Metodi Matematici per la Fisica

Prova parziale del 29 aprile 2020

Si risolvano cortesemente i seguenti problemi, sapendo che soltanto due problemi, uno dei primi tre e uno degli ultimi tre, che il candidato sceglierà prima della chiusura della prova, saranno oggetto di valutazione. A ciascun problema è assegnato un punteggio che varia nell'intervallo $[0, 15/30]$ ed è stabilito in base ai seguenti criteri:

1. la correttezza del risultato ottenuto e della procedura utilizzata;
2. la completezza dei passaggi riportati;
3. il livello di esemplificazione con cui sono espressi i risultati (ad esempio un risultato numerico reale non deve contenere l'unità immaginaria);
4. la correttezza del formalismo utilizzato;
5. la chiarezza dell'esposizione e la leggibilità del testo;

Inoltre, al fine di favorire una preparazione che copra il maggior numero di argomenti del programma, verranno valutati i contributi relativi, premiando i casi in cui il modulo della differenza tra i punteggi dei due problemi sia minimo.

Primo problema (punteggio massimo: 15/30)

Si ottenga il valore dell'integrale

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+\ln(x)}{1+x^4} dx \,.$$

Soluzione del primo problema

Riscriviamo l'integrale come la somma di due contributi

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln(x)}{1+x^4} dx \equiv W_1 + W_2 \,.$$

Le funzioni integrande non hanno poli sull'asse reale. Il primo integrale può essere calcolato usando il lemma per l'integrazione sugli archi infiniti, ovvero chiudendo il percorso d'integrazione con una semi-circonferenza di raggio tendente all'infinito e avvalendosi quindi del teorema dei residui. Poiché la funzione integranda tende uniformemente a zero su ogni arco centrato nell'origine al divergere del raggio, possiamo indifferentemente scegliere di chiudere il percorso sia nel semi-piano delle parti immaginarie positive che in quello delle parti immaginarie negative. Scegliendo il primo, consideriamo il percorso chiuso

$$\Gamma_R = [-R, R] \cup \left\{ z : z = Re^{i\theta}, \theta \in [0, \pi] \right\} ,$$

e, osservando che la funzione integranda ha quattro poli semplici nelle radici quarte di -1, cioè: $z_k = e^{(2k+1)i\pi/4}$, con $k = 0, 1, 2, 3$, si ha

$$\begin{aligned} W_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \lim_{R\to\infty} \oint_{\Gamma_R} \frac{dz}{1+z^4} = 2i\pi \sum_{k=0}^{1} \text{Res}\left[\frac{1}{1+z^4}, z_k\right] = \frac{i\pi}{2} \sum_{k=0}^{1} \frac{1}{z_k^3} = \frac{i\pi}{2} \sum_{k=0}^{1} e^{-3(2k+1)i\pi/4} \\ &= \frac{i\pi}{2}\left(e^{-3i\pi/4} + e^{-9i\pi/4}\right) = \frac{i\pi}{2}\left(e^{-3i\pi/4} + e^{-i\pi/4}\right) = \frac{i\pi}{2}\left(\frac{-1-i}{\sqrt{2}} + \frac{1-i}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}} , \end{aligned}$$

dove abbiamo sfruttato l'annullamento del contributo sulla semi-circonferenza centrata nell'origine e immersa nel semi-piano delle parti immaginarie positive al divergere del raggio e considerato i residui dei soli poli appartenenti al suddetto semi-piano, ovvero z_0 e z_1.
Riscriviamo l'integrale W_2 nella variabile z e considerando $z = |z| \equiv r$ sulla semiretta $[0, \infty)$ e $z = |z|e^{i\pi} \equiv re^{i\pi}$ sulla semiretta $(-\infty, 0]$, per cui si ha

$$\begin{aligned} W_2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln(x)}{1+x^4} dx = -\int_{\infty}^{0} \frac{i\pi + \ln(r)}{1+r^4} dr + \int_{0}^{\infty} \frac{\ln(r)}{1+r^4} dr = 2\int_{0}^{\infty} \frac{\ln(r)}{1+r^4} dr + i\pi \int_{0}^{\infty} \frac{dr}{1+r^4} \\ &= 2\int_{0}^{\infty} \frac{\ln(r)}{1+r^4} dr + \frac{i\pi}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dr}{1+r^4} = 2\int_{0}^{\infty} \frac{\ln(r)}{1+r^4} dr + \frac{i\pi^2}{2\sqrt{2}} , \end{aligned}$$

per ottenere il valore dell'ultimo integrale abbiamo usato il risultato precedente.
Rimane da calcolare l'integrale con la funzione integranda polidroma, che contiene la funzione logaritmo. Possiamo sfruttare la formula nota

$$\int_0^\infty R(x)\ln(x)dx = -\frac{1}{2}\sum_k \text{Res}\left[R(z)(\ln(z)-i\pi)^2, z_k\right],$$

