METODI MATEMATICI PER LA FISICA

PROVA SCRITTA - 29 NOVEMBRE 2017

Si risolvano cortesemente i seguenti problemi, sapendo che verranno valutati:

1. la correttezza del risultato ottenuto e della procedura utilizzata;
2. la completezza dei passaggi riportati;
3. il livello di esemplificazione con cui sono espressi i risultati (ad esempio un risultato numerico reale non deve contenere l'unità immaginaria);
4. la correttezza del formalismo utilizzato;
5. la chiarezza dell'esposizione e la leggibilità del testo.

PRIMO PROBLEMA (PUNTEGGIO: 6/30)

Si calcoli l'integrale

$$M = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{a^{2x} + b^{2x}} \,,$$

con $a \in (0,1)$ e $b \in (1,\infty)$.
Suggerimento. Potrebbe essere utile considerare un percorso rettangolare.

SOLUZIONE DEL PRIMO PROBLEMA

Riscriviamo l'integrale esprimendo le potenze in termini degli esponenziali dei loro logaritmi

$$M = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{e^{2x\ln(a)} + e^{2x\ln(b)}} \,.$$

La convergenza è assicurata dalla condizione $(a,b) \in (0,1) \times (1,\infty)$, infatti, per questi valori dei parametri si hanno le limitazioni: $\ln(a) < 0$ e $\ln(b) > 0$, per cui agli estremi di integrazione l'integranda è infinitesima. In dettaglio si hanno:

$$\frac{1}{e^{2x\ln(a)} + e^{2x\ln(b)}} \underset{x\to-\infty}{\sim} \frac{1}{e^{2x\ln(a)}} = \frac{1}{e^{-2x|\ln(a)|}} = e^{2x|\ln(a)|} \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0 \,,$$
$$\frac{1}{e^{2x\ln(a)} + e^{2x\ln(b)}} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{e^{2x\ln(b)}} = \frac{1}{e^{2x|\ln(b)|}} = e^{-2x|\ln(b)|} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \,.$$

Manipolando la funzione, esprimiamo l'integranda in termini della funzione coseno iperbolico. Si procede mettendo in evidenza, a denominatore, l'esponenziale che ha per esponente il valore medio degli esponenti,

$$M = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{e^{x(\ln(a)+\ln(b))}\left(e^{x(\ln(a)-\ln(b))} + e^{-x(\ln(a)-\ln(b))}\right)} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-x\ln(ab)}}{\cosh\left(x\ln(b/a)\right)} dx \,,$$

dove abbiamo anche sfruttato la parità della funzione coseno iperbolico, ovvero $\cosh(z) = \cosh(-z)$. Facciamo il cambiamento di variabile $x' = x\ln(b/a)$, tenendo conto del fatto che $\ln(b/a) > 0$, si ha

$$M = \frac{1}{2\ln(b/a)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-x'\ln(ab)/\ln(b/a)}}{\cosh(x')} dx' = \frac{1}{2\ln(b/a)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-x'\alpha}}{\cosh(x')} dx' \,, \tag{1}$$

con $\alpha = \ln(ab)/\ln(b/a)$.
Consideriamo l'integrale della stessa integranda sul percorso chiuso rettangolare

$$\Gamma_R = [-R,R] \cup [R, R+i\pi] \cup [R+i\pi, -R+i\pi] \cup [-R+i\pi, -R] \,,$$

dove con il simbolo $[z_1, z_2]$ indichiamo il segmento rettilineo che ha estremi z_1 e z_2 ed è orientato da z_1 a z_2. Avremo, grazie al teorema dei residui,

$$\oint_{\Gamma_R} \frac{e^{-z\alpha}}{\cosh(z)} dz = 2i\pi \sum_{z_j \in G_R} \mathrm{Res}\left[\frac{e^{-z\alpha}}{\cosh(z)}, z_j\right] \,,$$

dove i punti z_j sono le singolarità dell'integranda appartenenti a G_R, che è l'insieme avente Γ_R come frontiera, ovvero: $\partial G_R = \Gamma_R$. In G_R, per ogni $R > 0$, l'integranda ha una sola singolarità, il polo semplice: $z_1 = i\pi/2$, il cui residuo vale

$$\text{Res}\left[\frac{e^{-z\alpha}}{\cosh(z)}, i\pi/2\right] = \lim_{z\to i\pi/2}\frac{e^{-z\alpha}}{\cosh(z)}(z - i\pi/2) = -ie^{-i\pi\alpha/2},$$

ne consegue che l'integrale su Γ_R vale

$$\oint_{\Gamma_R}\frac{e^{-z\alpha}}{\cosh(z)}dz = 2\pi e^{-i\pi\alpha/2}. \tag{2}$$

