Metodi Matematici per la Fisica

Prova scritta - 2 dicembre 2013

Si svolgano cortesemente i seguenti esercizi.

Esercizio 1 (6 punti)
Si calcoli l'integrale

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{\cosh^3(x)} dx \,.$$

. . . .

Soluzione
Possiamo riscrivere l'integrale come somma di tre contributi due dei quali coincidenti, ovvero

$$I = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2ix} + e^{-2ix} - 2}{4\cosh^3(x)} dx = I_1 + I_2 + I_3 = 2I_1 + I_3 \,,$$

l'identità $I_1 = I_2$ si ottiene facendo in I_2 la sostituzione $x' = -x$. Scegliamo il percorso chiuso rettangolare orientato in verso antiorario

$$\Gamma_R = [-R, R] \cup L_+ \cup L_R \cup L_- \,.$$

dove $L_\pm = \{z : z = \pm R + iy, y \in [0, \pi]\}$ e $L_R = \{z : z = x + i\pi, x \in [-R, R]\}$. Per I_1 si ha

$$\int_{\Gamma_R} \frac{e^{2iz}}{\cosh^3(z)} dz = \int_{-R}^{R} \frac{e^{2ix}}{\cosh^3(x)} dx + \int_{L_+} \frac{e^{2iz}}{\cosh^3(z)} dz + \int_{L_-} \frac{e^{2iz}}{\cosh^3(z)} dz - e^{-2\pi} \int_{R}^{-R} \frac{e^{2ix}}{\cosh^3(x)} dx \,,$$

quindi

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R} \frac{e^{2iz}}{\cosh^3(z)} dz = -4(1 + e^{-2\pi}) I_1 \,.$$

Per l'integrale I_3, invece

$$\int_{\Gamma_R} \frac{dz}{\cosh^3(z)} = \int_{-R}^{R} \frac{dx}{\cosh^3(x)} + \int_{L_+} \frac{dx}{\cosh^3(z)} + \int_{L_-} \frac{dx}{\cosh^3(z)} - \int_{R}^{-R} \frac{dx}{\cosh^3(x)} \,,$$

da cui

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R} \frac{dz}{\cosh^3(z)} = 4I_3 \,.$$

D'altro canto, l'integrale sul percorso chiuso Γ_R può essere calcolato con il teorema dei residui e si ha

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R} \frac{e^{2iz}}{\cosh^3(z)} dz = 2i\pi \operatorname{Res}[e^{2iz}/\cosh^3(z), i\pi/2] \,.$$

Per calcolare il residuo facciamo la sostituzione $w = z - i\pi/2$ e, indicando con $\gamma_{i\pi/2}$ una circonferenza centrata in $i\pi/2$ di raggio infinitesimo, si ha

$$\begin{aligned}
2i\pi \mathrm{Res}[e^{2iz}/\cosh^3(z), i\pi/2] &= \oint_{\gamma_{i\pi/2}} \frac{e^{2iz}}{\cosh^3(z)} dz \\
&= e^{-\pi} \oint_{\gamma_{i\pi/2}-i\pi/2} \frac{e^{2iw}}{-i\,\mathrm{senh}^3(w)} dw \\
&= ie^{-\pi} \oint_{\gamma_{i\pi/2}-i\pi/2} \frac{e^{2iw}}{\mathrm{senh}^3(w)} dw \\
&= -2\pi\, e^{-\pi}\, \mathrm{Res}[e^{2iw}/\,\mathrm{senh}^3(w), 0]\,.
\end{aligned}$$

Possiamo usare gli sviluppi in serie del seno iperbolico e dell'esponenziale per calcolare il residuo, ovvero

$$\frac{1}{\mathrm{senh}^3(z)} = \frac{1}{\left(z + \frac{z^3}{6} + \ldots\right)^3} = \frac{1}{z^3\left(1 + \frac{z^2}{6} + \ldots\right)^3} = \frac{1}{z^3}\left[1 - 3\left(\frac{z^2}{6} + \ldots\right) + \ldots\right] = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{2z} + \ldots\,,$$

quindi, con l'esponenziale si ha

$$\frac{e^{2iz}}{\mathrm{senh}^3(z)} = \left(\frac{1}{z^3} - \frac{1}{2z} + \ldots\right)\left(1 + 2iz - 2z^2 + \ldots\right) = \frac{1}{z^3} + \frac{2i}{z^2} - \frac{1}{z}\left(2 + \frac{1}{2}\right) + \ldots = \frac{1}{z^3} + \frac{2i}{z^2} - \frac{5}{2z} + \ldots\,.$$

