}{2}\int_{\Gamma_\epsilon} \frac{e^{-i\alpha z} - e^{-i\beta z}}{z^2(z^2+1)} dz}_{=A_3^-} = A_3^+ + A_3^-$$

e calcoliamo i due integrali A_3^+ e A_3^- usando il lemma di Jordan. Si hanno

$$\begin{aligned}
A_3^+ &= \frac{1}{2}\int_{\Gamma_\epsilon} \frac{e^{i\alpha z} - e^{i\beta z}}{z^2(z^2+1)} dz = 2i\pi \left(\operatorname{Res}\left[\int_{\Gamma_\epsilon} \frac{e^{i\alpha z} - e^{i\beta z}}{z^2(z^2+1)}, z=0 \right] + \operatorname{Res}\left[\int_{\Gamma_\epsilon} \frac{e^{i\alpha z} - e^{i\beta z}}{z^2(z^2+1)}, z=i \right] \right) \\
&= i\pi \left(\lim_{z\to 0} \frac{e^{i\alpha z} - e^{i\beta z}}{z(z^2+1)} + \frac{e^{-\alpha} - e^{-\beta}}{2i(i)^2} \right) = -\pi(\alpha-\beta) - \pi\frac{e^{-\alpha} - e^{-\beta}}{2}\,; \\
A_3^- &= \frac{1}{2}\int_{\Gamma_\epsilon} \frac{e^{-i\alpha z} - e^{-i\beta z}}{z^2(z^2+1)} dz = -2i\pi \operatorname{Res}\left[\int_{\Gamma_\epsilon} \frac{e^{-i\alpha z} - e^{-i\beta z}}{z^2(z^2+1)}, z=-i \right] = -i\pi\frac{e^{-\alpha} - e^{-\beta}}{-2i(i)^2} = -\pi\frac{e^{-\alpha} - e^{-\beta}}{2}\,.
\end{aligned}$$

In definitiva, il risultato finale è

$$A_3 = A_3^+ + A_3^- = \pi\left(\beta - \alpha + e^{-\beta} - e^{-\alpha}\right).$$

Quarto problema (punteggio massimo: 15/30)

Si dimostri che la successione di funzioni

$$\left\{ \theta_n(x) = \frac{1}{e^{-nx}+1} \right\}_{n=1}^{\infty},$$

rappresenta la distribuzione $\theta(x)$, la funzione gradino di Oliver Heaviside, rispetto alla classe di funzioni di prova $\mathscr{P}$ costituita dalle funzioni sommabili, derivabili e con derivate prime sommabili in $\mathbb{R}$, con funzione peso unitaria, ovvero $\mathscr{P} = \{f(x) : \exists f'(x), \text{con: } f(x), f'(x) \in L(\mathbb{R})\}$.

Soluzione del quarto problema

Per una generica funzione di prova $f(x) \in \mathscr{P}$, definiamo la successione scalare $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$, con

$$t_n = \int_{-\infty}^{\infty} \theta_n(x) f(x) dx = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} \theta_n(x) f(x) dx}_{=t_n^-} + \underbrace{\int_{0}^{\infty} \theta_n(x) f(x) dx}_{=t_n^+} = t_n^- + t_n^+,$$

dove t_n^- e t_n^+ sono i contributi dell'n-esimo termine della successione e si ottengono, rispettivamente, integrando sul semi-asse reale negativo e positivo. Per l'integrale t_n^-, usando la primitiva della funzione $\theta_n(x)$

$$\int \theta_n(x) dx = \int \frac{1}{e^{-nx}+1} dx = \int \frac{e^{nx}}{e^{nx}+1} dx = \frac{1}{n}\ln(e^{nx}+1),$$

si ha

$$t_n^- = \frac{1}{n}\ln(e^{nx}+1) f(x)\Big|_{-\infty}^{0} - \frac{1}{n}\int_{-\infty}^{0} \ln(e^{nx}+1) f'(x) dx = \frac{1}{n}\ln(2) f(0) - \frac{1}{n}\int_{-\infty}^{0} \ln(e^{nx}+1) f'(x) dx,$$

il primo termine è stato calcolato considerando i valori limite

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{n}\ln(e^{nx}+1) f(x) = \frac{1}{n}\ln(2) f(0), \qquad \lim_{x\to -\infty} \frac{1}{n}\ln(e^{nx}+1) f(x) = 0.$$