Studiamo il valore di questo integrale nel limite $R \to \infty$, considerandone i quattro contributi rettilinei, osservando, in particolare, che i quelli sui tratti verticali, di lunghezza finita, si annullano

$$\begin{aligned}\lim_{R\to\infty}\oint_{\Gamma_R}\frac{e^{-z\alpha}}{\cosh(z)}dz &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-x\alpha}}{\cosh(x)}dx + \int_{\infty}^{-\infty}\frac{e^{-(x+i\pi)\alpha}}{\cosh(x+i\pi)}dx \\ &\quad + \lim_{R\to\infty}\left[\int_{[R,R+i\pi]}\frac{e^{-z\alpha}}{\cosh(z)}dz + \int_{[-R+i\pi,-R]}\frac{e^{-z\alpha}}{\cosh(z)}dz\right].\end{aligned}$$

Gli integrali sui tratti verticali si annullano, infatti

$$\begin{aligned}\left|\int_{[\pm R,\pm R+i\pi]}\frac{e^{-z\alpha}}{\cosh(z)}dz\right| = \left|\int_0^{\pi}\frac{e^{-(\pm R+iy)\alpha}}{\cosh(\pm R+iy)}dy\right| &= \left|\int_0^{\pi}\frac{e^{-(\pm R+iy)\alpha}}{\cosh(R)\cos(y)\mp i\,\text{senh}(R)\text{sen}(y)}dy\right| \\ &\leq \int_0^{\pi}\frac{e^{\mp R\alpha}}{\sqrt{\cosh^2(R)\cos^2(y)+\text{senh}^2(R)\text{sen}^2(y)}}dy \\ &\leq \int_0^{\pi}\frac{e^{\mp R\alpha}}{\sqrt{\cosh^2(R)\cos^2(y)+\text{senh}^2(R)(1-\cos^2(y))}}dy \\ &\leq \int_0^{\pi}\frac{e^{\mp R\alpha}}{\sqrt{\cos^2(y)+\text{senh}^2(R)}}dy \\ &\leq \frac{\pi e^{\mp R\alpha}}{\text{senh}(R)} \underset{R\to\infty}{\sim} \pi e^{-(\alpha\pm1)R},\end{aligned}$$

nel limite $R \to \infty$, si annulla solo se $(\pm\alpha + 1) > 0$. Studiamo questo valore in termini dei parametri iniziali a e b,

$$\pm\alpha + 1 = \pm\frac{\ln(ab)}{\ln(b/a)} + 1 = \pm\frac{\ln(b)+\ln(a)}{\ln(b)-\ln(a)} + 1 = \begin{cases}\dfrac{2\ln(b)}{\ln(b)-\ln(a)} = \dfrac{2\ln(b)}{\ln(b)+\ln(1/a)} \\[2ex] \dfrac{-2\ln(a)}{\ln(b)-\ln(a)} = \dfrac{2\ln(1/a)}{\ln(b)+\ln(1/a)}\end{cases},$$

poiché sia b che $1/a$ variano in $(1,\infty)$, tutti i logaritmi sono strettamente positivi e quindi

$$\pm\alpha + 1 > 0,$$

ne consegue che i contributi sui tratti verticali sono infinitesimi nel limite $R \to \infty$. Alla luce di questo risultato si ha

$$\lim_{R\to\infty}\oint_{\Gamma_R}\frac{e^{-z\alpha}}{\cosh(z)}dz = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-x\alpha}}{\cosh(x)}dx + e^{-i\pi\alpha}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-x\alpha}}{\cosh(x)}dx = \left(1+e^{-i\pi\alpha}\right)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-x\alpha}}{\cosh(x)}dx. \tag{3}$$

Uguagliando i due risultati ottenuti per l'integrale complesso riportati nelle equazioni (2) e (3) si ha

$$\lim_{R\to\infty}\oint_{\Gamma_R}\frac{e^{-z\alpha}}{\cosh(z)}dz = \left(1+e^{-i\pi\alpha}\right)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-x\alpha}}{\cosh(x)}dx = 2i\pi e^{-i\pi\alpha/2},$$

da cui

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-x\alpha}}{\cosh(x)} dx = 2i\pi \frac{-ie^{-i\pi\alpha/2}}{1+e^{-i\pi\alpha}} = \frac{\pi}{\cos(\pi\alpha/2)} .$$

Infine, usando questo valore nell'espressione per l'integrale cercato, data nell'equazione (1), si ottiene

