# Metodi Matematici per la Fisica

## Secondo appello estivo - 28 luglio 2025

Si risolvano cortesemente i seguenti problemi, sapendo che il punteggio assegnato a ciascuna procedura di risoluzione può variare tra lo zero e il massimo indicato ed è stabilito valutando:

1. la correttezza del risultato ottenuto e della procedura utilizzata;
2. la completezza dei passaggi riportati;
3. il livello di esemplificazione con cui sono espressi i risultati (ad esempio un risultato numerico reale non deve contenere l'unità immaginaria);
4. la correttezza del formalismo utilizzato;
5. la chiarezza dell'esposizione e la leggibilità del testo;
6. la bellezza e l'armonia del tutto.

## Primo problema (punteggio massimo: 6/30)

Si calcoli l'integrale

$$= \int_0^{2\pi} \frac{da}{\cos^4(a) + \operatorname{sen}^4(a)} .$$

**Curiosità**. L'immagine rappresenta una foggia di baffi detta *chevron*, in italiano gallone. Il gallone è originariamente un fregio architettonico, che ha la forma di una lettera lambda maiuscola, cioè Λ. Lo stesso simbolo è usato in araldica e per indicare i gradi nelle uniformi di eserciti e polizie. Tra i più famosi che hanno "indossato" baffi a gallone c'è l'indimenticato **Farrokh Bulsara**, mostrato in foto, nato a Zanzibar, il 5 settembre 1946 e morto a Londra il 24 novembre 1991, noto con il nome **Freddie Mercury**, compositore e cantante britannico di origini parsi, fondatore e uomo di punta del gruppo *rock* dei *Queen*.

## Soluzione del primo problema

Riscriviamo la funzione integranda usando le formule di Eulero per le funzioni coseno e seno, si ha

$$= 16 \int_0^{2\pi} \frac{da}{e^{4ia} + 4e^{2ia} + 6 + 4e^{-2ia} + e^{-4ia} + e^{4ia} - 4e^{2ia} + 6 - 4e^{-2ia} + e^{-4ia}} = 8 \int_0^{2\pi} \frac{da}{e^{4ia} + 6 + e^{-4ia}} .$$

Per integrare nel piano complesso, facciamo la sostituzione $e^{4ia} = z$, da cui: $a = -i \ln(z)/4$ e $da = -idz/(4z)$, il percorso d'integrazione nel piano complesso $z$ è la circonferenza unitaria descritta quattro volte, ovvero, quando $a$ varia da 0 a $2\pi$ la $z$ ruota quattro volte sulla circonferenza unitaria, quindi

$$= -8i \oint_{|z|_{\times 4}=1} \frac{dz/(4z)}{z + 6 + 1/z} = -2i \oint_{|z|_{\times 4}=1} \frac{dz}{z^2 + 6z + 1} ,$$

dove il simbolo "×4" a pedice del modulo della $z$ nell'indicazione del percorso d'integrazione specifica la quadruplice rotazione. La funzione integranda in questa forma ha due poli semplici in corrispondenza degli zeri del polinomio a denominatore, che sono

$$z_\pm = -3 \pm 2\sqrt{2} ,$$

solo $z_+ = -3+2\sqrt{2}$ è tale che $|z_+| = 3-2\sqrt{2} < 1$ è avvolto dal percorso, mentre $z_-$, avendo modulo $|z_-| = 3+2\sqrt{2} > 1$ è esterno al disco unitario e quindi non è avvolto. Usando il teorema dei residui si ha

$$= -2i \cdot 4 \cdot 2i\pi \operatorname{Res}\left[\frac{1}{z^2 + 6z + 1}, z_+\right] = 16\pi \frac{1}{2z_+ + 6} = 16\pi \frac{1}{-6 + 4\sqrt{2} + 6} ,$$

dove il fattore quattro, che è stato scientemente evidenziato dai e tra i puntini moltiplicatori, è dovuto ai quattro giri della circonferenza unitaria. Il risultato finale è

$$= 2\sqrt{2}\,\pi\,.$$

## Secondo problema (punteggio massimo: 7/30)

Si ottenga la serie di Mittag-Leffler della funzione

$$f(z) = \frac{z}{\operatorname{sen}(z) - 2}\,.$$

## Soluzione del secondo problema

La funzione è meromorfa, ha poli semplici in corrispondenza dei valori dell'insieme $\{z_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ tali che

$$\operatorname{sen}(z_k) - 2 = 0\,.$$

Usando la formula di Eulero per la funzione seno, manipoliamo l'equazione come segue

$$\begin{aligned}
e^{iz} - e^{-iz} - 4i &= 0\\
e^{2iz} - e^{iz}4i - 1 &= 0\\
e^{iz^{\pm}} &= i\left(2 \mp \sqrt{3}\right) \qquad \Rightarrow \qquad e^{iz_k^{\pm}} = e^{i\pi(1/2+2k)+\ln\left(2\mp\sqrt{3}\right)} = e^{i\left(\pi(1/2+2k)-i\ln\left(2\mp\sqrt{3}\right)\right)}\,, \qquad \forall\, k \in \mathbb{Z}\,.
\end{aligned}$$