L'annullamento dell'ultimo limite è garantito sia da quello della funzione logaritmo, che da quello della stessa funzione $f(x)$ che, essendo sommabile in $\mathbb{R}$, deve essere asintoticamente nulla, cioè

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0.$$

Il limite della successione $\left\{t_n^-\right\}_{n=1}^{\infty}$ è

$$\lim_{n\to\infty} t_n^- = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\ln(2) f(0) - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_{-\infty}^{0} \ln\left(e^{nx}+1\right) f'(x)dx = -\int_{-\infty}^{0}\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(e^{nx}+1\right)}{n} f'(x)dx = 0\,,$$

il primo limite è nullo in quanto la funzione ha un valore finito nell'origine. Per il calcolo del secondo integrale abbiamo applicato il teorema del passaggio al limite, considerando la successione di funzioni

$$\left\{g_n^-(x) = \frac{\ln\left(e^{nx}+1\right)}{n} f'(x)\right\}_{n=1}^{\infty}\,,$$

convergente alla funzione nulla, al divergere di $n\to\infty$. Al fine di poter applicare il teorema è necessario che esista una funzione $\phi^-(x)$ sommabile nell'intervallo considerato, il semi-asse reale negativo, $\phi^-(x)\in L(-\infty,0)$, tale che

$$|g_n^-(x)| \le \phi^-(x)\,, \qquad \forall\, x\in(-\infty,0)\,,\ \ \forall\, n\in\mathbb{N}\,.$$

Possiamo definire la funzione $\phi^-(x)$ come $\phi^-(x) = \ln(2)|f'(x)|$, infatti, $\forall\, x\in(-\infty,0)$, si ha la minorazione

$$0 \le |g_n^-(x)| = \left|\frac{\ln\left(e^{nx}+1\right)}{n} f'(x)\right| \le \frac{\ln(2)}{n}|f'(x)| \le \ln(2)|f'(x)| = \phi^-(x)\,,$$

poiché, per ipotesi $f'(x)\in L(\mathbb{R})$ si hanno anche: $f'(x)\in L(-\infty,0)$ e quindi $\phi^-(x)\in L(-\infty,0)$.

Consideriamo il limite della successione $\left\{t_n^+\right\}_{n=1}^{\infty}$, il cui termine n-esimo

$$\begin{aligned}
t_n^+ &= \frac{1}{n}\ln\left(e^{nx}+1\right) f(x)\Big|_0^{\infty} - \frac{1}{n}\int_0^{\infty}\ln\left(e^{nx}+1\right) f'(x)dx\\
&= \underbrace{\lim_{x\to\infty}\frac{1}{n}\ln\left(e^{nx}+1\right) f(x)}_{=\lim_{x\to\infty} x f(x)=0} - \frac{\ln(2)}{n} f(0) - \frac{1}{n}\int_0^{\infty}\ln\left(e^{nx}+1\right) f'(x)dx\\
&= -\frac{\ln(2)}{n} f(0) - \frac{1}{n}\int_0^{\infty}\ln\left(e^{nx}+1\right) f'(x)dx\,,
\end{aligned}$$

dove l'annullamento del limite

$$\lim_{x\to\infty} x f(x) = 0\,,$$

è conseguenza della sommabilità della funzione $f(x)$, che implica: $f(x) = o(1/x)$, per $x\to\pm\infty$. Calcoliamo il limite della successione, cioè

$$\lim_{n\to\infty} t_n^+ = -\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(2)}{n} f(0) - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_0^{\infty}\ln\left(e^{nx}+1\right) f'(x)dx = -\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_0^{\infty}\ln\left(e^{nx}+1\right) f'(x)dx\,.$$