dove $R(x)$ rappresenta una funzione razionale, che non ha poli sul semi-asse reale positivo e tale che, al tendere della variabile agli estremi dell'intervallo d'integrazione, abbia gli andamenti

$$R(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} Lx^l, \qquad R(x) \underset{x\to\infty}{\sim} Hx^h,$$

dove L ed H sono opportune costanti complesse, mentre le potenze $l,h \in \mathbb{Z}$ devono verificare la condizione di convergenza: $-1-l<0<-1-h$. Nel caso in esame si hanno

$$R(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} Lx^l = 1, \qquad R(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} Hx^h = x^{-4},$$

ovvero: $L=H=1$, $l=0$, $h=-4$ e quindi la condizione di convergenza è verificata, infatti

$$-1-l=-1<0<-1-h=3.$$

Il valore dell'integrale è

$$\int_0^\infty \frac{\ln(r)}{1+r^4}dr = -\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{3}\text{Res}\left[\frac{(\ln(z)-i\pi)^2}{1+r^4}, e^{(2k+1)i\pi/4}\right] = -\frac{1}{8}\sum_{k=0}^{3}\left(\frac{(2k-3)i\pi}{4}\right)^2 e^{-3(2k+1)i\pi/4}$$
$$= \frac{\pi^2}{128}\left(9e^{-3i\pi/4}+e^{-i\pi/4}+e^{i\pi/4}+9e^{3i\pi/4}\right) = \frac{\pi^2}{64}\left(9\cos(3\pi/4)+\cos(\pi/4)\right) = -\frac{\pi^2}{8\sqrt{2}},$$

quindi

$$W_2 = 2\int_0^\infty \frac{\ln(r)}{1+r^4}dr + \frac{i\pi^2}{2\sqrt{2}} = -\frac{\pi^2}{4\sqrt{2}} + \frac{i\pi^2}{2\sqrt{2}}.$$

L'integrale cercato vale

$$W = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1+\ln(x)}{1+x^4}dx = W_1+W_2 = \frac{\pi}{\sqrt{2}} - \frac{\pi^2}{4\sqrt{2}} + \frac{i\pi^2}{2\sqrt{2}}$$
$$W = \pi\frac{4-\pi(1-2i)}{4\sqrt{2}}.$$

Secondo problema (punteggio massimo: 15/30)

Si ottenga il valore dell'integrale

$$Q = \int_{-1}^{\infty}\frac{dx}{(x+1)^3+1}.$$

Soluzione del secondo problema

Facciamo la sostituzione $w=(x+1)^3$, si hanno: $x=w^{1/3}-1$ e $dx=w^{-2/3}dw/3$ e l'integrale diventa

$$Q = \frac{1}{3}\int_0^\infty \frac{w^{-2/3}}{w+1}dw.$$

La funzione integranda è polidroma, con punti di diramazione nell'origine e all'infinito, ed ha un polo semplice in $w=-1$, non appartenente, quindi, al percorso d'integrazione rappresentato dal semi-asse reale positivo. Possiamo applicare la formula per la risoluzione degli integrali con funzioni integrande polidrome

$$\int_0^\infty x^\alpha R(x)dx = -\frac{\pi e^{-i\pi\alpha}}{\text{sen}(\pi\alpha)}\sum_{\text{tot}}\text{Res}\left[z^\alpha R(z), z_k\right],$$

con $\alpha \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$ e dove $R(x)$ è una funzione razionale con poli non appartenenti al semi-asse reale positivo e tale che

$$R(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} Lx^l, , \qquad R(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} Hx^h ,$$

con L e H opportune costanti complesse e con le potenze $l, h \in \mathbb{Z}$, che verificano la condizione di convergenza $-1-l < \mathrm{Re}(\alpha) < -1-h$.
Nel caso in esame si hanno

$$\alpha = -\frac{2}{3}, \qquad R(w) = \frac{1}{w+1} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} L = H = 1 \\ l = 0 \\ h = -1 \end{cases} ,$$

quindi la condizione di convergenza è verificata, infatti

$$-1-l = -1 < \mathrm{Re}(\alpha) = -\frac{2}{3} < -1-h = 0 .$$

Ne consegue che l'integrale vale

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{3}\int_0^\infty \frac{w^{-2/3}}{w+1}dw = -\frac{1}{3}\frac{\pi e^{i\pi/3}}{\mathrm{sen}(-2\pi/3)}\mathrm{Res}\left[\frac{w^{-2/3}}{w+1}, -1\right] = -\frac{1}{3}\frac{\pi e^{2i\pi/3}}{\mathrm{sen}(-2\pi/3)}(-1)^{-2/3} \\ &= -\frac{1}{3}\frac{\pi e^{2i\pi/3}}{\mathrm{sen}(-2\pi/3)}\left(e^{i\pi}\right)^{-2/3} = -\frac{1}{3}\frac{\pi}{\mathrm{sen}(-2\pi/3)} \\ Q &= \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} . \end{aligned}$$

Terzo problema (punteggio massimo: 15/30)

Dopo aver definito il dominio di analiticità D nel piano complesso α della funzione

$$Y(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{(3+\alpha)w}}{e^{4w}+1}dw ,$$

se ne calcoli la forma esplicita.

