Metodi Matematici per la Fisica

Prova scritta - 2 febbraio 2016

Si risolvano cortesemente i seguenti problemi.

Primo problema (punteggio: 6/30)

Si calcoli l'integrale

$$Q = \int_1^\infty \frac{\cosh(\ln(x-1)/2)}{x^3+1}\, dx\,.$$

Soluzione del primo problema

Il coseno iperbolico a numeratore dell'integranda può essere riscritto come

$$\cosh(\ln(x-1)/2) = \frac{e^{\ln(x-1)/2} + e^{-\ln(x-1)/2}}{2} = \frac{\sqrt{x-1} + 1/\sqrt{x-1}}{2} = \frac{x}{2\sqrt{x-1}}\,,$$

quindi l'integrale diventa

$$Q = \frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{x}{\sqrt{x-1}\,(x^3+1)}\, dx\,.$$

L'integranda è una funzione polidroma, con punti di diramazione, di ordine uno, in $z=1$ e $z=\infty$. Per il polinomio sotto radice, scritto nella variabile z, si definisce la rappresentazione

$$z-1 = |z-1|e^{i\theta}\,, \qquad \theta \in (0, 2\pi)\,,$$

cui corrisponde un taglio lungo la semiretta reale $(1,\infty)$.
Consideriamo il percorso d'integrazione chiuso $\Gamma_{R,\epsilon}$, composto dai due archi centrati in $z=1$:

$$\begin{aligned} A_R &= \{z : z = 1 + Re^{i\alpha},\ \alpha \in (\epsilon/R, 2\pi - \epsilon/R)\} \\ a_\epsilon &= \{z : z = 1 + \epsilon e^{i\beta}, \beta \in (\pi/2, 3\pi/2)\}\,, \end{aligned}$$

uniti ai due tratti rettilinei paralleli all'asse reale: $L_{R\pm} = \{z : z = x \pm i\epsilon,\ x \in (1,R)\}$. Assumendo che gli archi siano orientati in verso antiorario e i tratti rettilinei dal finito all'infinito si ha

$$\Gamma_{\epsilon,R} = L_{R+} \cup A_R \cup (-L_{R-}) \cup (-a_\epsilon)\,.$$

L'integranda ha tre poli semplici coincidenti con i tre zeri del polinomio (z^3+1), ovvero

$$z_k = e^{(1+2k)i\pi/3}\,, \qquad k = 0,1,2\,.$$

L'integrale sul percorso chiuso, con $\epsilon < 1 < R$, è dato dalla somma dei tre residui, lo stesso valore si ottiene anche nei limiti $R \to \infty$ e $\epsilon \to 0$, cioè

$$\lim_{1/R,\epsilon\to 0} \oint_{\Gamma_{\epsilon,R}} \frac{z}{\sqrt{z-1}\,(z^3+1)} dz = 2i\pi \sum_{k=0}^{2} \text{Res}\left[\frac{z}{\sqrt{z-1}\,(z^3+1)}, z_k\right]\,.$$

Nei limiti considerati, i contributi dati dagli archi sono nulli. Sull'arco infinitesimo a_ϵ e su quello infinito A_R si hanno rispettivamente i limiti

$$\lim_{\epsilon\to 0}(z-1)f(z) \overset{\text{unif.}}{=} 0\,, \qquad \lim_{R\to\infty}(z-1)f(z) \overset{\text{unif.}}{=} 0\,.$$

Il contributo del tratto rettilineo L_{R+} è

$$\lim_{1/R,\epsilon\to 0}\oint_{L_{R+}} f(z)dz = 2Q\,.$$

(Il fattore 2 deriva dal fattore 1/2 che compare di fronte alla primo integrale della sezione.)
Il contributo del tratto rettilineo L_{R-}, sotto l'asse reale e percorso dall'infinito al finito, è

$$\lim_{1/R,\epsilon\to 0}\oint_{-L_{R-}} f(z)dz = \int_{\infty}^{1}\frac{x}{e^{i\theta/2}\sqrt{x-1}\,(x^3+1)}dx\,,$$

ma $\theta = 2\pi$, quindi

$$\lim_{1/R,\epsilon\to 0}\oint_{-L_{R-}} f(z)dz = -\int_{\infty}^{1}\frac{x}{\sqrt{x-1}\,(x^3+1)}dx = \int_{1}^{\infty}\frac{x}{\sqrt{x-1}\,(x^3+1)}dx = 2Q\,.$$