La successione di funzioni

$$\left\{g_n^+(x) = \frac{\ln\left(e^{nx}+1\right)}{n} f'(x)\right\}_{n=1}^{\infty}\,,$$

che differisce dalla precedente $\left\{g_n^-(x)\right\}_{n=1}^{\infty}$ solo per il dominio in cui sono definite le funzioni ovvero il semi-asse reale positivo, converge alla funzione $x f'(x)$. Per poter applicare il teorema del passaggio al limite dobbiamo determinare la funzione $\phi^+(x)\in L(0,\infty)$ consideriamo la minorazione

$$0 \le |g_n^+(x)| = \left|\frac{\ln\left(e^{nx}+1\right)}{n} f'(x)\right| \le \ln\left(e^x+1\right)|f'(x)| \le \ln\left(e^x+e^x\right)|f'(x)| \le \big(\ln(2)+x\big)|f'(x)|\,,$$

dove abbiamo utilizzato le disuguaglianze

$$\begin{aligned}
&\frac{\ln\left(e^{nx}+1\right)}{n} \le \ln\left(e^x+1\right) \quad \Leftarrow \quad e^{nx}+1 \le \left(e^x+1\right)^n = e^{nx}+1+\underbrace{\sum_{j=1}^{n-1}\binom{j}{n}e^{jx}}_{\ge 0}\,,\\
&e^x+1 \le 2e^x \quad \Leftarrow \quad x>0\,.
\end{aligned}$$

Definendo la funzione

$$\phi^+(x) = \big(\ln(2) + x\big)|f'(x)|\,,$$

si ha, per quanto già dimostrato,

$$|g_n^+(x)| \le \phi^+(x)\,, \qquad \forall\, x \in (0,\infty)\,,\ \ \forall\, n \in \mathbb{N}\,.$$

Verifichiamo che la funzione $\phi^+(x)$ sia sommabile nel semi-asse reale positivo, ovvero che $\phi^+(x) \in L(0,\infty)$, poiché per ipotesi $f'(x) \in L(\mathbb{R})$ e quindi $f'(x) \in L(0,\infty)$, rimane da dimostrare che $xf'(x) \in L(0,\infty)$. Dalla condizione di sommabilità in $\mathbb{R}$ della funzione $f(x)$ segue che $f(x) = o(1/x)$, per $x \to \pm\infty$, da cui si ha $f'(x) = o(1/x^2)$. Ne consegue che: $\exists T, D, \beta > 0$, tali che,

$$|f'(x)| \le \frac{D}{x^{2+\beta}}\,, \qquad \forall\, x \ge T\,.$$

Poiché $f'(x) \in L(\mathbb{R})$, la funzione $f'(x)$ è limitata, ovvero, indicando con M_T il valore massimo del suo modulo si ha

$$M_T = \max_{x\in(0,T)} \big\{|f'(x)|\big\} < \infty\,.$$

In definitiva, avremo la limitazione

$$x|f'(x)| \le \phi_1^+(x) = \begin{cases} xM_T & x \in (0,T) \\ \dfrac{D}{x^{1+\beta}} & x \in [T,\infty) \end{cases}\,, \qquad D,\, M_T,\, T,\, \beta > 0\,,$$

dove la funzione non negativa $\phi_1^+(x)$ è sommabile nel semi-asse reale positivo, infatti

$$\int_0^\infty \phi_1^+(x)dx = M_T \int_0^T x\,dx + D\int_T^\infty \frac{dx}{x^{1+\beta}} = M_T\frac{T^2}{2} + D\frac{1}{\beta T^\beta} < \infty.$$