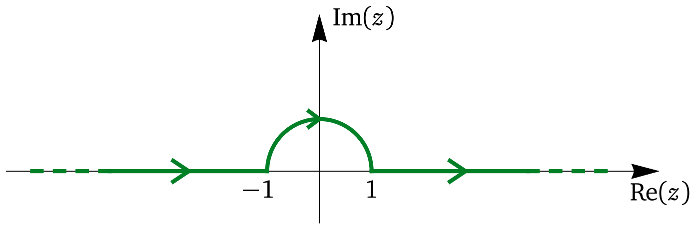
$$M = \frac{1}{2\ln(b/a)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-x\alpha}}{\cosh(x)} dx = \frac{\pi}{2\ln(b/a)\cos(\pi\alpha/2)} = \frac{\pi}{2\ln(b/a)\cos\left(\frac{\pi\ln(ab)}{2\ln(b/a)}\right)} .$$

Secondo problema (punteggio 6/30)

Si risolva l'integrale in valore principale

$$P = \mathrm{Pr}\int_{\Gamma} \frac{a^{iz}}{z^4+1} dz , \qquad a \in (0,1) ,$$

dove il percorso di integrazione, mostrato in figura, ha la seguente definizione



$$\Gamma = (-\infty, -1] \cup (-C_+) \cup [1, \infty) ,$$

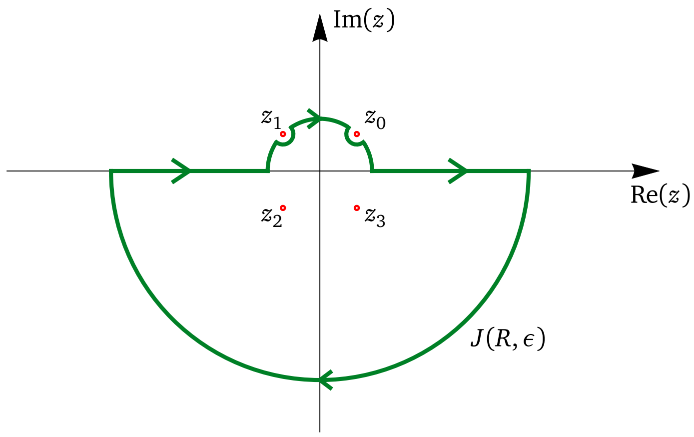
con $C_+ = \left\{ z : z = e^{i\theta}, \theta \in [0, \pi] \right\}$.

Soluzione del secondo problema

Riscriviamo l'integranda come

$$P = \mathrm{Pr}\int_{\Gamma} \frac{e^{iz\ln(a)}}{z^4+1} dz ,$$

poiché $a \in (0,1)$, $\ln(a) < 0$. L'integranda ha quattro poli semplici, indicati in rosso in figura, nei punti



$$z_k = e^{(2k+1)i\pi/4} , \qquad k = 0, 1, 2, 3 ,$$

i punti z_0 e z_1 appartengono al percorso di integrazione. Usiamo il lemma di Jordan con il percorso chiuso, $J(R,\epsilon)$, mostrato in figura, si ha

$$\lim_{R\to\infty}\lim_{\epsilon\to 0} \oint_{J(R,\epsilon)} \frac{e^{iz\ln(a)}}{z^4+1} dz = \mathrm{Pr}\int_{\Gamma} \frac{e^{iz\ln(a)}}{z^4+1} dz + \lim_{\epsilon\to 0}\left(\int_{\gamma_1} \frac{e^{iz\ln(a)}}{z^4+1} dz + \int_{\gamma_0} \frac{e^{iz\ln(a)}}{z^4+1} dz \right) = -2i\pi\left(\mathrm{Res}\left[z_2\right] + \mathrm{Res}\left[z_3\right]\right) ,$$

da cui

$$P = \mathrm{Pr}\int_{\Gamma} \frac{e^{iz\ln(a)}}{z^4+1} dz = -2i\pi\left(\mathrm{Res}\left[z_2\right] + \mathrm{Res}\left[z_3\right]\right) - \lim_{\epsilon\to 0}\left(\int_{\gamma_1} \frac{e^{iz\ln(a)}}{z^4+1} dz + \int_{\gamma_0} \frac{e^{iz\ln(a)}}{z^4+1} dz \right) . \qquad (4)$$

I residui nei punti $z = z_2$ e $z = z_3$ sono

$$\mathrm{Res}\left[z_2\right] = \lim_{z\to z_2} \frac{e^{iz\ln(a)}}{z^4+1}(z-z_2) = \frac{e^{iz_2\ln(a)}}{4z_2^3} = \frac{1}{4} e^{i\ln(a)(-1-i)/\sqrt{2}} e^{-15i\pi/4} ,$$

$$\mathrm{Res}\left[z_3\right] = \lim_{z\to z_3} \frac{e^{iz\ln(a)}}{z^4+1}(z-z_3) = \frac{e^{iz_3\ln(a)}}{4z_3^3} = \frac{1}{4} e^{i\ln(a)(1-i)/\sqrt{2}} e^{-21i\pi/4} ,$$