In definitiva

$$\lim_{1/R,\epsilon\to 0}\oint_{\Gamma_{\epsilon,R}}\frac{z}{\sqrt{z-1}\,(z^3+1)}dz = 2i\pi\sum_{k=0}^{2}\mathrm{Res}\left[\frac{z}{\sqrt{z-1}\,(z^3+1)}, z_k\right] = 4Q\,,$$

da cui, considerando l'ultima identità,

$$Q = \frac{i\pi}{2}\sum_{k=0}^{2}\mathrm{Res}\left[\frac{z}{\sqrt{z-1}\,(z^3+1)}, z_k\right]\,.$$

I residui dei poli semplici, calcolando il limite della forma zero su zero con la regola di de l'Hôpital, sono

$$R_k = \mathrm{Res}\left[\frac{z}{\sqrt{z-1}(z^3+1)}, z_k\right] = \frac{1}{3z_k\sqrt{z_k-1}}\,,\qquad k = 0,1,2\,.$$

È importante, al fine di ottenere i valori corretti, usare coerentemente la rappresentazione del polinomio sotto radice, in base alla quele si è definito il taglio.
In particolare, per $z_0 = e^{i\pi/3}$, avremo

$$z_0 - 1 = |z_0-1|e^{i\theta_0} = e^{i\pi/3} - 1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{2i\pi/3}\,,$$

ovvero $|z_0 - 1| = 1$ e $\theta_0 = 2\pi/3$. Il residuo è

$$R_0 = \frac{e^{-i\pi/3}}{3\sqrt{e^{i\pi/3}-1}} = \frac{e^{-i\pi/3}}{3e^{i\pi/3}} = \frac{1}{3}e^{-2i\pi/3} = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\,.$$

Per il secondo polo, $z_1 = e^{i\pi}$, abbiamo

$$z_1 - 1 = |z_1-1|e^{i\theta_1} = e^{i\pi} - 1 = -2 = 2e^{i\pi}\,,$$

ovvero $|z_1 - 1| = 2$ e $\theta_1 = \pi$, la fase $\theta_1 = -\pi$ darebbe lo stesso valore, ma non è corretta in quanto si è scelta la determinazione $(0, 2\pi)$. Il residuo è

$$R_1 = \frac{e^{-i\pi}}{3\sqrt{e^{\pi}-1}} = \frac{e^{-i\pi}}{3\sqrt{2}\,e^{i\pi/2}} = \frac{1}{3\sqrt{2}}e^{-3i\pi/2} = \frac{i}{3\sqrt{2}}\,.$$

Infine, per $z_2 = e^{5i\pi/3}$ si ha

$$z_2 - 1 = |z_2 - 1| e^{i\theta_2} = e^{5i\pi/3} - 1 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{4i\pi/3},$$

ovvero $|z_2 - 1| = 1$ e $\theta_2 = 4\pi/3$, anche in questo caso, la fase $\theta_2 = -2\pi/3$ non è corretta in quanto si è scelta la determinazione $(0, 2\pi)$. Il residuo è

$$R_2 = \frac{e^{-5i\pi/3}}{3\sqrt{e^{5i\pi/3} - 1}} = \frac{e^{-5i\pi/3}}{3e^{2i\pi/3}} = \frac{1}{3}e^{-7i\pi/3} = \frac{1}{3}e^{-i\pi/3} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Si hanno, banalmente, le identità: $z_2 = z_1^*$ e $R_2 = R_1^*$.
L'integrale si ottiene sommando i residui e si ha

$$Q = \frac{i\pi}{2}\sum_{k=0}^{2} R_k = \frac{\pi}{6}\left(\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{6\sqrt{2}}\left(\sqrt{6} - 1\right).$$