Inoltre, poiché

$$\frac{1}{2\pm\sqrt{3}} = 2 \mp \sqrt{3} \qquad \Rightarrow \qquad \ln\left(2-\sqrt{3}\right) = -\ln\left(2+\sqrt{3}\right)\,,$$

poniamo i poli nella forma

$$z_k^{\pm} = \pi\left(\frac{1}{2} + 2k\right) \pm i\ln\left(2+\sqrt{3}\right)\,, \qquad \forall\, k \in \mathbb{Z}\,.$$

I residui sono

$$R_k^{\pm} = \operatorname{Res}\left[\frac{z}{\operatorname{sen}(z)-2}, z_k^{\pm}\right] = \lim_{z\to z_k^{\pm}} \frac{z}{\operatorname{sen}(z)-2}\left(z - z_k^{\pm}\right) = \frac{z_k^{\pm}}{\cos\left(z_k^{\pm}\right)}\,, \qquad \forall\, k \in \mathbb{Z}\,,$$

la funzione coseno valutata in $z_k^{\pm}$ vale

$$\begin{aligned}
\cos\left(z_k^{\pm}\right) &= \frac{e^{iz_k^{\pm}} + e^{-iz_k^{\pm}}}{2} = \frac{e^{i\pi(1/2+2k)\mp\ln\left(2+\sqrt{3}\right)} + e^{-i\pi(1/2+2k)\pm\ln\left(2+\sqrt{3}\right)}}{2}\\
&= i\,\frac{\left(2+\sqrt{3}\right)^{\mp1} - \left(2+\sqrt{3}\right)^{\pm1}}{2} = i\,\frac{\left(2\mp\sqrt{3}\right) - \left(2\pm\sqrt{3}\right)}{2} = \mp i\sqrt{3}\,,
\end{aligned}$$

lo stesso risultato, a meno dell'ordine dei segni, può essere ottenuto dalla relazione

$$\cos\left(z_k^{\pm}\right) = \pm\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\left(z_k^{\pm}\right)}\,,$$

sapendo che $\operatorname{sen}\left(z_k^{\pm}\right) = 2$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$. Ne consegue che i residui valgono

$$R_k^{\pm} = \pm i\,\frac{z_k^{\pm}}{\sqrt{3}} = \frac{-\ln\left(2+\sqrt{3}\right) \pm i\,(1/2+2k)}{\sqrt{3}}\,, \qquad \forall\, k \in \mathbb{Z}\,.$$

Si evince che sia i poli che i residui "+" sono i complessi coniugati degli omologhi "−", ovvero

$$\left(z_k^-\right)^* = z_k^+\,, \qquad \left(R_k^-\right)^* = R_k^+\,, \qquad\qquad \forall\, k \in \mathbb{Z}\,.$$

Lo sviluppo di Mittag-Leffler ha la forma

$$f(z) = \phi(z) + \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left( \frac{R_k^+}{z - z_k^+} + \frac{R_k^-}{z - z_k^-} \right),$$

dove la funzione $\phi(z)$ è la parte intera della funzione data e ne ha lo stesso comportamento asintotico. Per studiarlo, consideriamo due casi. Nel primo la $z$ diverge al di fuori dell'asse reale, quindi, quando $z \to \infty$, si ha $\mathrm{Im}(z) = y \to \pm\infty$. Nel secondo, la $z$ diverge lungo l'asse reale, cioè $z = \mathrm{Re}(z) = x \to \pm\infty$. Consideriamo il comportamento del modulo della funzione $f(z)$ nel primo caso, ponendo $z = x + iy$ ed evitando i poli dell'insieme $\left\{z_k^\pm\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$,

$$\left| \frac{z}{\mathrm{sen}(z) - 2} \right| = \frac{|z|}{|\,\mathrm{sen}(x)\cosh(y) + i\cos(x)\,\mathrm{senh}(y) - 2|} \underset{|y|\to\infty}{\sim} \frac{|z|}{\left|\,\mathrm{sen}(x)e^{|y|} \pm i\cos(x)e^{|y|}\right|} \underset{|y|\to\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