Soluzione del terzo problema

Facendo la sostituzione $x = e^w$, per cui si hanno $w = \ln(x)$ e $dw = dx/x$, l'integrale assume la forma

$$Y(\alpha) = \int_0^\infty \frac{x^2}{x^4+1}x^\alpha dx ,$$

ovvero si ottiene l'integrale della funzione polidroma x^α moltiplicata per la funziona razionale

$$R(x) = \frac{x^2}{x^4+1} ,$$

che ha i quattro poli semplici

$$z_k = e^{(2k+1)i\pi/4} , \qquad k = 0, 1, 2, 3 ,$$

non appartenenti al semi-asse reale positivo, ovvero al percorso d'integrazione. I comportamenti di tale funzione razionale al tendere della variabile agli estremi dell'intervallo d'integrazione sono

$$R(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} x^l = x^2 , \qquad R(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} x^h = x^{-2} ,$$

quindi, avendo $l = 2$ e $h = -2$, la condizione di convergenza sulla variabile α, ovvero $-1-l < \mathrm{Re}(\alpha) < -1-h$, diventa

$$-3 < \mathrm{Re}(\alpha) < 1 ,$$

ne consegue che il dominio di analiticità della funzione $Y(\alpha)$ è il rettangolo infinito, contenente l'asse immaginario,

$$D = \{\alpha : -3 < \text{Re}(\alpha) < 1\} .$$

Usiamo la formula risolutiva nota

$$Y(\alpha) = -\frac{\pi e^{-i\pi\alpha}}{\text{sen}(\pi\alpha)} \sum_{k=0}^{3} \text{Res}\left[z^\alpha R(z), z_k\right] ,$$

con i quattro residui

$$\text{Res}\left[z^\alpha R(z), z_k\right] = \frac{z_k^{\alpha-1}}{4} = \frac{e^{(2k+1)(\alpha-1)i\pi/4}}{4} = \frac{e^{(\alpha-1)i\pi/4}}{4} e^{k(\alpha-1)i\pi/2} , \qquad k = 0, 1, 2, 3 .$$

Per calcolarne la somma sfruttiamo il metodo di somma della serie geometrica di ragione $e^{(\alpha-1)i\pi/2}$, ovvero moltiplichiamo e dividiamo per $\left(1 - e^{(\alpha-1)i\pi/2}\right)$ e otteniamo

$$\begin{aligned}
Y(\alpha) &= -\frac{\pi e^{-i\pi\alpha}}{\text{sen}(\pi\alpha)} \sum_{k=0}^{3} \text{Res}\left[z^\alpha R(z), z_k\right] = -\frac{\pi e^{-i\pi\alpha}}{\text{sen}(\pi\alpha)} \frac{e^{(\alpha-1)i\pi/4}}{4} \frac{1 - e^{4(\alpha-1)i\pi/2}}{1 - e^{(\alpha-1)i\pi/2}} \\
&= -\frac{\pi e^{-i\pi\alpha}}{\text{sen}(\pi\alpha)} \frac{e^{(\alpha-1)i\pi/4}}{4} \frac{1 - e^{2i\pi\alpha}}{1 - e^{(\alpha-1)i\pi/2}} \\
&= -\frac{\pi e^{-i\pi\alpha}}{\text{sen}(\pi\alpha)} \frac{e^{(\alpha-1)i\pi/4}}{4} \frac{e^{i\pi\alpha}\left(e^{-i\pi\alpha} - e^{i\pi\alpha}\right)}{e^{(\alpha-1)i\pi/4}\left(e^{-(\alpha-1)i\pi/4} - e^{(\alpha-1)i\pi/4}\right)} \\
&= -\frac{\pi}{4\text{sen}(\pi\alpha)} \frac{\text{sen}(\pi\alpha)}{\text{sen}\left((\alpha-1)\pi/4\right)} \\
&= -\frac{\pi}{4\text{sen}\left((\alpha-1)\pi/4\right)} ,
\end{aligned}$$

infine, usando la formula di somma per la funzione seno,

$$Y(\alpha) = \frac{\pi\sqrt{2}}{4} \frac{1}{\cos(\pi\alpha/4) - \text{sen}(\pi\alpha/4)} .$$

Quarto problema (punteggio massimo: 15/30)

Si ottengano lo spettro discreto, l'insieme degli autovettori e la rappresentazione spettrale dell'operatore $\hat{H} : E_3 \to E_3$, sapendo che la sua azione sui vettori della base ortonormale $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^3 \subset E_3$ dello spazio di Hilbert a tre dimensioni E_3 è data dalla relazione

$$\hat{H}|e_k\rangle = i \sum_{j,m=1}^{3} \epsilon_{kjm} |e_m\rangle + |e_k\rangle , \qquad k = 1, 2, 3 ,$$

dove

$$\epsilon_{jkm} = \begin{cases} +1 & (j,k,m) = (1,2,3), (2,3,1), (3,1,2) \\ -1 & (j,k,m) = (3,2,1), (2,1,3), (1,3,2) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} , \qquad j,k,m = 1,2,3 .$$

rappresenta il simbolo di Tullio Levi-Civita.
Si ricavino, inoltre, le espressioni degli operatori di proiezione della rappresentazione o decomposizione spettrale in funzione dell'operatore $\hat{H}$, oltreché le loro rappresentazioni matriciali rispetto alla base data.

