Metodi Matematici per la Fisica

Prova scritta - 29 aprile 2016

Si risolvano cortesemente i seguenti problemi.

Primo problema (punteggio: 6/30)

Si calcoli l'integrale in valore principale

$$P = \mathrm{Pr}\int_Q \frac{\mathrm{sen}(\sqrt{2}\pi z)}{1+z^4}dz\,,$$

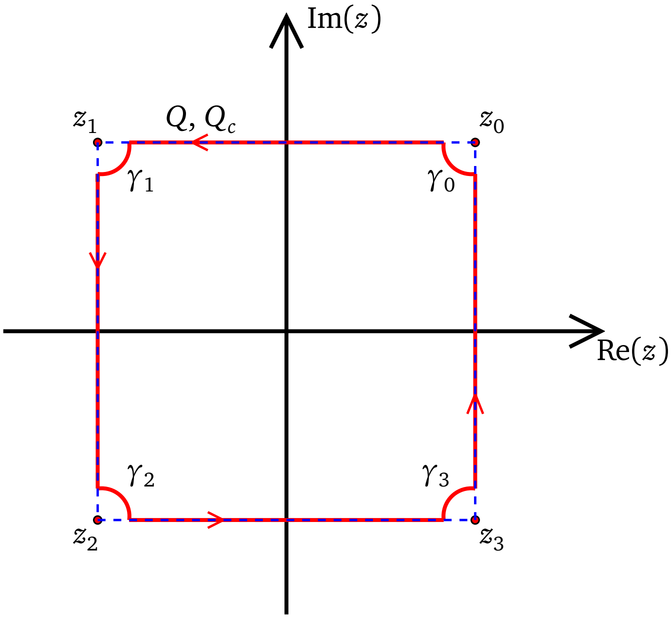
dove Q è il quadrato centrato nell'origine con i lati paralleli agli assi e diagonale di lunghezza 2.

Soluzione del primo problema

La funzione integranda ha i quattro poli semplici

$$z_k = e^{i\pi(1+2k)/4}\,, \qquad k = 0,1,2,3\,.$$

Consideriamo il quadrato dentato internamente Q_c, mostrato in figura in rosso, che si ottiene da quello di integrazione Q, linea blu tratteggiata, escludendo i vertici $\{z_k\}_{k=0}^3$, che coincidono con i poli dell'integranda.



Indicando con γ_k l'arco di circonferenza centrato in z_k, con angolo sotteso $\pi/2$ e raggio ϵ, come mostrato in figura, si ha che l'integrale su Q_c è nullo in quanto il percorso non contiene singolarità dell'integranda, inoltre

$$0 = \lim_{\epsilon\to 0}\oint_{Q_c} \frac{\mathrm{sen}(\sqrt{2}\pi z)}{1+z^4}dz = \mathrm{Pr}\int_Q \frac{\mathrm{sen}(\sqrt{2}\pi z)}{1+z^4}dz + \sum_{k=0}^{3}\lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\gamma_k} \frac{\mathrm{sen}(\sqrt{2}\pi z)}{1+z^4}dz = P - i\frac{\pi}{2}\sum_{k=0}^{3}A_k\,,$$

ovvero, l'integrale cercato si ottiene come

$$P = i\frac{\pi}{2}\sum_{k=0}^{3} A_k\,,$$

dove i valori A_k sono i limiti uniformi

$$A_k = \lim_{\epsilon\to 0}(z - z_k)\frac{\text{sen}(\sqrt{2}\pi\, z)}{1+z^4} = \frac{\text{sen}(\sqrt{2}\pi\, z_k)}{4z_k^3} = \frac{z_k^{-3}\text{sen}(\sqrt{2}\pi\, z_k)}{4}\,, \qquad k = 0,1,2,3\,.$$

Per calcolare gli A_k usiamo le rappresentazioni cartesiane dei numeri complessi z_k, nonché le relazioni di simmetria, cioè

$$z_0 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\,, \qquad z_1 = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}\,, \qquad z_2 = \frac{-1-i}{\sqrt{2}} = -z_0\,, \qquad z_3 = \frac{1-i}{\sqrt{2}} = -z_1\,,$$

da cui si ottiene

$$z_k^{-3} = e^{-3i\pi(1+2k)/4} = e^{-3i\pi/4}e^{-3ik\pi/2} = e^{-3i\pi/4}\begin{cases} 1 & k=0 \\ i & k=1 \\ -1 & k=2 \\ -i & k=3 \end{cases}\,.$$