Secondo problema (punteggio 6/30)

Una funzione $f(z)$, analitica in $D = \{z : z \notin (1, \infty)\}$, verifica il principio di riflessione di Schwarz: $f(z^*) = f^*(z)$ ed è polidroma, con punti di diramazione in $z = 1$ e $z = \infty$. Si ottenga l'espressione di tale funzione, sapendo che la sua parte immaginaria sopra il taglio ($\epsilon \to 0^+$) è

$$\mathrm{Im}(f(x + i\epsilon)) = \theta(x - 1)\sqrt{\sqrt{x} - 1}, \qquad x \in (1, \infty),$$

e che si annulla nell'origine: $f(0) = 0$. La $\theta(x)$ è la funzione di Heaviside, che vale 1 per $x > 0$ ed è nulla per $x < 0$.

Soluzione del secondo problema

Ci sono le condizioni per utilizzare la relazione di dispersione per la parte immaginaria con una sottrazione nell'origine

$$f(z) = f(0) + \frac{z}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{Im}(f(x))}{x(x - z)} dx,$$

definita per ogni z appartenente al dominio di analiticità della funzione e dove si è assunto che la parte immaginaria sia valutata sul bordo superiore del taglio reale.
Sostituendo l'espressione data, facendo uso della condizione $f(0) = 0$ e del fatto che la parte immaginari è nulla per $x < 1$,

$$f(z) = \frac{z}{\pi}\int_{1}^{\infty} \frac{\sqrt{\sqrt{x} - 1}}{x(x - z)} dx.$$

Con la sostituzione $w = \sqrt{\sqrt{x} - 1}$, $x = (w^2 + 1)^2$ e $dx = 4w(w^2 + 1)dw$, l'integrale diventa

$$f(z) = \frac{z}{\pi}4\int_{0}^{\infty} \frac{w^2 dw}{(w^2 + 1)\left((w^2 + 1)^2 - z\right)} = \frac{z}{\pi}2\int_{-\infty}^{\infty} \frac{w^2 dw}{(w^2 + 1)\left((w^2 + 1)^2 - z\right)},$$

l'ultima identità segue dall'invarianza dell'integranda rispetto alla trasformazione $w \to -w$. In questa forma l'integranda è una funzione meromorfa con sei poli semplici, dati dagli zeri del polinomio di sesto grado a denominatore, che sono

$$w_{1,2} = \pm i, \qquad w_{3,4} = \sqrt{-1 \pm \sqrt{z}}, \qquad w_{5,6} = -\sqrt{-1 \pm \sqrt{z}}.$$

La posizione degli ultimi quattro dipende dal valore della z, ma, al fine di calcolare esplicitamente l'integrale, possiamo imporre la condizione $z \in (0,1)$, in questo caso $w_{3,4}$ sono immaginari puri con parte immaginaria positiva, mentre i poli $w_{5,6}$ sono i loro complessi coniugati, ovvero immaginari puri con parte immaginaria negativa. È facile vedere che, al divergere di w, l'integranda moltiplica per w si annulla uniformemente. Possiamo applicare il lemma di Jordan "chiudendo" il percorso con una semicirconferenza infinita, sia nel semipiano superiore $\mathrm{Im}(w) > 0$, che in quello inferiore $\mathrm{Im}(w) < 0$. Nel primo dei due casi avremo, usando il teorema dei residui,

$$f(z) = 4i\,z \sum_{k=1,3,4} \mathrm{Res}\left[\frac{w^2}{(w^2+1)\big((w^2+1)^2 - z\big)}, w_k\right].$$