Nel secondo caso, invece, $z$ è reale, cioè

$$\left| \frac{z}{\mathrm{sen}(z) - 2} \right| = \left| \frac{x}{\mathrm{sen}(x) - 2} \right| \underset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} \infty\,.$$

La divergenza è al più quella di un polinomio di primo grado, infatti a numeratore c'è la sola $x$, quindi un polinomio di primo grado, mentre il denominatore oscilla tra $-3$ e $-1$ senza mai annullarsi. Alla luce di questo risultato, poniamo la funzione intera $\phi(z)$ uguale al polinomio di primo grado

$$\phi(z) = a + bz\,,$$

con i coefficienti $a$ e $b$ da determinare.
Per ottenere il valore del coefficiente $a$, valutiamo la funzione e lo sviluppo di Mittag-Leffler nell'origine, si ha

$$f(0) = 0 = \phi(0) + \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left( \frac{R_k^+}{-z_k^+} + \frac{R_k^-}{-z_k^-} \right) = a + \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left( \frac{R_k^+}{-z_k^+} + \frac{R_k^-}{-z_k^-} \right),$$

da cui

$$a = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left( \frac{R_k^+}{z_k^+} + \frac{R_k^-}{z_k^-} \right).$$

Poiché si hanno le relazioni

$$\left(z_k^-\right)^* = z_k^+\,, \qquad \left(R_k^-\right)^* = R_k^+\,, \qquad\qquad \forall\, k \in \mathbb{Z}\,,$$

i due numeri $R_k^+/z_k^+$ e $R_k^-/z_k^-$ sono l'uno il complesso coniugato dell'altro, quindi

$$a = 2\sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{Re}\left( \frac{R_k^+}{z_k^+} \right).$$

Ma abbiamo anche ottenuto che i residui sono proporzionali ai poli corrispondenti e si ha

$$R_k^\pm = \pm i \frac{z_k^\pm}{\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad \frac{R_k^\pm}{z_k^\pm} = \pm \frac{i}{\sqrt{3}},, \qquad\qquad \forall\, k \in \mathbb{Z}\,,$$

quindi tutti i rapporti $R_k^+/z_k^+$ sono immaginari puri, hanno parte reale nulla, per cui è nullo anche il valore del coefficiente $a$, cioè

$$a = 2\sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{Re}\left( \frac{R_k^+}{z_k^+} \right) = 0\,.$$

Otteniamo il coefficiente $b$ valutando la funzione e lo sviluppo di Mittag-Leffler in $z=\pi/2$, si ha

$$
\begin{aligned}
f(\pi/2) = -\frac{\pi}{2} = b\frac{\pi}{2} + \sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(\frac{R_k^+}{\pi/2-z_k^+} + \frac{R_k^-}{\pi/2-z_k^-}\right) &= b\frac{\pi}{2} + \sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(\frac{R_k^+}{\pi/2-z_k^+} + \frac{\left(R_k^+\right)^*}{\pi/2-\left(z_k^+\right)^*}\right) \\
= b\frac{\pi}{2} + \sum_{k\in\mathbb{Z}}\left[\frac{R_k^+}{\pi/2-z_k^+} + \left(\frac{R_k^+}{\pi/2-z_k^+}\right)^*\right] &= b\frac{\pi}{2} + 2\,\mathrm{Re}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{R_k^+}{\pi/2-z_k^+}\right),
\end{aligned}
$$

da cui

$$
b = -1 - \frac{4}{\pi}\,\mathrm{Re}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{R_k^+}{\pi/2-z_k^+}\right).
$$

Riscriviamo la serie usando le espressioni esplicite dei poli e dei residui e la loro relazione di proporzionalità, si ha

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Re}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{R_k^+}{\pi/2-z_k^+}\right) &= \mathrm{Re}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{R_k^+\left(\pi/2-\left(z_k^+\right)^*\right)}{\left|\pi/2-z_k^+\right|^2}\right) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{iz_k^+\left(\pi/2-\left(z_k^+\right)^*\right)/\sqrt{3}}{\left|\pi/2-z_k^+\right|^2}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{Re}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{iz_k^+\pi/2-i\left|z_k^+\right|^2}{\left|\pi/2-z_k^+\right|^2}\right) = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{-\mathrm{Im}(z_k^+)}{\left|\pi/2-z_k^+\right|^2} \\
&= \frac{\pi}{2\sqrt{3}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{-\ln\left(2+\sqrt{3}\right)}{(2k\pi)^2+\ln^2\left(2+\sqrt{3}\right)} \\
&= -\frac{\pi\ln\left(2+\sqrt{3}\right)}{2\sqrt{3}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{1}{4\pi^2k^2+\ln^2\left(2+\sqrt{3}\right)}.
\end{aligned}
$$