Sfruttando questi risultati l'integrale P può essere calcolato come segue

$$\begin{aligned} P &= i\frac{\pi}{2}\sum_{k=0}^{3}A_k = \frac{i\pi e^{-3i\pi/4}}{8}\left[2\text{sen}(\sqrt{2}\pi z_0) + 2i\,\text{sen}(\sqrt{2}\pi z_1)\right] = \frac{i\pi e^{-3i\pi/4}}{4}\left[\text{sen}(\pi + i\pi) + i\,\text{sen}(-\pi + i\pi)\right] \\ &= \frac{\pi e^{-3i\pi/4}\text{senh}(\pi)}{4}(1+i) = \frac{\pi e^{-3i\pi/4}\text{senh}(\pi)}{4}\sqrt{2}e^{i\pi/4}\,, \end{aligned}$$

si ha quindi il risultato finale

$$P = -\frac{i\pi\,\text{senh}(\pi)}{2\sqrt{2}}\,.$$

Secondo problema (punteggio 6/30)

Si dimostri l'identità

$$\binom{n}{m} = \frac{1}{2i\pi}\oint_{|z|=1}\frac{(z+1)^n}{z^{m+1}}dz\,,$$

valida $\forall n, m \in \mathbb{N}$, con $n \geq m$.
Facendo uso di questo risultato si calcoli la somma della serie

$$S = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{2k+1}{k}\frac{1}{6^k}\,.$$

Soluzione del secondo problema

L'identità cercata si dimostra facendo uso della formula integrale di Cauchy per le derivate, ovvero, $\forall\, k \in \mathbb{N}$,

$$\left.\frac{d^k f}{dz^k}\right|_{z=z_0} = \frac{k!}{2i\pi}\oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}dz\,,$$

dove $f(z)$ è analitica in un intorno di z_0 e γ è una curva chiusa contenuta in tale intorno, con numero di avvolgimenti $n(\gamma, z_0) = 1$. Nel nostro caso si ha $f(z) = (z+1)^n$, quindi l'integrale è

$$\frac{1}{2i\pi}\oint_{|z|=1} \frac{(z+1)^n}{z^{m+1}}dz = \left.\frac{1}{m!}\frac{d^m}{dz^m}(z+1)^n\right|_{z=0}\,,$$

la derivata m-esima è

$$\begin{aligned}\frac{d^m}{dz^m}(z+1)^n &= \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}n(z+1)^{n-1} = \frac{d^{m-2}}{dz^{m-2}}n(n-1)(z+1)^{n-2} = \cdots = n(n-1)\cdots(n-m+1)(z+1)^{n-m}\\ &= \frac{n!}{(n-m)!}(z+1)^{n-m}\,, \qquad n-m \geq 0\,.\end{aligned}$$

Valutando tale derivata in $z = 0$, si ottiene l'indentità desiderata

$$\frac{1}{2i\pi}\oint_{|z|=1} \frac{(z+1)^n}{z^{m+1}}dz = \left.\frac{1}{m!}\frac{d^m}{dz^m}(z+1)^n\right|_{z=0} = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \binom{n}{m}\,.$$

Ne consegue che la serie può essere scritta sostituendo il coefficiente binomiale con l'espressione integrale che può essere estratto dalla somma grazie alla convergenza uniforme, ovvero si ha

$$S = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{2k+1}{k}\frac{1}{6^k} = \frac{1}{2i\pi}\oint_{|z|=1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z+1)^{2k+1}}{6^k z^{k+1}}dz = \frac{1}{2i\pi}\oint_{|z|=1}\frac{z+1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{(z+1)^2}{6z}\right)^k dz\,.$$

Quella che compare nell'integranda è una serie geometrica di ragione $(z+1)^2/(6z)$, che converge per tutti i valori di z tali che

$$\left|\frac{(z+1)^2}{6z}\right| < 1\,.$$

Verifichiamo che, sulla circonferenza unitaria $|z| = 1$, tale condizione è verificata, infatti

$$\left|\frac{(z+1)^2}{6z}\right| = \frac{|z+1|^2}{6} \leq \frac{2}{6} = \frac{1}{3}\,.$$