I tre residui considerati sono

$$\mathrm{Res}\left[\frac{w^2}{(w^2+1)\big((w^2+1)^2 - z\big)}, w_1\right] = \frac{i^2}{2i\big(-z\big)} = -\frac{i}{2z}\,;$$
$$\mathrm{Res}\left[\frac{w^2}{(w^2+1)\big((w^2+1)^2 - z\big)}, w_{3,4}\right] = \frac{w_{3,4}}{4\big(w_{3,4}^2+1\big)^2} = \frac{i}{4z}\sqrt{1 \mp \sqrt{z}}\,,$$

e quindi la funzione completa è

$$f(z) = 2 - \sqrt{1+\sqrt{z}} - \sqrt{1-\sqrt{z}}\,.$$

Questa espressione vale per ogni $z \in D$, ovvero la condizione $z \in (0,1)$, usata per calcolare l'integrale, non è più necessaria.

Terzo problema (punteggio 6/30)

Sfruttando lo sviluppo in serie di Laurent, si calcoli, in forma di serie numerica, il valore dell'integrale

$$R = \oint_{|z|=1} e^{1/z^2}\,\mathrm{senh}(z)\,dz\,.$$

Si dimostri come sia sufficiente considerare soli i primi due termini della serie ottenuta per avere una approssimazione di R migliore dell'1%.
(Il valore approssimato del numero di Eulero è: $e \simeq 2.718$.)

Soluzione del terzo problema

La funzione integranda ha soltanto una singolarità essenziale nell'origine, dovuta all'esponenziale, quindi l'integrale cercato corrisponde a $2i\pi$ volte il residuo di tale singolarità, ovvero

$$R = \oint_{|z|=1} e^{1/z^2}\,\mathrm{senh}(z)\,dz = 2i\pi\,\mathrm{Res}\left[e^{1/z^2}\,\mathrm{senh}(z), z=0\right].$$

Il residuo coincide con il coefficiente della potenza z^{-1}, C_{-1}, dello sviluppo di Laurent della funzione, centrato nell'origine. Tale sviluppo può essere ottenuto a partire dagli sviluppi di Taylor noti della funzione esponenziale e del seno iperbolico

$$e^{1/z^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{-2k}}{k!}\,, \qquad \mathrm{senh}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^{2j+1}}{(2j+1)!}\,.$$

In definitiva si ha

$$e^{1/z^2}\,\mathrm{senh}(z) = \sum_{k,j=0}^{\infty} \frac{z^{-2k+2j+1}}{k!(2j+1)!}\,,$$

il coefficiente C_{-1} e quindi l'integrale R sono

$$C_{-1} = \sum_{k,j=0}^{\infty} \frac{\delta_{k,j+1}}{k!(2j+1)!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(j+1)!(2j+1)!},$$
$$R = 2i\pi\, C_{-1} = 2i\pi \sum_{k,j=0}^{\infty} \frac{\delta_{k,j+1}}{k!(2j+1)!} = 2i\pi \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(j+1)!(2j+1)!}.$$

Per ottenere l'approssimazione cercata consideriamo i primi tre termini della serie

$$C_{-1} = 1 + \frac{1}{2!3!} + \frac{1}{3!5!} + \sum_{j=3}^{\infty} \frac{1}{(j+1)!(2j+1)!} = 1 + \frac{1}{12} + \frac{1}{720} + \sum_{j=3}^{\infty} \frac{1}{(j+1)!(2j+1)!}.$$

Il terzo termine è dell'ordine dello 0.1% della somma dei primi due, per cui è lecito considerare solo i primi due come stima del risultato, ovvero

$$C_{-1} = \frac{13}{12} + \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{(j+1)!(2j+1)!} \equiv \frac{13}{12} + \delta C_{-1}.$$

Verifichiamo se il contributo della serie rimasta, δC_{-1}, supera o meno l'1% dei 13/12 che si ottengono dai primi due termini. A tale fine minoriamo il seguente rapporto

$$\frac{\delta C_{-1}}{13/12} = \frac{12}{13} \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{(j+1)!(2j+1)!} < \frac{12}{13}\frac{1}{5!} \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{(j+1)!} = \frac{1}{130} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} - \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} \right) = \frac{e-2.5}{130} \simeq \frac{0.218}{130} \ll 0.01.$$