Il residuo coincide con il coefficiente della potenza z^{-1}, allora

$$-8(1 + e^{-2\pi})I_1 = 2i\pi \mathrm{Res}[e^{2iz}/\cosh^3(z), i\pi/2] = -2\pi\, e^{-\pi}\, \mathrm{Res}[e^{2iz}/\,\mathrm{senh}^3(z), 0] = 5\pi e^{-\pi}\,,$$

da cui

$$I_1 = -\frac{5\pi e^{-\pi}}{8(1 + e^{-2\pi})}\,.$$

Allo stesso modo, sfruttando lo sviluppo in serie del seno iperbolico per calcolare il residuo, si ottiene I_3 come

$$I_3 = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{4} \int_\Gamma \frac{1}{\cosh^3(z)} dz = \frac{1}{4}\, 2i\pi \mathrm{Res}[1/\cosh^3(z), i\pi/2] = -\frac{\pi}{2} \mathrm{Res}[1/\,\mathrm{senh}^3(w), 0] = \frac{\pi}{4}\,.$$

Ne consegue che l'integrale è

$$I = 2I_1 + I_3 = -\frac{5\pi e^{-\pi}}{2(1 + e^{-2\pi})} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}\left(1 - 5\frac{2}{e^{\pi} + e^{-\pi}}\right) = \frac{\pi}{4}\left[1 - \frac{5}{\cosh(\pi)}\right]\,.$$

. . . .

Esercizio 2 (6 punti)
Sfruttando i teoremi sui residui si dimostri la seguente identità

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\mathrm{sen}\,(k\,t)}{k^3} = \frac{t\,(t^2 - \pi^2)}{12}\,,$$

con $t \in (-\pi, \pi)$.

. . . .

Soluzione
Si consideri la funzione meromorfa

$$f(z) = \frac{\operatorname{sen}(z\,t)}{z^3 \operatorname{sen}(z\,\pi)}\,,$$

che ha l'insieme di poli semplici $\{z_k = k\}_{k\neq 1}$ ed un polo di ordine tre nell'origine. Detta C_R la circonferenza centrata nell'origine e di raggio $R > 0$ si ha, per il teorema dei residui,

$$\frac{1}{2i\pi}\oint_{C_R} f(z)dz = \sum_{k\neq 0,\, k<R} \operatorname{Res}[f(z), z_k] + \operatorname{Res}[f(z), 0]\,.$$

I residui nei poli semplici sono

$$\operatorname{Res}[f(z), z_k] = \lim_{z\to z_k} f(z)(z - z_k) = (-1)^k \frac{\operatorname{sen}(k\,t)}{\pi\,k^3}\,.$$

Il residuo nell'origine può essere ottenuto come il coefficiente C_{-1} della serie di Laurent. Sfruttando lo sviluppo nell'origine della funzione seno, si ha

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{\operatorname{sen}(z\,t)}{z^3 \operatorname{sen}(z\,\pi)} \\
&= \frac{1}{z^3}\left(z\,t - \frac{(z\,t)^3}{3!} + \ldots\right)\left(z\,\pi - \frac{(z\,\pi)^3}{3!} + \ldots\right)^{-1} \\
&= \frac{1}{z^3}\left(z\,t - \frac{(z\,t)^3}{3!} + \ldots\right)\frac{1}{z\,\pi}\left(1 - \frac{(z\,\pi)^2}{3!} + \ldots\right)^{-1} \\
&= \frac{1}{\pi\,z^4}\left(z\,t - \frac{(z\,t)^3}{3!} + \ldots\right)\left[1 + \left(\frac{(z\,\pi)^2}{3!} + \ldots\right) + \left(\frac{(z\,\pi)^2}{3!} + \ldots\right)^2 + \ldots\right] \\
&= \frac{t}{\pi}\frac{1}{z^3} + \left(\frac{\pi^2\,t - t^3}{6\,\pi}\right)\frac{1}{z} + \mathcal{O}(z)\,,
\end{aligned}$$

quindi

$$\operatorname{Res}[f(z), 0] = \frac{t(\pi^2 - t^2)}{6\,\pi}\,.$$

Per il teorema della somma totale dei residui si ha anche che

$$\begin{aligned}
0 = \lim_{R\to\infty}\frac{1}{2i\pi}\oint_{C_R} f(z)dz &= \sum_{k\neq 0}\operatorname{Res}[f(z), z_k] + \operatorname{Res}[f(z), 0] \\
&= \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{\operatorname{sen}(k\,t)}{k^3} + \frac{t(\pi^2 - t^2)}{6\,\pi}\,,
\end{aligned}$$

da cui

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{\operatorname{sen}(k\,t)}{k^3} = \frac{t(t^2 - \pi^2)}{12}\,.$$

Esercizio 3 (6 punti)
Verificare

$$\oint_{C_n} \frac{\text{sen}\,(z)\cos(z)}{1-3\,\text{sen}^{\,2}(z)}dz = -\frac{4n\,i\pi}{3}\,, \qquad n \in \mathbb{N}\,,$$

con $C_n = \{z : |z| = n\pi\}$ percorso in senso antiorario.