Ne consegue che

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2i\pi}\oint_{|z|=1}\frac{z+1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{(z+1)^2}{6z}\right)^k dz = \frac{1}{2i\pi}\oint_{|z|=1}\frac{z+1}{z}\frac{1}{1-\frac{(z+1)^2}{6z}}dz\\ &= \frac{3i}{\pi}\oint_{|z|=1}\frac{z+1}{(z+1)^2-6z}dz = \frac{3i}{\pi}\oint_{|z|=1}\frac{z+1}{z^2-4z+1}dz\\ &= \frac{3i}{\pi}\oint_{|z|=1}\frac{z+1}{(z-z_1)(z-z_2)}dz\,,\end{aligned}$$

dove i poli semplici $z_{1,2}$ sono

$$z_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}\,.$$

Solo z_2 è all'interno del cerchio unitario, infatti

$$|z_1| = 2+\sqrt{3} > 3\,, \qquad |z_2| = 2-\sqrt{3} < 1\,.$$

L'integrale può essere calcolato con il teorema dei residui

$$S = \frac{3i}{\pi}\oint_{|z|=1} \frac{z+1}{(z-z_1)(z-z_2)}dz = \frac{3i}{\pi}\,2i\pi\,\mathrm{Res}\left[\frac{z+1}{(z-z_1)(z-z_2)}, 2-\sqrt{3}\right] = -6\frac{z_2+1}{z_2-z_1} = \frac{3(3-\sqrt{3})}{\sqrt{3}}\,,$$

da cui

$$S = 3(\sqrt{3}-1)\,.$$

Terzo problema (punteggio 5/30)

Si dimostri che i coefficienti della serie di Laurent in $z=0$ della funzione

$$f(z) = \mathrm{sen}\left(z - \frac{1}{z}\right)\,,$$

sono

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{senh}(2\,\mathrm{sen}(t))\,\mathrm{sen}(kt)\,dt\,, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\,.$$

Soluzione del terzo problema

La funzione ha una singolarità essenziale nell'origine. Poichè dipende antisimmetricamente da z e z^{-1}, i coefficienti di Laurent verificheranno la condizione

$$c_k = -c_{-k}\,,$$

da cui si ha $c_0 = 0$. In generale, con $\gamma = \{z : |z| = 1\}$, e ponendo $z = e^{it}$, si ha

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2i\pi}\oint_\gamma \frac{\mathrm{sen}(z-1/z)}{z^{k+1}}dz = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{sen}(e^{it}-e^{-it})}{e^{ikt}}dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{sen}(2i\mathrm{sen}(t))}{e^{ikt}}dt = \frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{senh}(2\mathrm{sen}(t))\,e^{-ikt}dt\,. \end{aligned}$$

Infine, sfruttando la relazione di simmetria, si ottiene l'espressione cercata

$$c_k = \frac{c_k - c_{-k}}{2} = \frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{senh}(2\mathrm{sen}(t))\frac{e^{-ikt}-e^{ikt}}{2}dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{senh}(2\mathrm{sen}(t))\mathrm{sen}(kt)dt\,.$$

Quarto problema (punteggio 6/30)

Data la matrice

$$U = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\,,$$

si dimostri che è unitaria e si determini la matrice H che verifica la relazione

$$U = e^{iH}\,.$$

Che tipo di matrice è H?

Soluzione del quarto problema

Per dimostrare che U è una matrice unitaria è sufficiente osservare che i vettori ottenuti dalle tre colonne rappresentano un insieme ortonormale. Gli autovalori di U si ottengono come soluzioni dell'equazione caratteristica, che è l'equazione di terzo grado nella variabile a

$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2}-a & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}-a & 0 \\ 0 & 0 & 1-a \end{pmatrix} &= 0 \\ (1-a)\left[\left(a-1/\sqrt{2}\right)^2+1/2\right] &= 0\,,\end{aligned}$$

da cui si hanno i tre autovalori

$$a_1=1\,,\qquad a_{2,3}=\frac{1\pm i}{\sqrt{2}}\,.$$

Gli autovettori corrispondenti sono

$$u_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\qquad u_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\i\\0\end{pmatrix},\qquad u_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-i\\0\end{pmatrix},$$

e quindi la matrice diagonalizzante è

$$V=\begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & i/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Trasformando la matrice U con V si ha la rappresentazione diagonale, cioè

$$U_d=V^\dagger U V=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (1+i)/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & (1-i)/\sqrt{2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e^0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\pi/4} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\pi/4} \end{pmatrix}.$$

La versione diagonale della matrice H è

$$H_d=-i\ln(U_d)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pi/4 & 0 \\ 0 & 0 & -\pi/4 \end{pmatrix}.$$