e la somma è

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}\left[z_2\right]+\mathrm{Res}\left[z_3\right] &= \frac{1}{4}\left(e^{\ln(a)(1-i)/\sqrt{2}}e^{-15i\pi/4}+e^{\ln(a)(1+i)/\sqrt{2}}e^{-21i\pi/4}\right)=\frac{e^{\ln(a)/\sqrt{2}}}{4}\left(e^{i(-15\pi/4-\ln(a)/\sqrt{2})}+e^{i(-21\pi/4+\ln(a)/\sqrt{2})}\right)\\
&= \frac{e^{\ln(a)/\sqrt{2}}}{4}e^{-9i\pi/2}\left(e^{i(3\pi/4-\ln(a)/\sqrt{2})}+e^{i(-3\pi/4+\ln(a)/\sqrt{2})}\right)=\frac{e^{\ln(a)/\sqrt{2}}}{2}e^{-9i\pi/2}\cos\left(\ln(a)/\sqrt{2}-3\pi/4\right)\\
&= \frac{-ie^{\ln(a)/\sqrt{2}}}{2}\cos\left(\ln(a)/\sqrt{2}-3\pi/4\right)\\
&= \frac{-ie^{\ln(a)/\sqrt{2}}}{2}\left[\cos\left(\ln(a)/\sqrt{2}\right)\cos(3\pi/4)+\mathrm{sen}\left(\ln(a)/\sqrt{2}\right)\mathrm{sen}(3\pi/4)\right]\\
&= \frac{i\sqrt{2}e^{\ln(a)/\sqrt{2}}}{4}\left[\cos\left(\ln(a)/\sqrt{2}\right)-\mathrm{sen}\left(\ln(a)/\sqrt{2}\right)\right].
\end{aligned}$$

I contributi sugli archi γ_0 e γ_1 sono

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\gamma_{0,1}}\frac{e^{iz\ln(a)}}{z^4+1}dz=i\pi A_{0,1}\,,$$

$A_{0,1}$ sono i valori limite

$$\begin{aligned}
A_0 &= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{e^{iz\ln(a)}}{z^4+1}(z-z_0)=\frac{1}{4}e^{i\ln(a)(1+i)/\sqrt{2}}e^{-3i\pi/4}=\frac{1}{4}e^{\ln(a)(-1+i)/\sqrt{2}}e^{-3i\pi/4}\,,\\
A_1 &= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{e^{iz\ln(a)}}{z^4+1}(z-z_1)=\frac{1}{4}e^{i\ln(a)(-1+i)/\sqrt{2}}e^{-9i\pi/4}=\frac{1}{4}e^{\ln(a)(-1-i)/\sqrt{2}}e^{-9i\pi/4}\,,
\end{aligned}$$

la loro somma vale

$$\begin{aligned}
A_0+A_1 &= \frac{e^{-\ln(a)/\sqrt{2}}}{4}\left(e^{i(-3\pi/4+\ln(a)/\sqrt{2})}+e^{i(-9\pi/4-\ln(a)/\sqrt{2})}\right)\\
&= \frac{e^{-\ln(a)/\sqrt{2}}}{4}e^{-3i\pi/2}\left(e^{i(3\pi/4+\ln(a)/\sqrt{2})}+e^{i(-3\pi/4-\ln(a)/\sqrt{2})}\right)\\
&= \frac{ie^{-\ln(a)/\sqrt{2}}}{2}\cos\left(\ln(a)/\sqrt{2}+3\pi/4\right)\\
&= \frac{ie^{-\ln(a)/\sqrt{2}}}{2}\left[\cos\left(\ln(a)/\sqrt{2}\right)\cos(3\pi/4)-\mathrm{sen}\left(\ln(a)/\sqrt{2}\right)\mathrm{sen}(3\pi/4)\right]\\
&= -\frac{i\sqrt{2}e^{-\ln(a)/\sqrt{2}}}{4}\left[\cos\left(\ln(a)/\sqrt{2}\right)+\mathrm{sen}\left(\ln(a)/\sqrt{2}\right)\right].
\end{aligned}$$

Usando l'espressione di equazione 4 si ottiene l'integrale cercato

$$P=\frac{\pi\sqrt{2}}{4}\left\{2e^{\ln(a)/\sqrt{2}}\left[\cos\left(\ln(a)/\sqrt{2}\right)-\mathrm{sen}\left(\ln(a)/\sqrt{2}\right)\right]-e^{-\ln(a)/\sqrt{2}}\left[\cos\left(\ln(a)/\sqrt{2}\right)+\mathrm{sen}\left(\ln(a)/\sqrt{2}\right)\right]\right\}.$$

Terzo problema (punteggio 6/30)