La prima disuguaglianza si ha in quanto, per $j = 2, 3, \ldots$,

$$\frac{1}{(2j+1)!} \le \frac{1}{5!},$$

ovviamente l'uguaglianza vale solo per $j = 2$. Ne consegue che, data una generica successione di reali postivi $\{r_j\}_{j=2}^{\infty}$, avremo

$$\sum_{j=2}^{\infty} \frac{r_j}{(2j+1)!} < \frac{1}{5!} \sum_{j=2}^{\infty} r_j.$$

La serie di C_{-1} rientra in questo caso, con $\left\{r_j = 1/(j+1)!\right\}_{j=2}^{\infty}$.

Quarto problema (punteggio 6/30)

Nello spazio di Hilbert E_N, a dimensione finita N, sia $\hat{P}$ l'operatore di permutazione rispetto alla base ortonormale $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^{N} \subset E_N$. Ovvero, l'azione di $\hat{P}$ sui vettori della base è

$$\hat{P}|e_k\rangle = |e_{P(k)}\rangle, \qquad \forall\, k \in \{1, 2, \ldots, N\}.$$

Ne consegue che l'azione su un generico vettore $|v\rangle \in E_N$, con $|v\rangle = v^k|e_k\rangle$, $v^k = \langle e_k|v\rangle$, $k = 1, 2, \ldots, N$, è

$$\hat{P}|v\rangle = v^k|e_{P(k)}\rangle.$$

(Si usa la convenzione di Einstein per cui è sottintesa la somma sugli indici ripetuti in posizione covariante e controvariante). Il vettore ottenuto ha come componente $P(k)$-esima la componente k-esima, v^k, dal vettore iniziale. La permutazione considerate è descritta dalla regola di assegnazione

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & \ldots & k & \ldots & N \\ P(1) & P(2) & \ldots & P(k) & \ldots & P(N) \end{bmatrix}.$$

Ovviamente $P(k) = P(m)$ se e solo se $k = m$.

- Si verifichi che l'operatore $\hat{P}$ ha autovalore $\lambda = 1$ e se ne determini l'autovettore.
  Suggerimento: è sufficiente verificare che esista l'autovettore diverso dal vettore nullo.
- Si dimostri che l'operatore $\hat{P}$ è unitario.

Soluzione del quarto problema

Indichiamo con $|u\rangle = u^k|e_k\rangle \in E_N$ l'autovettore con autovalore $\lambda = 1$, si ha quindi l'equazione agli autovalori

$$\hat{P}|u\rangle = |u\rangle\,.$$

Considerando esplicitamente l'azione dell'operatore e la decomposizione rispetto alla base $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^{N}$,

$$u^k|e_{P(k)}\rangle = u^j|e_j\rangle = u^{P(j)}|e_{P(j)}\rangle \qquad \Rightarrow \qquad u^k = u^{P(k)}\,, \qquad \forall\, k \in \{1, 2, \dots, N\}$$

e per ogni permutazione $\{P(1), P(2), \dots, P(N)\}$ di $\{1, 2, \dots, N\}$, poichè dobbiamo dimostrare che l'autovalore $\lambda = 1$ appartiene allo spettro di tutti gli operatore di permutazione $\hat{P}$. In altri termini si deve avere l'identità

$$(u^{P(1)}, u^{P(2)}, \dots, u^{P(N)}) = (u^1, u^2, \dots, u^N)\,,$$

che, per l'arbitrarietà della permutazione, implica

$$u^1 = u^2 = \ldots = u^N\,.$$

Esiste, quindi, un autovettore diverso dal vettore nullo ed è quello che, rispetto alla base $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^{N}$, ha tutte le componenti uguali e non nulle, normalizzando all'unità, a meno di una fase arbitraria, si ha

$$|u\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{k=1}^{N}|e_k\rangle\,.$$