Infine, la rappresentazione rispetto alla base canonica

$$H = VH_dV^\dagger=\begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & i/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pi/4 & 0 \\ 0 & 0 & -\pi/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & i/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}=\frac{i\pi}{4}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quinto problema (punteggio 6/30)

Si verifichi il principio di indeterminazione di Heisenberg per i due operatori di Pauli $\hat\sigma_1$, $\hat\sigma_2$ rispetto all'autostato $|\psi_1\rangle$ di $\hat\sigma_3$ relativo all'autovalore 1. Si usino le definizioni di valore di aspettazione e scarto quadratico medio che, per un operatore $\hat A$ rispetto ad un vettore $|v\rangle$, sono rispettivamente

$$\langle\hat A\rangle_v=\langle v|\hat A|v\rangle\,,\qquad \Delta A_v=\sqrt{\left\langle\left(\hat A-\hat I\langle\hat A\rangle_v\right)^2\right\rangle_v}\,.$$

Soluzione del quinto problema

Consideriamo la rappresentazione rispetto alla base di autovettori di $\hat{\sigma}_3$, ovvero

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \psi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dobbiamo verificare la diseguaglianza

$$(\Delta\sigma_1)_{\psi_1}(\Delta\sigma_2)_{\psi_1} \geq \frac{1}{2}\left|\left\langle[\sigma_1,\sigma_2]\right\rangle_{\psi_1}\right|.$$

Gli scarti quadratici medi sono

$$(\Delta\sigma_{1,2})_{\psi_1} = \left\langle\sigma_{1,2}^2\right\rangle_{\psi_1} - \left\langle\sigma_{1,2}\right\rangle_{\psi_1}^2 = \langle I\rangle_{\psi_1} - \left\langle\sigma_{1,2}\right\rangle_{\psi_1}^2 = 1 - \left\langle\sigma_{1,2}\right\rangle_{\psi_1}^2,$$

quindi

$$(\Delta\sigma_{1,2})_{\psi_1} = 1 - \left[(1\,0)\sigma_{1,2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]^2 = 1 - (\sigma_{1,2})_{11}^2 = 1.$$

Il valore di aspettazione del commutatore è

$$\left\langle[\sigma_1,\sigma_2]\right\rangle_{\psi_1} = \left\langle 2i\sigma_3\right\rangle_{\psi_1} = 2i\,(1\,0)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2i.$$

In definitiva si ottiene che la relazione cercata vale con il segno di uguaglianza, infatti

$$\begin{aligned}(\Delta\sigma_1)_{\psi_1}(\Delta\sigma_2)_{\psi_1} &\geq \frac{1}{2}\left|\left\langle[\sigma_1,\sigma_2]\right\rangle_{\psi_1}\right| \\ 1\cdot 1 &\geq \frac{1}{2}|2i| \\ 1 &\geq 1.\end{aligned}$$

Sesto problema (punteggio 6/30)

Si determini la funzione $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$ risolvendo l'equazione integrale

$$f(x) + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-y|} f(y)\,dy = e^{-|x|}.$$

Soluzione del sesto Problema

La trasformata di Fourier dell'equazione è

$$\tilde{f}(k) + \sqrt{2\pi}\,\mathscr{F}_k\left[e^{-|x|}\right]\tilde{f}(k) = \mathscr{F}_k\left[e^{-|x|}\right],$$

risolvendo per $\tilde{f}(k)$, si ha

$$\tilde{f}(k) = \frac{\mathscr{F}_k\left[e^{-|x|}\right]}{\sqrt{2\pi}\,\mathscr{F}_k\left[e^{-|x|}\right] + 1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi} + 1/\mathscr{F}_k\left[e^{-|x|}\right]}.$$

Usando nell'espressione precedente la trasformata di Fourier di $e^{-|x|}$

$$\mathscr{F}_k\left[e^{-|x|}\right] = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+k^2},$$

si ha

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} + (1+k^2)\sqrt{\pi/2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi/2}(k^2+3)}\,.$$

La soluzione $f(x)$ si ottiene facendo l'anti-trasformata della funzione $\tilde{f}(k)$, cioè

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ikx}}{k^2+3}dk = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ikx}}{k^2+3}dk = 2i\begin{cases} \dfrac{e^{-\sqrt{3}x}}{2i\sqrt{3}} & x>0 \\[2ex] -\dfrac{e^{\sqrt{3}x}}{-2i\sqrt{3}} & x<0 \end{cases}\,,$$

in definitiva

$$f(x) = \frac{e^{-\sqrt{3}|x|}}{\sqrt{3}}\,.$$