. . . .

Soluzione
È facile vedere che l'integranda è proporzionale alla derivata logaritmica della funzione

$$f(z) = 1 - 3\,\text{sen}^{\,2}(z)\,,$$

infatti si ha

$$\frac{d}{dz}\ln[f(z)] = \frac{-6\,\text{sen}\,(z)\cos(z)}{1-3\,\text{sen}^{\,2}(z)}\,.$$

Quindi

$$\oint_{C_n} \frac{\text{sen}\,(z)\cos(z)}{1-3\,\text{sen}^{\,2}(z)}dz = -\frac{1}{6}\oint_{C_n}\frac{d}{dz}\ln[f(z)]dz = -\frac{1}{6}2i\pi(M-N)\,,$$

dove M e N sono il numero di zeri e poli che $f(z)$ ha all'interno di C_n. La funzione è però analitica e quindi $N = 0$. Gli zeri x_k, sono reali e si ottengono dalla relazione

$$\sin(x_k) = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\,.$$

Ce ne sono quattro per ogni insieme $(-(k+1)\pi, -k\pi) \cup (k\pi, (k+1)\pi)$, con $k = 0, 1, 2, \ldots$. Ne consegue che ogni C_n contiene $4n$ zeri. Quindi

$$\oint_{C_n} \frac{\text{sen}\,(z)\cos(z)}{1-3\,\text{sen}^{\,2}(z)}dz = -\frac{1}{6}2i\pi\,4n = -\frac{4ni\pi}{3}\,.$$

. . . .

Esercizio 4 (5 punti)
Data l'equazione differenziale

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 2\frac{du}{dt} + u = \frac{d^2 f}{dt^2}\,,$$

con $f(t)$, df/dt e $d^2f/dt^2 \in L^2(\mathbb{R})$. Si verifichi che la soluzione $u(t) \in L^2(\mathbb{R})$ e che inoltre

$$||u|| \leq ||f||\,.$$

. . . .

Soluzione
Facendo la trasformata di Fourier si ha

$$\tilde{u}(k) = \frac{k^2 \tilde{f}(k)}{k^2 - 2ik - 1}\,.$$

Poiché $f(t) \in L^2(\mathbb{R}) \Rightarrow \tilde{f}(k) \in L^2(\mathbb{R})$ e si ha

$$\begin{aligned} ||u|| = ||\tilde{u}|| &= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{k^2 \tilde{f}(k)}{k^2 - 2ik - 1} \right|^2 dk \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k^4}{|k^2 - i|^2} \left| \tilde{f}(k) \right|^2 dk \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k^4}{k^4 + 1} \left| \tilde{f}(k) \right|^2 dk \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \left| \tilde{f}(k) \right|^2 dk = ||\tilde{f}|| = ||f||\,. \end{aligned}$$

. . . .

Esercizio 5 (5 punti)
Sia $\hat{S}$ l'operatore definito come

$$\hat{S}\, f = \begin{cases} x f(x) & 0 \leq x < 1 \\ f(x) & 1 \leq x \leq 2 \end{cases} ,$$

$\forall\, f(x) \in L^2([0,2])$. Si dimostri che il sistema $\{e_k(x)\}$ delle funzioni ottenute applicando k volte l'operatore sulla funzione $f = 1$, cioè

$$e_k(x) = \hat{S}^k\, 1 = \begin{cases} x^k & 0 \leq x < 1 \\ 1 & 1 \leq x \leq 2 \end{cases} ,$$

non è completo in $L^2([0,2])$. Si trovino gli autovalori e le autofunzioni corrispondenti.