Per dimostrare che $\hat{P}$ è unitario verifichiamo che

$$\hat{P}\hat{P}^\dagger = \hat{P}^\dagger\hat{P} = \hat{I}\,.$$

L'elemento (m, k) della matrice che rappresenta l'operatore prodotto $\hat{P}^\dagger\hat{P}$, rispetto alle base $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^{N}$, si ottiene come

$$\langle e_m|\hat{P}^\dagger\hat{P}|e_k\rangle = \left(\langle e_m|\hat{P}^\dagger\right)\left(\hat{P}|e_k\rangle\right) = \langle e_{P(m)}|e_{P(k)}\rangle = \delta_{mk}\,.$$

Poiché, quindi, la matrice che rappresenta $\hat{P}^\dagger\hat{P}$ è l'identità, si ha necessariamente che

$$\hat{P}^\dagger\hat{P} = \hat{I}\,.$$

Per ciò che riguarda l'operatore prodotto $\hat{P}\hat{P}^\dagger$, calcoliamo, come nel caso precedente, l'elemento di matrice (m, k), sfruttiamo però anche la condizione di completezza

$$\hat{I} = \sum_{k=1}^{N}|e_k\rangle\langle e_k| = \sum_{k=1}^{N}|e_{P(k)}\rangle\langle e_{P(k)}|\,.$$

L'elemento di matrice è

$$\langle e_m|\hat{P}\hat{P}^\dagger|e_k\rangle = \langle e_m|\hat{P}\hat{I}\hat{P}^\dagger|e_k\rangle = \sum_{k=1}^{N}\langle e_m|\underbrace{\hat{P}|e_k\rangle}_{|e_{P(k(}\rangle}\underbrace{\langle e_k|\hat{P}^\dagger}_{\langle e_{P(k)}|}|e_k\rangle = \sum_{k=1}^{N}\langle e_m|e_{P(k)}\rangle\langle e_{P(k)}|e_k\rangle = \langle e_m|\underbrace{\left(\sum_{k=1}^{N}|e_{P(k)}\rangle\langle e_{P(k)}|\right)}_{\hat{I}}|e_k\rangle = \delta_{mk}\,,$$

quindi

$$\hat{P}\hat{P}^\dagger = \hat{I}\,,$$

$\hat{P}$ è un operatore unitario.

Quinto problema (punteggio 6/30)

Dopo aver classificato la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

che rappresenta un operatore $\hat{P}$ rispetto alla base canonica, si calcolino: gli autovalori e gli autovettori di P e la matrice che rappresenta l'operatore $\hat{P}^{-4}$, rispetto alla stessa base canonica.

Soluzione del quinto problema

La matrice rappresenta, rispetto alla base canonica, un operatore di permutazione, in particolare la permutazione è

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{bmatrix},$$

è quindi unitaria, come può essere verificato direttamente calcolando $PP^\dagger$ e $P^\dagger P$ e osservando che $PP^\dagger = P^\dagger P = I$. Gli autovalori sono le soluzioni dell'equazione secolare

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$\lambda^4 - 1 = 0$$

$$\lambda_k = e^{ik\pi/2}, \qquad k = 0, 1, 2, 3,$$

ovvero

$$\lambda_0 = 1, \qquad \lambda_1 = i, \qquad \lambda_2 = -1, \qquad \lambda_3 = -i.$$

Gli autovettori sono

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \\ w_k \end{pmatrix} = \lambda_k \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \\ w_k \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} y_k = \lambda_k x_k \\ w_k = \lambda_k y_k \\ x_k = \lambda_k z_k \\ z_k = \lambda_k w_k \end{cases}, \qquad k = 0, 1, 2, 3.$$

Posto $x_k = 1$ si hanno

$$y_k = \lambda_k, \qquad w_k = \lambda_k^2, \qquad z_k = \lambda_k^3$$

e il k-esimo autovettore, normalizzato all'unità, ha la forma

$$u_k = \frac{1}{\sqrt{1 + |\lambda_k|^2 + |\lambda_k|^6 + |\lambda_k|^4}} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_k \\ \lambda_k^3 \\ \lambda_k^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ \lambda_k/2 \\ \lambda_k^3/2 \\ \lambda_k^2/2 \end{pmatrix}, \qquad k = 0, 1, 2, 3,$$

l'ultima identità è conseguenza del fatto che tutti gli autovalori hanno modulo uguale ad uno, essendo P una matrice unitaria.