Soluzione del quarto problema

La matrice H che rappresenta l'operatore rispetto alla base ortonormale $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^3$ si ottiene applicando l'operatore su un generico vettore della stessa base, ovvero, usando anche la definizione data dell'azione dell'operatore,

$$\hat{H}|e_k\rangle = H_k^j |e_j\rangle = i \sum_{j,m=1}^{3} \epsilon_{kjm} |e_m\rangle + |e_k\rangle , \qquad k = 1, 2, 3 ,$$

dove H^j_k rappresenta l'elemento della j-esima riga e della k-esima colonna della matrice H.
Considerando le azioni sui tre vettori della base

$$\hat{H}|e_1\rangle = H^j_1|e_j\rangle = i\sum_{j,m=1}^{3}\epsilon_{1jm}|e_m\rangle + |e_1\rangle = i\left(|e_3\rangle - |e_2\rangle\right) + |e_1\rangle = |e_1\rangle - i|e_2\rangle + i|e_3\rangle\,,$$

$$\hat{H}|e_2\rangle = H^j_2|e_j\rangle = i\sum_{j,m=1}^{3}\epsilon_{2jm}|e_m\rangle + |e_2\rangle = i\left(|e_1\rangle - |e_3\rangle\right) + |e_2\rangle = i|e_1\rangle + |e_2\rangle - i|e_3\rangle\,,$$

$$\hat{H}|e_3\rangle = H^j_3|e_j\rangle = i\sum_{j,m=1}^{3}\epsilon_{3jm}|e_m\rangle + |e_3\rangle = i\left(|e_2\rangle - |e_1\rangle\right) + |e_3\rangle = -i|e_1\rangle + i|e_2\rangle + |e_3\rangle\,,$$

i coefficienti dei vettori della base negli ultimi membri delle tre equazioni rappresentano gli elementi di ciascuna delle tre colonne della matrice H, che ha quindi la forma esplicita

$$H = \begin{pmatrix} 1 & i & -i \\ -i & 1 & i \\ i & -i & 1 \end{pmatrix}.$$

Poiché la rappresentazione è fatta rispetto ad una base ortonormale, la matrice che rappresenta l'operatore aggiunto $\hat{H}^\dagger$ è la trasposta e complessa coniugata della matrice che rappresenta l'operatore stesso, cioè $\hat{H}^\dagger \overset{e}{\hookleftarrow} H^{T*}$, quindi dell'identità $H = H^{T*}$ si evince che l'operatore $\hat{H}$ è hermitiano.
Lo spettro discreto, ovvero l'insieme degli autovalori dell'operatore, si ottiene risolvendo l'equazione secolare

$$\begin{aligned}
\det(H - I\lambda) &= 0 \\
\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & i & -i \\ -i & 1-\lambda & i \\ i & -i & 1-\lambda \end{pmatrix} &= 0 \\
(1-\lambda)\left[(1-\lambda)^2 - 1\right] + i\left[i(1-\lambda) - 1\right] + i\left[1 + i(1-\lambda)\right] &= 0 \\
(1-\lambda)\left[(1-\lambda)^2 - 1\right] - 2(1-\lambda) &= 0 \\
(1-\lambda)\left[(1-\lambda)^2 - 3\right] &= 0\,,
\end{aligned}$$

che ha le tre soluzioni distinte

$$\lambda_0 = 1\,, \qquad \lambda_\pm = 1 \pm \sqrt{3}\,.$$

L'assenza di degenerazione, ovvero il fatto che i tre autovalori siano diversi, unitamente all'hermitianità dell'operatore, implica che gli autovettori siano ortogonali. Ciò è anche conseguenza della normalità dell'operatore.
L'autovettore relativo all'autovalore $\lambda_0 = 1$ si ottiene dal sistema omogeneo

$$\begin{pmatrix} 0 & i & -i \\ -i & 0 & i \\ i & -i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ponendo $x_0 = 1$, dalla seconda e terza equazione si ottengono le componenti y_0 e z_0, che sono

$$\begin{aligned}
-x_0 + z_0 = 0 \qquad &\Rightarrow \qquad z_0 = x_0 = 1\,, \\
x_0 - y_0 = 0 \qquad &\Rightarrow \qquad y_0 = x_0 = 1\,.
\end{aligned}$$