Consideriamo l'integrale della funzione $\phi^+(x) = \big(\ln(2) + x\big)|f'(x)|$

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \phi^+(x)dx = \int_0^\infty \big(\ln(2) + x\big)|f'(x)|dx &\le \int_0^\infty \big(\ln(2)|f'(x)| + x|f'(x)|\big)dx \\ &\le \ln(2)\int_0^\infty |f'(x)|dx + \int_0^\infty x|f'(x)|dx < \infty\,,\end{aligned}$$

dove, per il primo e secondo integrale, abbiamo usato, rispettivamente, la sommabilità della derivata prima, cioè $f'(x) \in L(\mathbb{R})$ e quella della funzione $x|f'(x)|$, appena dimostrata.
Alla luce di tutto ciò, possiamo far passare il limite sotto il segno di integrale per cui si ha

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} t_n^+ &= -\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_0^\infty \ln(e^{nx}+1)f'(x)dx = -\int_0^\infty \underbrace{\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(e^{nx}+1)}{n}}_{=x} f'(x)dx = -\int_0^\infty xf'(x)dx \\ &= -xf(x)\Big|_0^\infty + \int_0^\infty f(x)dx = \int_0^\infty f(x)dx\,,\end{aligned}$$

dove, ancora una volta, l'annullamento del primo termine segue dalla sommabilità della funzione $f(x)$ in $\mathbb{R}$, che implica, come già visto,

$$\lim_{x\to\infty} xf(x) = 0\,,$$

ovvero dalla sua limitatezza nell'origine, per cui

$$\lim_{x\to 0} xf(x) = 0\,.$$

In definitiva, il limite della successione completa $\big\{t_n = t_n^+ + t_n^-\big\}_{n=1}^\infty$ coincide con la somma dei limiti, si ha

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^\infty \theta_n(x)f(x)dx = \lim_{n\to\infty} t_n = \lim_{n\to\infty}\big(t_n^+ + t_n^-\big) = \int_0^\infty f(x)dx = \int_{-\infty}^\infty \theta(x)f(x)dx\,,$$

da cui si ottiene che, come volevasi dimostrare, la successione funzionale

$$\left\{\theta_n(x) = \frac{1}{e^{-nx}+1}\right\}_{n=1}^{\infty},$$

rappresenta la distribuzione $\theta(x)$ rispetto alla classe di funzioni di prova $\mathscr{P}$.

Quinto problema (punteggio massimo: 15/30)

Sia $\hat{A}$ l'operatore definito nello spazio delle funzioni a quadrato sommabili con funzione peso unitaria e continue in $\mathbb{R}$, $L^2(\mathbb{R}) \cap C_0(\mathbb{R})$ ($C_0(\mathbb{R})$ rappresenta l'insieme delle funzioni continue in $\mathbb{R}$), dalla legge di azione

$$\hat{A}f(x) = \frac{1}{\pi}\,\mathrm{Pr}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x')}{x-x'}dx',$$

$\forall\, f(x) \in L^2(\mathbb{R}) \cap C_0(\mathbb{R})$.
Si dimostri che $\hat{A}^2 = -\hat{I}$, ovvero che

$$\hat{A}^2 f(x) = -f(x),$$

$\forall\, f(x) \in L^2(\mathbb{R}) \cap C_0(\mathbb{R})$.
Suggerimento. Potrebbe essere di aiuto l'utilizzo della trasformata di Fourier.