Si determini la serie di Laurent centrata in $z=1$, convergente in un intorno del punto $z=2$, della funzione

$$h(z)=\frac{z^3}{z^2-1}\,.$$

Soluzione del terzo problema

I poli semplici della funzione sono $z_{1,2}=\pm 1$, quindi i domini di convergenza delle serie di Laurent centrate in $z=1$ sono le corone circolari $C_1=\{z:0<|z-1|<2\}$ e $C_2=\{z:|z-1|>2\}$. Nel punto $z=2$ si ha $|z-2|=1$, quindi $\{z=2\}\in C_1$. I coefficienti di Laurent possono essere determinati a partire dalla definizione

$$C_k=\frac{1}{2i\pi}\oint_\gamma\frac{z^3}{(z+1)(z-1)^{k+2}}dz\,,$$

dove γ è, ad esempio, la circonferenza $\gamma = \{z : |z-1| = r\}$, con $0 < r < 2$.
Si vede facilmente che per $k \le -2$, posto $n = -k-2 \ge 0$, tutti i coefficienti sono nulli, infatti, per il teorema di Cauchy si ha

$$C_k = \frac{1}{2i\pi}\oint_\gamma \frac{z^3}{(z+1)(z-1)^{k+2}}dz = \frac{1}{2i\pi}\oint_\gamma \frac{z^3(z-1)^n}{(z+1)}dz = 0\,,$$

il polo dell'integranda nel punto $z=-1$ è esterno alla circonferenza.
I coefficienti con $-2 < k < 2$, ovvero C_{-1}, C_0, C_0 sono

$$\begin{aligned}
C_{-1} &= \frac{1}{2i\pi}\oint \frac{z^3}{(z+1)(z-1)}dz = \left.\frac{z^3}{z+1}\right|_{z=1} = \frac{1}{2}\,,\\
C_0 &= \frac{1}{2i\pi}\oint \frac{z^3}{(z+1)(z-1)^2}dz = \left.\frac{d}{dz}\frac{z^3}{z+1}\right|_{z=1} = \left.\frac{3z^2(z+1)-z^3}{(z+1)^2}\right|_{z=1} = \frac{5}{4}\,,\\
C_1 &= \frac{1}{2i\pi}\oint \frac{z^3}{(z+1)(z-1)^3}dz = \left.\frac{1}{2}\frac{d^2}{dz^2}\frac{z^3}{z+1}\right|_{z=1} = \left.\frac{1}{2}\frac{(6z^2+6z)(z+1)^2-2(z+1)(2z^3+3z^2)}{(z+1)^4}\right|_{z=1} = \frac{7}{8}\,.
\end{aligned}$$

Infine, per $k \ge 2$ i coefficienti si ottengono come somma di quattro contributi

$$\begin{aligned}
C_k &= \frac{1}{2i\pi}\oint \frac{z^3}{(z+1)(z-1)^{k+2}}dz = \left.\frac{1}{(k+1)!}\frac{d^{k+1}}{dz^{k+1}}\frac{z^3}{z+1}\right|_{z=1}\\
&= \frac{1}{(k+1)!}\left(\sum_{j=0}^{3}\binom{j}{k+1}\frac{d^jz^3}{dz^j}\frac{d^{k+1-j}}{dz^{k+1-j}}\frac{1}{z+1}\right)\\
&= \frac{1}{(k+1)!}\left(\sum_{j=0}^{3}\binom{j}{k+1}\frac{d^jz^3}{dz^j}\frac{(-1)^{k+1-j}(k+1-j)!}{(z+1)^{k+2-j}}\right)\\
&= -\frac{1}{(k+1)!}\left(\frac{(k+1)!}{(-2)^{k+2}}+3\frac{(k+1)!}{(-2)^{k+1}}+6\frac{(k+1)!}{2(-2)^k}+6\frac{(k+1)!}{6(-2)^{k-1}}\right)\\
&= -\left(\frac{1}{(-2)^{k+2}}+3\frac{1}{(-2)^{k+1}}+3\frac{1}{(-2)^k}+\frac{1}{(-2)^{k-1}}\right)\\
&= -\frac{1}{(-2)^{k+2}}(1-6+12-8)\\
&= \frac{1}{(-2)^{k+2}}\,.
\end{aligned}$$

La serie di Laurent può essere ottenuta anche sfruttando la serie geometrica, basta riscrivere la funzione come

$$h(z) = \frac{z^3}{z^2-1} = \frac{z^2}{2}\left(\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z+1}\right) = \frac{[(z-1)+1]^2}{2}\left(\frac{1}{z-1}+\frac{1}{(z-1)+2}\right)\,,$$