Gli autovettori relativi agli autovalori $\lambda_\pm$ si ottengono dai sistemi

$$\begin{pmatrix} \mp\sqrt{3} & i & -i \\ -i & \mp\sqrt{3} & i \\ i & -i & \mp\sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_\pm \\ y_\pm \\ z_\pm \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Posti $x_\pm = 1$, dalle prime due equazioni si hanno i due sistemi 2×2

$$\begin{cases} \quad iy_\pm - iz_\pm = \pm\sqrt{3} \\ \mp\sqrt{3}y_\pm + iz_\pm = i \end{cases},$$

le cui soluzioni sono

$$y_\pm = \frac{\det\begin{pmatrix} \pm\sqrt{3} & -i \\ i & i \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} i & -i \\ \mp\sqrt{3} & i \end{pmatrix}} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{-1 \mp i\sqrt{3}} = \frac{\left(-1 \pm i\sqrt{3}\right)^2}{4} = \frac{-1 \mp i\sqrt{3}}{2} = e^{\mp 2i\pi/3}\,,$$

$$z_\pm = \frac{\det\begin{pmatrix} i & \pm\sqrt{3} \\ \mp\sqrt{3} & i \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} i & -i \\ \mp\sqrt{3} & i \end{pmatrix}} = \frac{-1+3}{-1 \mp i\sqrt{3}} = \frac{2\left(-1 \pm i\sqrt{3}\right)}{4} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} = e^{\pm 2i\pi/3}\,.$$

Ne consegue che gli autovettori normalizzati hanno le rappresentazioni

$$v_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\,, \qquad v_\pm = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ e^{\mp 2i\pi/3} \\ e^{\pm 2i\pi/3} \end{pmatrix}\,.$$

La decomposizione spettrale dell'operatore $\hat{H}$ ha la forma

$$\hat{H} = \lambda_0 \hat{P}_0 + \lambda_+ \hat{P}_+ + \lambda_- \hat{P}_-\,,$$

dove i tre operatori dell'insieme $\{\hat{P}_0, \hat{P}_+, \hat{P}_-\}$ sono proiettori ortogonali, tali che

$$\hat{P}_0 + \hat{P}_+ + \hat{P}_- = \hat{I}\,.$$

Nel caso di operatori normali, i proiettori sono definiti in termini dai prodotti ket-bra degli autovettori, per cui si ha

$$\hat{H} = \lambda_0 |v_0\rangle\langle v_0| + \lambda_+ |v_+\rangle\langle v_+| + \lambda_- |v_-\rangle\langle v_-|\,,$$

ovvero $\hat{P}_{0,+,-} = |v_{0,+,-}\rangle\langle v_{0,+,-}|$, dove $|v_{0,+,-}\rangle \in E_3$ indica il vettore la cui rappresentazione rispetto alla base ortonormale $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^3$ è data dai vettori $v_{0,+,-}$, si ha cioè: $|v_{0,+,-}\rangle \overset{e}{\hookleftarrow} v_{0,+,-}$. Le matrici che rappresentano i proiettori hanno elementi

$$\left(P_{0,+,-}\right)^k_{\ j} = \langle e_k|\hat{P}_{0,+,-}|e_j\rangle = \langle e_k|v_{0,+,-}\rangle\langle v_{0,+,-}|e_j\rangle = v^k_{0,+,-}\left(v^j_{0,+,-}\right)^*\,, \qquad k,j \in \{1,2,3\}\,,$$

dove $v^l_{0,+,-}$, con $l = 1,2,3$, indica la l-esima componente contro-variante del vettore $v_{0,+,-}$, quindi si hanno le forme esplicite

$$P_0 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\,, \qquad P_+ = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & e^{2i\pi/3} & e^{-2i\pi/3} \\ e^{-2i\pi/3} & 1 & e^{-4i\pi/3} \\ e^{2i\pi/3} & e^{4i\pi/3} & 1 \end{pmatrix}\,, \qquad P_- = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & e^{-2i\pi/3} & e^{2i\pi/3} \\ e^{2i\pi/3} & 1 & e^{4i\pi/3} \\ e^{-2i\pi/3} & e^{-4i\pi/3} & 1 \end{pmatrix}\,.$$

Per ottenere le espressioni dei proiettori in funzione dell'operatore $\hat{H}$, usiamo i polinomi di secondo grado dell'insieme $\{p_\sigma(x)\}^3_{\sigma=0,+,-}$, definiti in termini degli autovalori come

$$p_0(x) = \frac{(x-\lambda_+)(x-\lambda_-)}{(\lambda_0-\lambda_+)(\lambda_0-\lambda_-)}\,, \qquad p_+(x) = \frac{(x-\lambda_0)(x-\lambda_-)}{(\lambda_+-\lambda_0)(\lambda_+-\lambda_-)}\,, \qquad p_-(x) = \frac{(x-\lambda_0)(x-\lambda_+)}{(\lambda_--\lambda_0)(\lambda_--\lambda_+)}\,.$$