Soluzione del quinto problema

È immediato osservare che l'azione dell'operatore sulla funzione $f(x)$ rappresenta, a meno del fattore $1/\pi$, la convoluzione della stessa funzione $f(x)$ con la funzione $g(x) = 1/x$, ovvero si ha

$$\hat{A}f(x) = \frac{1}{\pi}\left(f * g\right)(x).$$

Consideriamo l'azione dell'operatore $\hat{A}^2$, si ha

$$\hat{A}\left(\hat{A}f(x)\right) = \frac{1}{\pi}\hat{A}\left(f*g\right)(x) = \frac{1}{\pi^2}\left(\left(f*g\right)*g\right)(x).$$

Il teorema di Placherel assicura l'esistenza della trasformata di Fourier della funzione $f(x)$ in quanto a quadrato sommabile in $\mathbb{R}$ con funzione peso unitaria, possiamo quindi fare la trasformata di Fourier di ambo i membri della precedente indentità e usare il teorema della convoluzione, avremo

$$\begin{aligned}\mathscr{F}_k\left[\hat{A}\left(\hat{A}f(x)\right)\right] &= \frac{1}{\pi^2}\mathscr{F}_k\left[\left(\left(f*g\right)*g\right)\right] = \frac{\sqrt{2}}{\pi\sqrt{\pi}}\mathscr{F}_k\left[\left(f*g\right)\right]\mathscr{F}_k\left[g\right] = \frac{2}{\pi}\mathscr{F}_k\left[f\right]\mathscr{F}_k\left[g\right]\mathscr{F}_k\left[g\right]\\ &= \frac{2}{\pi}\mathscr{F}_k\left[f\right]\left(\mathscr{F}_k\left[g\right]\right)^2.\end{aligned}$$

Calcoliamo la trasformata di Fourier della funzione $g(x) = 1/x$, ricordando che nei casi come questo, in cui si abbia una singolarità reale e quindi lungo il percorso d'integrazione, l'integrale della trasformata di Fourier va considerato in valore principale,

$$\mathscr{F}_k\left[g\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{Pr}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ikx}}{x}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ikz}}{z+i\epsilon}dz + i\pi\right)$$

dove abbiamo usato la formula di Sokhotski-Plemelj. Calcoliamo l'integrale avvalendoci del lemma di Jordan per chiudere il percorso d'integrazione in funzione del valore positivo o negativo del parametro reale k, osservando che la funzione integranda ha una sola singolarità, un polo semplice in $z = -i\epsilon$ nel semi-piano della parti immaginarie negative e considerando il limite $\epsilon \to 0^+$, si ha

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ikz}}{z+i\epsilon}dz = 2i\pi\left\{\begin{array}{ll} 0 & k<0 \\ -\mathrm{Res}\left[\dfrac{e^{-ikz}}{z}, z=0\right] = 1 & k>0 \end{array}\right\} = -2i\pi\,\theta(k),$$

che sostituito nella relazione precedente per la trasformata di Fourier della funzione $g(x) = 1/x$ dà

$$\mathscr{F}_k\left[g\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(-2i\pi\theta(k) + i\pi\right) = -i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\text{segno}(k)\,.$$

Usando questo risultato nella trasformata di Fourier dell'identità che descrive l'azione dell'operatore $\hat{A}^2$ si ha

$$\mathscr{F}_k\left[\hat{A}\left(\hat{A}f(x)\right)\right] = \frac{2}{\pi}\mathscr{F}_k\left[f\right]\left(\mathscr{F}_k\left[g\right]\right)^2 = \frac{2}{\pi}\mathscr{F}_k\left[f\right]\left(-i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\text{segno}(k)\right)^2 = -\mathscr{F}_k\left[f\right]\left(\text{segno}(k)\right)^2 = -\mathscr{F}_k\left[f\right]\,.$$

Sfruttando ancora il teorema di Plancherel, che garantisce l'esistenza dell'anti-trasformata della trasformata di Fourier e la sua coincidenza quasi ovunque con la funzione di partenza, unitamente al fatto che, nel caso di funzioni continue, la coincidenza quasi ovunque implichi semplicemente la coincidenza, si ha che l'anti-trasformata di Fourier dell'identità precedente dà

$$\begin{gathered}\mathscr{F}_{-x}\left[\mathscr{F}_k\left[\hat{A}\left(\hat{A}f(x)\right)\right]\right] = -\mathscr{F}_{-x}\left[\mathscr{F}_k\left[f\right]\right]\\ \hat{A}\left(\hat{A}f(x)\right) = -f(x)\,.\end{gathered}$$

Abbiamo quindi dimostrato, come richiesto dal problema, che si ha: $\hat{A}^2 = -\hat{I}$, ovvero che il risultato dell'azione dell'operatore $\hat{A}^2$ su una generica funzione $f(x) \in L^2(\mathbb{R}) \cap C_0(\mathbb{R})$ rappresenta l'opposto della stessa funzione $f(x)$.