poiché $\forall\, z \in C_1$, si ha $|z-1| < 2$,

$$
\begin{aligned}
h(z) &= \frac{(z-1)^2 + 2(z-1) + 1}{2}\left(\frac{1}{z-1} + \frac{1/2}{1+(z-1)/2}\right) \\
&= \frac{(z-1)^2 + 2(z-1) + 1}{2}\left(\frac{1}{z-1} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k (z-1)^k}{2^k}\right) \\
&= \frac{z-1}{2} + 1 + \frac{1/2}{z-1} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^{k+2}}\left[(z-1)^{k+2} + 2(z-1)^{k+1} + (z-1)^k\right] \\
&= \frac{z-1}{2} + 1 + \frac{1/2}{z-1} + \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left[\frac{(z-1)^{k+2}}{2^{k+2}} + \frac{(z-1)^{k+1}}{2^{k+1}} + \frac{1}{4}\frac{(z-1)^k}{2^k}\right] \\
&= \frac{z-1}{2} + 1 + \frac{1/2}{z-1} + \underbrace{\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k\frac{(z-1)^k}{2^k} - \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{(z-1)^k}{2^k}}_{=-\sum_{k=1}^{1}(-1)^k\frac{(z-1)^k}{2^k}} + \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(z-1)^k}{2^k} \\
&= \frac{z-1}{2} + 1 + \frac{1/2}{z-1} + \frac{z-1}{2} + \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(z-1)^k}{2^k} \\
&= \frac{1/2}{z-1} + 1 + (z-1) + \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(z-1)^k}{2^k} \\
&= \frac{1/2}{z-1} + 1 + (z-1) + \frac{1}{4} - \frac{1}{8}(z-1) + \frac{1}{4}\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k\frac{(z-1)^k}{2^k} \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{z-1} + \frac{5}{4} + \frac{7}{8}(z-1) + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{(-2)^{k+2}}(z-1)^k\,.
\end{aligned}
$$

Dalla precedente si ottiene l'insieme dei coefficienti non nulli

$$
C_{-1} = \frac{1}{2}\,, \qquad C_0 = \frac{5}{4}\,, \qquad C_1 = \frac{7}{8}\,, \qquad C_k = \frac{1}{(-2)^{k+2}}\,, \quad k = 2, 3, \ldots\,.
$$

Quarto problema (punteggio 6/30)

L'operatore $\hat{A}$, definito nello spazio di Hilbert a 3 dimensioni, E_3, ha un autovalore e il determinante uguali ad uno, traccia nulla e verifica le relazioni

$$
\hat{A}|e_1\rangle = |e_2\rangle + 2|e_3\rangle\,, \qquad \hat{A}|e_3\rangle = |e_1\rangle + |e_3\rangle\,,
$$

dove $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^{3}$ è la base (ortonormale) canonica di E_3.
Si determinino gli autovalori di $\hat{A}$ e, rispetto alla base canonica, la matrice e i vettori che rappresentano rispettivamente l'operatore e degli autovettori.

Soluzione del quarto problema

Moltiplicando a sinistra le relazioni date per i vettori della base in forma "bra" si ottengono gli elementi di matrice della prima e terza colonna, ovvero

$$
A = \begin{pmatrix} \langle e_1|\hat{A}|e_1\rangle & \langle e_1|\hat{A}|e_2\rangle & \langle e_1|\hat{A}|e_3\rangle \\ \langle e_2|\hat{A}|e_1\rangle & \langle e_2|\hat{A}|e_2\rangle & \langle e_2|\hat{A}|e_3\rangle \\ \langle e_3|\hat{A}|e_1\rangle & \langle e_3|\hat{A}|e_2\rangle & \langle e_3|\hat{A}|e_3\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & A_2^1 & 1 \\ 1 & A_2^2 & 0 \\ 2 & A_2^3 & 1 \end{pmatrix}.
$$

Dalla condizione di annullamento della traccia si ha

$$
\mathrm{Tr}\,(A) = 1 + A_2^2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad A_2^2 = -1\,.
$$

Sfruttando il determinate unitario si ottiene un ulteriore vincolo, che permette di ottenere uno dei due elementi rimasti incogniti in funzione dell'altro

$$1 = \det \begin{pmatrix} 0 & A^1_2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & A^3_2 & 1 \end{pmatrix} = -A^1_2 + A^3_2 + 2 \qquad \Rightarrow \qquad A^3_2 = A^1_2 - 1 \qquad \Rightarrow \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & A^1_2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & A^1_2 - 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Infine, sapendo che uno degli autovalori è uguale ad uno e che quindi "1" è una soluzione dell'equazione secolare, si ottiene l'ultimo elemento incognito, infatti

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 0-x & A^1_2 & 1 \\ 1 & -1-x & 0 \\ 2 & A^1_2 - 1 & 1-x \end{pmatrix} &= 0 \\ x(1-x^2) - A^1_2(1-x) + A^1_2 - 1 + 2 + 2x &= 0 \\ -x^3 + x(3 + A^1_2) + 1 &= 0\,, \end{aligned}$$

indicando con x_0 l'autovalore unitario,

$$\begin{aligned} -x_0^3 + x_0(3 + A^1_2) + 1 &= 0\,, \qquad x_0 = 1\,, \\ -1 + 3 + A^1_2 + 1 &= 0 \\ A^1_2 &= -3\,. \end{aligned}$$