In definitiva

$$u_0 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \quad u_1 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ i/2 \\ -i/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -i/2 \\ i/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}.$$

Rispetto alle base degli autovettori $\{u_k\}_{k=0}^3$ la matrice che rappresenta l'operatore "astratto" $\hat{P}$ è diagonale

$$P_d = U^\dagger P U = \operatorname{diag}(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix},$$

dove la matrice unitaria U si ottiene giustapponendo i vettori colonna u_k, $k = 0, 1, 2, 3$, ovvero

$$U = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & i/2 & -1/2 & -i/2 \\ 1/2 & -i/2 & -1/2 & i/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Sfruttando il teorema spettrale, la matrice che rappresenta $\hat{P}^{-4}$ rispetto alla base $\{u_k\}_{k=0}^3$ è

$$P^{-4} = U P_d^{-4} U^\dagger = U \operatorname{diag}(\lambda_0^{-4}, \lambda_1^{-4}, \lambda_2^{-4}, \lambda_3^{-4}) U^\dagger = U \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} U^\dagger = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

Sesto problema (punteggio 5/30)

Usando il teorema della convoluzione, si dimostri l'identità

$$\int_{-\infty}^{\infty} (f * g)(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x')\, dx' \int_{-\infty}^{\infty} g(x'')\, dx'',$$

$\forall f(x), g(x) \in L^2(\mathbb{R})$.
Alla luce di questo risultato e sfruttando il valore di due integrali noti, si calcoli

$$C = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{e^{-y^2}}{(x-y)^2 + 1}.$$

Soluzione del sesto Problema

Il teorema della convoluzione afferma che: $\forall f(x), g(x) \in L^2(\mathbb{R})$,

$$\mathscr{F}_k[f * g] = \sqrt{2\pi}\, \mathscr{F}_k[f]\, \mathscr{F}_k[g],$$

ovvero: la trasformata di Fourier della convoluzione di due funzioni è pari a $\sqrt{2\pi}$ volte il prodotto delle trasformate di Fourier delle funzioni stesse. Scrivendo esplicitamente gli integrali delle trasformate di Fourier e della convoluzione, l'identità precedente diventa

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (f * g)(x) e^{-ikx} dx = \sqrt{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x') e^{-ikx'} dx' \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x'') e^{-ikx''} dx''$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} (f * g)(x) e^{-ikx} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x') e^{-ikx'} dx' \int_{-\infty}^{\infty} g(x'') e^{-ikx''} dx'',$$

e vale, ovviamente, $\forall\, k \in \mathbb{R}$. In particolare, valutandola nell'origine, cioè per $k = 0$, si ottiene l'identità ceracta

$$\int_{-\infty}^{\infty} (f * g)(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x')\, dx' \int_{-\infty}^{\infty} g(x'')\, dx''\,.$$

Per ciò che riguarda il calcolo di

$$C = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy\, \frac{e^{-y^2}}{(x-y)^2+1}\,,$$

si sfrutta il fatto che l'integrale in dy può essere interpretato come una convoluzione, ovvero

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-y^2}}{(x-y)^2+1}\, dy = (f * g)(x)\,,$$

dove le funzioni, una Gaussiana e una Lorentziana, sono

$$f(x) = e^{-x^2}\,, \qquad g(x) = \frac{1}{x^2+1}\,.$$

Gli integrali su $\mathbb{R}$ sono ben noti

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}\,, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \pi\,,$$

quindi il risultato finale per C è

$$C = \pi^{3/2}\,.$$