Soluzione
Non è completo perché una generica funzione, non quasi-dappertutto nulla, del tipo

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ \sin(2\pi(x-1)) & 1 \leq x \leq 2 \end{cases} ,$$

è ortogonale a tutte le $e_k(x)$.
Le autofunzioni sono tutte le funzioni nulle in $[0,1)$ e con valore qualsiasi in $[1,2]$. L'autovalore è solo l'unità ed ha degenerazione infinita. Infatti

$$\hat{S} f = \lambda f = \begin{cases} x f(x) & 0 \leq x < 1 \\ f(x) & 1 \leq x \leq 2 \end{cases} ,$$

per cui una funzione che sia nulla in $[0,1)$ e arbitraria in $[1,2]$ verifica l'equazione agli autovalori soltanto con $\lambda = 1$.

Esercizio 6 (6 punti)
Sia $\hat{U}$ l'operatore che verifica le relazioni

$$\begin{cases} \hat{U}\,|k\rangle = |k+1\rangle \quad k \in \{1, 2, \ldots, n-2\} \\ \\ \hat{U}\,|n-1\rangle = |0\rangle \end{cases},$$

dove i vettori $|k\rangle$ sono gli elementi della base ortonormale $\{|k\rangle\}_{k=0}^{n-1}$ di una spazio vettoriale di dimensione finita n.
Si classifichi l'operatore e si trovino le matrici U e U_d che lo rappresentano rispetto alla base data, $\{|k\rangle\}_{k=0}^{n-1}$, e alla base dei suoi autovettori.

. . . .

Soluzione
La matrice $n \times n$ che rappresenta l'operatore $\hat{U}$, rispetto alla base ortonormale $\{|k\rangle\}_{k=0}^{n-1}$, ha elementi

$$U_{km} = \langle k-1|\hat{U}|m-1\rangle\,, \qquad k, m = 1, 2, \ldots, n\,,$$

in forma esplicita si ha

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

È facile verificare che l'operatore è unitario, cioè: $\hat{U}\hat{U}^\dagger = \hat{U}^\dagger\hat{U} = \hat{I}$, ne consegue che i suoi autovalori sono della fasi pure. In particolare, indicando con $|u\rangle = \sum_{k=1}^{n-1} u_k|k\rangle$ l'autovettore con autovalore μ, dall'equazione agli autovalori si ha

$$\hat{U}\,|u\rangle = \mu\,|u\rangle \quad \Rightarrow \quad u_{n-1}|0\rangle + \sum_{k=1}^{n-1} u_{k-1}|k\rangle = \mu \sum_{k=0}^{n-1} u_k|k\rangle \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} u_{n-1} = \mu\, u_0 \\ u_0 = \mu\, u_1 \\ u_1 = \mu\, u_2 \\ \ldots = \ldots \\ u_{n-2} = \mu\, u_{n-1} \end{cases},$$

sostituendo ricorsivamente si ottiene: $u_{n-1} = \mu^n\, u_{n-1}$, da cui l'equazione secolare: $\mu^n - 1 = 0$ e gli autovalori

$$\mu_k = e^{2ik\pi/n}\,, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1\,.$$

Ne consegue che la rappresentazione diagonale di $\hat{U}$ è

$$U_\mathrm{d} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & e^{2i\pi/n} & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & e^{2i\pi(n-1)/n} \end{pmatrix}.$$

Il k-esimo autovettore è

$$|m_k\rangle = \sum_{j=0}^{n-1} m_j^{(k)} |j\rangle \,,$$

dove i coefficienti $m_j^{(k)}$ si ottengono come soluzione del sistema

$$\left\{ \begin{array}{c} m_{n-1}^{(k)} = \mu_k \, m_0^{(k)} \\ m_0^{(k)} = \mu_k \, m_1^{(k)} \\ m_1^{(k)} = \mu_k \, m_2^{(k)} \\ \ldots = \ldots \\ m_{n-2}^{(k)} = \mu_k \, m_{n-1}^{(k)} \end{array} \right. \,,$$

posto $m_0^{(j)} = 1/\mathcal{N}$, con $\mathcal{N}$ costante di normalizzazione, si ha

$$\left\{ \begin{array}{c} m_0^{(k)} = 1/\mathcal{N} \\ m_1^{(k)} = \mu_k^{-1}/\mathcal{N} \\ m_2^{(k)} = \mu_k^{-2}/\mathcal{N} \\ \ldots = \ldots \\ m_{n-1}^{(k)} = \mu_k^{-n+1}/\mathcal{N} \end{array} \right. \,.$$

Quindi, in generale,

$$|m_k\rangle = \frac{1}{\mathcal{N}} \sum_{j=0}^{n-1} e^{-(2ik\pi/n)j} |j\rangle \,, k = 0, 1, 2, \ldots, n-1 \,.$$