In definitiva la matrice è

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Usando l'espressione già ottenuta per l'equazione secolare

$$\begin{aligned} -x^3 + x(3 + A^1_2) + 1 &= 0\,, \qquad A^1_2 = -3\,, \\ -x^3 + 1 &= 0\,, \end{aligned}$$

si ottengono gli autovalori, che sono le tre radice cubiche dell'unità

$$x_0 = 1\,, \qquad x_{1,2} = e^{\pm 2i\pi/3}\,.$$

Gli autovalori potevano essere ottenuti direttamente dalle condizioni iniziali, ovvero la conoscenza di uno di essi,$x_0 = 1$, della traccia e del determinante. Si hanno infatti le due equazioni

$$0 = \mathrm{Tr}(\hat{A}) = x_0 + x_1 + x_2 = 1 + x_1 + x_2 = 0 \qquad 1 = \det(\hat{A}) = x_0\, x_1\, x_2 = x_1\, x_2 = 1$$

da cui, sostituendo $x_2 = -x_1 - 1$ nella seconda si ha un'equazione di secondo grado per x_1

$$x_1^2 + x_1 + 1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} x_1 = \dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} = e^{\pm 2i\pi/3} \\ x_2 = -1 - \dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} = \dfrac{-1 \mp i\sqrt{3}}{2} = e^{\mp 2i\pi/3} \end{cases}.$$

L'ambiguità delle due soluzione si risolve osservando che i due valori corrispondenti per x_2 sono gli stessi di x_1, per cui è sufficiente scegliere $x_{1,2} = e^{\pm 2i\pi/3}$.
Gli autovettori corrispondenti hanno le seguenti espressioni generali

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_j \\ b_j \\ c_j \end{pmatrix} = x_j \begin{pmatrix} a_j \\ b_j \\ c_j \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} -3b_j + c_j \\ 1 - b_j \\ 2 - 4b_j + c_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_j \\ x_j b_j \\ x_j c_j \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} b_j = 1/(x_j + 1) \\ c_j = x_j + 3/(x_j + 1) \end{cases}.$$

Pe il primo, relativo all'autovalore $x_0 = 1$, si ha

$$b_0 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}\,, \qquad c_0 = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2} \qquad \Rightarrow \qquad v_0 = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Mentre i due relativi agli autovalori $x_{1,2} = e^{\pm 2i\pi/3}$ sono

$$\begin{aligned} b_{1,2} &= \frac{1}{1+e^{\pm 2i\pi/3}} = \frac{e^{\mp i\pi/3}}{e^{\mp i\pi/3}+e^{\pm i\pi/3}} = \frac{e^{\mp i\pi/3}}{2\cos(\pi/3)} = e^{\mp i\pi/3} \\ c_{1,2} &= x_{1,2}+3b_{1,2} = e^{\pm 2i\pi/3}+3e^{\mp i\pi/3} = -\frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2} \mp \frac{3i\sqrt{3}}{2} = 2e^{\mp i\pi/3} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad v_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{\mp i\pi/3} \\ 2e^{\mp i\pi/3} \end{pmatrix}.$$

Quinto problema (punteggio 6/30)

Si calcoli la trasformata di Fourier della funzione

$$f(x) = \theta(1+x)\theta(1-x)\left(x^2 - |x|\right),$$

dove $\theta(x)$ è la funzione a gradino di Heaviside.

Soluzione del quinto problema

La trasformata di Fourier si ottiene integrando per parti e vale

$$\begin{aligned} \mathscr{F}_k[g] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} e^{-ikx}\left(x^2 - |x|\right) dx, = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{0} e^{-ikx}\left(x^2 + x\right) dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{1} e^{-ikx}\left(x^2 - x\right) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{x^2+x}{-ik} e^{-ikx}\Big|_{-1}^{0} + \frac{2x+1}{-k^2} e^{-ikx}\Big|_{-1}^{0} + \frac{2e^{-ikx}}{-ik^3}\Big|_{-1}^{0} + \frac{x^2-x}{-ik} e^{-ikx}\Big|_{0}^{1} + \frac{2x-1}{-k^2} e^{-ikx}\Big|_{0}^{1} + \frac{2e^{-ikx}}{-ik^3}\Big|_{0}^{1} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[-\frac{e^{ik}+1}{k^2} + \frac{2e^{ik}-2}{ik^3} - \frac{e^{-ik}+1}{k^2} + \frac{2-2e^{-ik}}{ik^3} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[-\frac{2\cos(k)+2}{k^2} + \frac{4\mathrm{sen}(k)}{k^3} \right] \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2\mathrm{sen}(k) - k\cos(k) - k}{k^3}. \end{aligned}$$