Infatti le decomposizioni spettrali degli operatori ottenuti valutando i polinomi sull'operatore $\hat{H}$ sono

$$\hat{p}_0\left(\hat{H}\right) = \underbrace{p_0(\lambda_0)}_{=1}\hat{P}_0 + \underbrace{p_0(\lambda_+)}_{=0}\hat{P}_+ + \underbrace{p_0(\lambda_-)}_{=0}\hat{P}_- = \hat{P}_0\,, \qquad \hat{p}_+\left(\hat{H}\right) = \hat{P}_+\,, \qquad \hat{p}_-\left(\hat{H}\right) = \hat{P}_-\,,$$

dove abbiamo considerato la derivazione completa del risultato solo nel primo caso, il secondo ed il terzo si ottengono seguendo lo stesso procedimento. Le espressioni esplicite degli operatori di proiezione in funzione dell'operatore $\hat{H}$ sono

$$\hat{P}_0 = \hat{p}_0\left(\hat{H}\right) = \frac{\left(\hat{H}-\lambda_+\hat{I}\right)\left(\hat{H}-\lambda_-\hat{I}\right)}{(\lambda_0-\lambda_+)(\lambda_0-\lambda_-)} = \frac{\left(\hat{H}-\hat{I}\right)^2 - 3\hat{I}}{-3} = \frac{-\hat{H}^2 + 2\hat{H} + 2\hat{I}}{3}\,,$$

$$\hat{P}_\pm = \hat{p}_\pm\left(\hat{H}\right) = \frac{\left(\hat{H}-\lambda_0\hat{I}\right)\left(\hat{H}-\lambda_\mp\hat{I}\right)}{\pm(\lambda_\pm-\lambda_0)(\lambda_+-\lambda_-)} = \frac{\left(\hat{H}-\hat{I}\right)^2 \pm \sqrt{3}\left(\hat{H}-\hat{I}\right)}{6} = \frac{\hat{H}^2 - \hat{H}(2\mp\sqrt{3}) + \hat{I}(1\mp\sqrt{3})}{6}\,.$$

QUINTO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 15/30)

Dopo aver calcolato $(f*g)(x)$, ovvero la convoluzione delle funzioni

$$f(x)=\left\{\begin{array}{ll}1 & x\in(0,1)\\ 0 & x\notin(0,1)\end{array}\right. ,\qquad g(x)=\left\{\begin{array}{ll}e^{-x} & x\in(0,\infty)\\ 0 & x\notin(0,\infty)\end{array}\right. ,$$

usando il teorema della convoluzione delle trasformate di Fourier, si verifichi che il risultato coincide con quello che si ottiene dal calcolo diretto.

SOLUZIONE DEL QUINTO PROBLEMA

L'identità del teorema della convoluzione è

$$\mathscr{F}_k[f*g]=\sqrt{2\pi}\,\mathscr{F}_k[f]\,\mathscr{F}_k[g]\,,$$

da cui è possibile ottenere la convoluzione $(f*g)(x)$ come anti-trasformata del prodotto delle trasformate di Fourier moltiplicato per $\sqrt{2\pi}$, cioè

$$(f*g)(x)=\sqrt{2\pi}\,\mathscr{F}_{-x}\left[\mathscr{F}_k[f]\,\mathscr{F}_k[g]\right].$$

Le trasformate di Fourier delle funzioni $f(x)$ e $g(x)$ sono

$$\begin{aligned}\mathscr{F}_k[f]&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^1 e^{-ikx}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1-e^{-ik}}{ik}\,,\\ \mathscr{F}_k[g]&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{-x(ik+1)}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{ik+1}\,.\end{aligned}$$

Ne consegue che la convoluzione si ottiene come

$$(f*g)(x)=\sqrt{2\pi}\,\mathscr{F}_{-x}\left[\mathscr{F}_k[f]\,\mathscr{F}_k[g]\right]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-e^{-ik}}{ik(ik+1)}e^{ikx}dk=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ik}-1}{k(k-i)}e^{ikx}dk\,.$$

La funzione integranda ha una singolarità eliminabile nell'origine $k=0$, infatti

$$\frac{e^{-ik}-1}{k(k-i)}e^{ikx}=\frac{e^{-ik/2}-e^{ik/2}}{k(k-i)}e^{ik(x-1/2)}=\frac{-2i\,\mathrm{sen}(k/2)}{k(k-i)}e^{ik(x-1/2)}\xrightarrow[k\to 0]{}1\,.$$