Sesto problema (punteggio massimo: 15/30)

Si ottenga la distribuzione rappresentata dalla successione di funzioni

$$\left\{g_k(x) = \frac{1}{ae^{kx}+1}\right\}_{k=1}^{\infty}\,,$$

con $a > 0$, rispetto alla classe di funzioni di prova $\mathscr{P}$ costituita dalle funzioni sommabili, derivabili e con derivate prime sommabili in $\mathbb{R}$, con funzione peso unitaria, ovvero $\mathscr{P} = \left\{f(x) : \exists f'(x), \text{con: } f(x), f'(x) \in L(\mathbb{R})\right\}$.

Soluzione del sesto Problema

Studiamo la successione

$$\left\{t_k = \int_{-\infty}^{\infty} g_k(x) f(x)dx\right\}_{k=1}^{\infty}\,, \qquad \forall\, f(x) \in \mathscr{P}\,,$$

ovvero la successione numerica di termine k-esimo

$$t_k = \int_{-\infty}^{\infty} g_k(x) f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{ae^{kx}+1}dx\,, \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}\,.$$

Integriamo per parti

$$t_k = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{ae^{kx}+1}dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-kx}}{a+e^{-kx}}f(x)\,dx = -\frac{\ln\left(a+e^{-kx}\right)}{k}f(x)\Bigg|_{-\infty}^{\infty} + \frac{1}{k}\int_{-\infty}^{\infty} \ln\left(a+e^{-kx}\right)f'(x)dx\,.$$

Il primo termine è nullo, infatti, dalla condizione di sommabilità si ha $f(x) = o(1/x)$ per $x \to \pm\infty$, da cui segue che, sull'estremo superiore, ovvero per $x \to \infty$, segue che: $\ln\left(a+e^{-kx}\right)f(x) = \ln(a)o(1/x) = o(1/x)$, quindi

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(a+e^{-kx}\right)}{k}f(x) = 0\,.$$

Sull'estremo inferiore, invece, $\ln\left(a+e^{-kx}\right)f(x) = -kxo(1/x) = o(1)$ per $x \to -\infty$, anche se meno rapidamente, la funzione completa è comunque infinitesima, cioè

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\ln\left(a+e^{-kx}\right)}{k}f(x) = 0\,.$$

Consideriamo il limite della successione

$$\lim_{k\to\infty} t_k = \lim_{k\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln\left(a+e^{-kx}\right)}{k} f'(x)dx\,,$$

suddividiamo l'integrale come

$$\lim_{k\to\infty} t_k = \lim_{k\to\infty} \int_{-\infty}^{0} \frac{\ln\left(a+e^{-kx}\right)}{k} f'(x)dx + \lim_{k\to\infty} \int_{0}^{\infty} \frac{\ln\left(a+e^{-kx}\right)}{k} f'(x)dx\,,$$

per poter utilizzare il teorema di passaggio al limite, ovvero per calcolare il valore limite dell'integrale della successione come integrale del valore limite della stessa. Seguiamo la procedura risolutiva del quarto problema e definiamo le funzioni sommabili $\phi^-(x) \in L(-\infty,0)$ e $\phi^+(x) \in L(0,\infty)$ tali che:

$$\begin{aligned} \left|g_k(x)\right| &\le \phi^-(x)\,, \qquad && \forall\, x\in(-\infty,0)\,,\ \ \forall\, k\in\mathbb{N}\,,\\ \left|g_k(x)\right| &\le \phi^+(x)\,, \qquad && \forall\, x\in(0,\infty)\,,\ \ \forall\, k\in\mathbb{N}\,. \end{aligned}$$