Sesto problema (punteggio 6/30)

Si determinino il raggio di convergenza e la somma della serie di potenze positive con coefficienti matriciali

$$S(z) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k z^k,$$

dove $\{A_k\}_{k=0}^{\infty}$ è la successione delle matrici

$$A_k = \begin{pmatrix} e^k/2 & 0 & -e^{-k}/2 \\ 0 & e^k/2 & 0 \\ -e^{-k}/2 & 0 & e^k/2 \end{pmatrix}.$$

Soluzione del sesto Problema

La serie può essere scritta nella forma esplicita

$$S(z) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k z^k = \begin{pmatrix} S_d(z) & 0 & S_o(z) \\ 0 & S_d(z) & 0 \\ S_o(z) & 0 & S_d(z) \end{pmatrix}, \qquad k \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

dove le funzioni sono le somme delle serie

$$S_d(z) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} e^k z^k, \qquad S_o(z) = -\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} e^{-k} z^k.$$

I raggi di convergenza si ottengono con la formula di Cauchy-Hadamrd e sono

$$R_d = \left(\limsup_{k\to\infty} \left| e^k \right|^{1/k} \right)^{-1} = e^{-1}, \qquad R_o = \left(\limsup_{k\to\infty} \left| e^{-k} \right|^{1/k} \right)^{-1} = e\,.$$

Il raggio di convergenza della serie completa è

$$R = \min\{R_d, R_o\} = e^{-1}\,.$$

Per $|z| < R$ le due serie convergono e hanno somme

$$S_d(z) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} e^k z^k = \frac{1/2}{1 - z\,e}\,, \qquad S_o(z) = -\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} e^{-k} z^k = -\frac{1/2}{1 - z\,e^{-1}}\,.$$

La forma matriciale della somma è

$$S(z) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (1 - z\,e)^{-1} & 0 & -\left(1 - z\,e^{-1}\right)^{-1} \\ 0 & (1 - z\,e)^{-1} & 0 \\ -\left(1 - z\,e^{-1}\right)^{-1} & 0 & (1 - z\,e)^{-1} \end{pmatrix}.$$

Questa funzione ha solo due poli semplici nei punti $z = e$ e $z = e^{-1}$, ovvero, pur dovendo imporre la condizione $|z| < R = e^{-1}$ per sommare le serie, una volta sommate, tale condizione può essere rilassata e il dominio della funzione si evince dalla sua espressine analitica.
Lo stesso risultato si ottiene in termini delle norme della matrici A_k, ovvero

$$R = \left(\limsup_{k\to\infty} \left\| A_k \right\|^{1/k} \right)^{-1}.$$

Indicando con $a_j^{(k)}$ il j-esimo autovalore della k-esima matrice si hanno le norme

$$\left\| A_k \right\| = \max\left\{ \left| a_j^{(k)} \right| \right\}.$$

Gli autovalori sono gli zeri delle equazioni caratteristiche

$$\det\begin{pmatrix} e^k/2 - a & 0 & -e^{-k}/2 \\ 0 & e^k/2 - a & 0 \\ -e^{-k}/2 & 0 & e^k/2 - a \end{pmatrix} = 0$$

$$\left(e^k/2 - a\right)\left[\left(e^k/2 - a\right)^2 - e^{-2k}/4 \right] = 0\,,$$

da cui

$$a_1^{(k)} = \frac{e^k}{2}\,, \qquad a_2^{(k)} = \frac{e^k - e^{-k}}{2} = \mathrm{senh}(k)\,, \qquad a_3^{(k)} = \frac{e^k + e^{-k}}{2} = \cosh(k)\,.$$

Poiché, $\forall\, k \in \mathbb{N}$, vale la disuguaglianza

$$\left| a_3^{(k)} \right| = \cosh(k) > \left| a_1^{(k)} \right| = \frac{e^k}{2} > \left| a_2^{(k)} \right| = \mathrm{senh}(k)\,,$$

si ha che le norme delle matrici A_k sono

$$\left\| A_k \right\| = \max\left\{ \left| a_j^{(k)} \right| \right\} = \left| a_3^{(k)} \right| = \cosh(k)\,.$$

Il raggio di convergenza è

$$\begin{aligned} R &= \left(\limsup_{k\to\infty} \left\| A_k \right\|^{1/k} \right)^{-1} = \left(\limsup_{k\to\infty} \cosh^{1/k}(k) \right)^{-1} \\ &= \left(\limsup_{k\to\infty} \frac{\left(e^k + e^{-k}\right)^{1/k}}{2^{1/k}} \right)^{-1} = \left(\limsup_{k\to\infty} \left(e^k\right)^{1/k} \right)^{-1} = e^{-1}\,. \end{aligned}$$