È quindi possibile deformare con continuità il percorso d'integrazione intorno all'origine, ad esempio

$$(-\infty,\infty)\to\Gamma=(-\infty,-\epsilon]\cup\left\{k:k=\epsilon e^{i\theta},\theta\in[\pi,2\pi]\right\}\cup[\epsilon,\infty)\,,$$

dove Γ rappresenta l'asse reale "dentato" intorno all'origine con una semicirconferenza di raggio ϵ immersa nel semipiano delle parti immaginarie negative. L'integrale sull'asse reale coincide con quello sul percorso Γ e si ha

$$\begin{aligned}(f*g)(x)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ik}-1}{k(k-i)}e^{ikx}dk=\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma\frac{e^{-ik}-1}{k(k-i)}e^{ikx}dk\\ &=\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma\frac{e^{ik(x-1)}}{k(k-i)}dk-\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma\frac{e^{ikx}}{k(k-i)}dk\equiv T(x-1)-T(x)\,,\end{aligned}$$

dove abbiamo definito la funzione

$$T(x)=\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma\frac{e^{ikx}}{k(k-i)}dk\,.$$

Calcoliamo l'integrale che definisce la funzione $T(x)$ usando il lemma di Jordan, ovvero chiudendo il percorso d'integrazione con un arco centrato nell'origine, di raggio infinito, immerso nel semipiano delle parti immaginarie positive o negative a seconda che si abbia, rispettivamente, $x>0$ ovvero $x<0$.

La funzione integranda ha due poli semplici in $k = 0$ e $k = i$, entrambi sono avvolti dal solo percorso chiuso con l'arco infinito in $\text{Im}(k) > 0$, ne consegue che

$$T(x) = \begin{cases} 2i\pi\left(\text{Res}\left[\frac{e^{ikx}}{2\pi k(k-i)}, 0\right] + \text{Res}\left[\frac{e^{ikx}}{2\pi k(k-i)}, i\right]\right) = e^{-x} - 1 & x > 0 \\ \\ 0 & x < 0 \end{cases},$$

da cui, ovviamente,

$$T(x-1) = \begin{cases} e^{-x+1} - 1 & x > 1 \\ \\ 0 & x < 1 \end{cases}.$$

La convoluzione, data dalla differenza tra le due funzioni, è

$$(f * g)(x) = T(x-1) - T(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \\ 1 - e^{-x} & 0 < x < 1 \\ \\ e^{-x+1} - e^{-x} & x \geq 1 \end{cases},$$

dove abbiamo incluso anche le uguaglianze della variabile x allo zero e all'unità nella prima e terza legge in quanto, per questi valori di x, le espressione sono raccordate con continuità.
Il calcolo diretto può essere fatto usando la funzione gradino $\theta(x)$ di Heaviside nelle definizioni di $f(x)$ e $g(x)$, ovvero

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & x \in (0,1) \\ 0 & x \notin (0,1) \end{array} \right\} = \theta(x)\theta(1-x),$$
$$g(x) = \left\{ \begin{array}{ll} e^{-x} & x \in (0,\infty) \\ 0 & x \notin (0,\infty) \end{array} \right\} = e^{-x}\theta(x).$$

L'integrale della convoluzione è

$$\begin{aligned}(f * g)(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x-x')f(x')dx' = \int_{-\infty}^{\infty} \theta(x-x')\theta(x')\theta(1-x')e^{-x+x'}dx' \\ &= \theta(x)e^{-x}\int_0^{\min\{x,1\}} e^{x'}dx',\end{aligned}$$

dove la funzione gradino $\theta(x)$ considera l'annullamento dell'integrale e quindi della convoluzione per $x < 0$. Infatti, in questo caso, l'intersezione dei domini in cui le funzioni θ dell'integranda sono uguali ad uno è l'insieme vuoto. Il risultato dell'integrale, che si ottiene nei tre sotto-intervalli dell'asse reale definiti dai due valori della variabile x' d'integrazione in cui si annullano gli argomenti delle funzioni a gradino $\theta(x')$ e $\theta(1-x')$, è

$$(f * g)(x) = \theta(x)e^{-x}\int_0^{\min\{x,1\}} e^{x'}dx' = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \\ e^{-x}\int_0^x e^{x'}dx' = 1 - e^{-x} & 0 < x < 1 \\ \\ e^{-x}\int_0^1 e^{x'}dx' = e^{-x+1} - e^{-x} & x \geq 1 \end{cases}$$

e coincide con quello ottenuto usando il teorema della convoluzione.

Sesto problema (punteggio massimo: 15/30)

Si determinino la matrice A, 4×4 e i vettori 4×1 dell'insieme $\{v_k\}_{k=1}^4$, che rappresentano rispettivamente l'operatore hermitiano e non degenere $\hat{A}$, definito in una spazio di Hilbert di dimensione 4, e i sui autovettori, rispetto alla base ortonormale $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^4$, sapendo che:

- tre degli autovalori dell'operatore $\hat{A}$ sono

$$\lambda_1 = 3\,, \qquad \lambda_2 = 1\,, \qquad \lambda_3 = -1\,;$$

- i proiettori ad essi corrispondenti sono rappresentati, rispetto alla base ortonormale $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^4$, dalle matrici

$$P_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -i & 0 \\ 0 & i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad P_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & i & 0 \\ 0 & -i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

- si ha $\operatorname{Tr}\left(\hat{A}^4\right) = 164$.