Nel semi-asse reale negativo, $x \le 0$, si ha

$$\begin{aligned} 0 \le |g_k(x)| = \left|\frac{\ln\left(a+e^{-kx}\right)}{k} f'(x)\right| &\le \ln\left(a+e^{-x}\right)|f'(x)| = \ln\left(a+e^{|x|}\right)|f'(x)|\\ &\le \ln\left(ae^{|x|}+e^{|x|}\right)|f'(x)| = (\ln(a+1)+|x|)\,|f'(x)|\,. \end{aligned}$$

Le disuguaglianze seguono dalle minorazioni

$$\frac{\ln\left(a+e^{k|x|}\right)}{k} \le \ln\left(a+e^{|x|}\right) \qquad \Leftarrow \qquad a+e^{k|x|} \le \left(a+e^{|x|}\right)^k = e^{k|x|} + \underbrace{ke^{(k-1)|x|}}_{\ge 1} a + \underbrace{\sum_{j=0}^{k-2} \binom{j}{k} e^{j|x|} a^{k-j}}_{\ge 0}\,,$$

$$a+e^{|x|} \le (a+1)e^{|x|} \qquad \Leftarrow \qquad |x|>0\,.$$

Poiché, come dimostrato, sia la funzione $|f'(x)|$ che $|x||f'(x)|$ sono sommabili in $(-\infty,0)$, lo sarà anche la loro combinazione lineare, quindi definiamo

$$\phi^-(x) = (\ln(a+1)+|x|)\,|f'(x)| = (\ln(a+1)-x)\,|f'(x)| \in L(-\infty,0)\,,$$

tale che, per costruzione,

$$\left|g_k(x)\right| \le \phi^-(x)\,, \qquad \forall\, x\in(-\infty,0)\,,\ \ \forall\, k\in\mathbb{N}\,.$$

Nel semi-asse reale positivo, $x>0$, avremo

$$0 \le |g_k(x)| = \left|\frac{\ln\left(a+e^{-kx}\right)}{k} f'(x)\right| \le \frac{\ln(a+1)}{k}|f'(x)| = \ln(a+1)\,|f'(x)| = \phi^+(x) \in L(0,\infty)\,,$$

dove la sommabilità della funzione $\phi^+(x)$ è immediata conseguenza di quella della funzione $f'(x)$ che è data per ipotesi.
Il limite della successione cercata è

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} t_k &= \lim_{k\to\infty} \int_{-\infty}^{0} \frac{\ln\left(a+e^{-kx}\right)}{k} f'(x)dx + \lim_{k\to\infty} \int_{0}^{\infty} \frac{\ln\left(a+e^{-kx}\right)}{k} f'(x)dx\\ &= \int_{-\infty}^{0} \underbrace{\lim_{k\to\infty} \frac{\ln\left(a+e^{-kx}\right)}{k}}_{=-x} f'(x)dx + \int_{0}^{\infty} \underbrace{\lim_{k\to\infty} \frac{\ln\left(a+e^{-kx}\right)}{k}}_{=0} f'(x)dx\\ &= -\int_{-\infty}^{0} xf'(x)dx = \underbrace{-xf(x)\Big|_{-\infty}^{0}}_{=0} + \int_{-\infty}^{0} f(x)dx\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \theta(-x)f(x)dx\,. \end{aligned}$$

Ne consegue che la successione funzionale

$$\left\{ g_k(x) = \frac{1}{ae^{kx} + 1} \right\}_{k=1}^{\infty},$$

rappresenta la distribuzione $\theta(-x)$ rispetto alla classe di funzioni di prova $\mathscr{P}$.