Soluzione del sesto Problema

Poiché l'operatore è hermitiano, è quindi normale e diagonalizzabile, si ha la decomposizione spettrale

$$\hat{A} = \sum_{k=1}^{4} \lambda_k \hat{P}_k \overset{e}{\hookleftarrow} A = \sum_{k=1}^{4} \lambda_k P_k\,,$$

sia in forma operatoriale che in rappresentazione matriciale rispetto alla base ortonormale data. Usando il teorema spettrale, per la matrice A^4, che rappresenta l'operatore $\hat{A}^4$, si ha la decomposizione

$$A^4 = \sum_{k=1}^{4} \lambda_k^4 P_k\,.$$

Ovvero lo spettro discreto dell'operatore $\hat{A}^4$ è $\left\{\lambda_k^4\right\}_{k=1}^4$, ne consegue che la traccia non è altro che la somma delle quarte potenze degli autovalori, cioè

$$\operatorname{Tr}\left(\hat{A}^4\right) = \sum_{k=1}^{4} \lambda_k^4 = 164\,,$$

quindi, il quarto autovalore è una delle quattro radice quarte

$$\lambda_4 = \left(164 - \sum_{k=1}^{3} \lambda_k^4\right)^{1/4} = (164 - 1 - 1 - 81)^{1/4} = 81^{1/4}\,.$$

L'operatore è hermitiano, possiede quindi solo autovalori reali, delle quattro radici quarte soltanto le due reali $\lambda_4 = \pm 3$ possono essere elementi dello spettro discreto. Quest'ultimo contiene già l'autovalore $\lambda_1 = 3$, ne consegue che, poiché l'operatore è non degenere, ha cioè solo autovalori distinti, l'unica possibilità per il quarto autovalore è $\lambda_4 = -3$.
I quattro proiettori della decomposizione spettrale sono ortogonali e hanno somma pari all'identità, il quarto proiettore può essere ottenuto dai primi tre come

$$\hat{P}_4 = \hat{I} - \sum_{k=1}^{3} \hat{P}_k \quad \overset{e}{\hookleftarrow} \quad P_4 = I - \sum_{k=1}^{3} P_k = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Usando la decomposizione spettrale, la matrice che rappresenta l'operatore $\hat{A}$ è

$$A=\sum_{k=1}^{4}\lambda_k P_k=\frac{3}{2}\begin{pmatrix}1&0&0&-i\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\i&0&0&1\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&1&-i&0\\0&i&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&1&i&0\\0&-i&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}-\frac{3}{2}\begin{pmatrix}1&0&0&i\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\-i&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}0&0&0&-3i\\0&0&-i&0\\0&i&0&0\\3i&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Le componenti degli autovettori si ottengono come soluzioni dei quattro sistemi omogenei

$$\begin{pmatrix}-\lambda_k&0&0&-3i\\0&-\lambda_k&-i&0\\0&i&-\lambda_k&0\\3i&0&0&-\lambda_k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_k^1\\v_k^2\\v_k^3\\v_k^4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix},\qquad k=1,2,3,4,$$

dove v_k^j, con $k,j\in\{1,2,3,4\}$, rappresenta la j-esima componente contro-variante del k-esimo autovettore. Ciascuno dei quattro sistemi 4×4 può essere suddiviso in due sistemi 2×2 disgiunti, il primo dei quali, composto dalla prima e quarta equazione, ha come incognite la prima e la quarta componente; il secondo composto dalla seconda e terza, invece, ha come incognite la seconda e la terza componente. Dai due sistemi 2×2 si hanno le condizioni

$$\left(\lambda_k^2-9\right)v_k^1=\left(\lambda_k^2-9\right)v_k^4=0,\qquad \left(\lambda_k^2-1\right)v_k^2=\left(\lambda_k^2-1\right)v_k^3=0,$$

che, avendo $\lambda_{1,4}=\pm 3$ e $\lambda_{2,3}=\pm 1$, implicano

$$v_2^1=v_3^1=v_2^4=v_3^4=v_1^2=v_4^2=v_1^3=v_4^3=0.$$

Per il primo e il quarto autovettore v_1 e v_4, che hanno la seconda e la terza componente nulla, poniamo $v_1^1=v_4^1=1$ e dalla prima equazione otteniamo $v_1^4=i$ e $v_4^4=-i$, quindi

$$v_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\i\end{pmatrix},\qquad v_4=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-i\end{pmatrix}.$$

Allo stesso modo, per il secondo e il terzo autovettore v_2 e v_3, che hanno, invece, la prima e la seconda componente nulla, poniamo $v_2^2=v_3^2=1$ e dalla seconda equazione otteniamo $v_2^3=i$ e $v_3^3=-i$, quindi

$$v_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\i\\0\end{pmatrix},\qquad v_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\-i\\0\end{pmatrix}.$$