Calcoliamo la somma della serie con il metodo dei residui, definiamo la funzione di lavoro

$$
s(z) = \frac{\pi\cos(\pi z)}{\mathrm{sen}(\pi z)}\frac{1}{4\pi^2z^2+\ln^2\left(2+\sqrt{3}\right)},
$$

che è meromorfa e, unitamente ai poli dell'insieme dei numeri relativi $\mathbb{Z}$ dovuti alla funzione seno a denominatore, ha i due poli semplici

$$
p_\pm = \pm i\frac{\ln\left(2+\sqrt{3}\right)}{2\pi}.
$$

Consideriamo gli integrali

$$
J_n = \frac{1}{2i\pi}\oint_{|z|=n+1/2}s(z)dz = \sum_{k=-n}^{n}\mathrm{Res}\left[s(z),k\right] + \mathrm{Res}\left[s(z),p_-\right] + \mathrm{Res}\left[s(z),p_+\right], \qquad n\in\mathbb{N},
$$

con

$$
\mathrm{Res}\left[s(z),k\right] = \frac{1}{4\pi^2k^2+\ln^2\left(2+\sqrt{3}\right)}, \qquad \forall\, k\in\mathbb{Z}, \qquad \mathrm{Res}\left[s(z),p_\pm\right] = \frac{\cos(\pi p_\pm)}{\mathrm{sen}(\pi p_\pm)}\frac{1}{8\pi p_\pm}.
$$

I valori delle funzioni coseno e seno nei poli sono

$$
\begin{aligned}
\cos(\pi p_\pm) &= \frac{e^{-\ln\left(2+\sqrt{3}\right)/2}+e^{\ln\left(2+\sqrt{3}\right)/2}}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\sqrt{2+\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{2}\frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}, \\
\mathrm{sen}(\pi p_\pm) &= \pm\frac{e^{-\ln\left(2+\sqrt{3}\right)/2}-e^{\ln\left(2+\sqrt{3}\right)/2}}{2i} = \pm\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}-\sqrt{2+\sqrt{3}}\right) = \pm\frac{1}{2i}\frac{-1-\sqrt{3}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}},
\end{aligned}
$$

i rapporti che compaiono nei residui valgono

$$
\frac{\cos(\pi p_\pm)}{\mathrm{sen}(\pi p_\pm)} = \mp i\frac{3+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} = \mp i\frac{(3+\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)}{2} = \mp i\sqrt{3}.
$$

Infine, i residui sono uguali a

$$\operatorname{Res}\left[s(z), p_{\pm}\right] = \frac{\cos(\pi p_{\pm})}{\operatorname{sen}(\pi p_{\pm})} \frac{1}{8\pi p_{\pm}} = \mp i\sqrt{3} \frac{2\pi}{\pm 8 i \pi \ln\left(2+\sqrt{3}\right)} = -\frac{\sqrt{3}}{4\ln\left(2+\sqrt{3}\right)} .$$

Si ha che nel limite $n \to \infty$, l'integrale $J_n$ si annulla, lo si verifica usando la disuguaglianza di Darboux, quindi

$$0 = \lim_{n\to\infty} J_n = \sum_{k\in Z} \frac{1}{4\pi^2 k^2 + \ln^2\left(2+\sqrt{3}\right)} - \frac{\sqrt{3}}{2\ln\left(2+\sqrt{3}\right)} ,$$

da cui la somma della serie

$$\sum_{k\in Z} \frac{1}{4\pi^2 k^2 + \ln^2\left(2+\sqrt{3}\right)} = \frac{\sqrt{3}}{2\ln\left(2+\sqrt{3}\right)} .$$

Abbiamo tutti gli elementi per calcolare il coefficiente $b$,

$$\begin{aligned} b &= -1 - \frac{4}{\pi} \operatorname{Re}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{R_k^+}{\pi/2 - z_k^+}\right) = 1 - \frac{4}{\pi}\left(-\frac{\pi\ln\left(2+\sqrt{3}\right)}{2\sqrt{3}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{4\pi^2k^2 + \ln^2\left(2+\sqrt{3}\right)}\right) \\ &= -1 + \frac{2\ln\left(2+\sqrt{3}\right)}{\sqrt{3}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{4\pi^2k^2 + \ln^2\left(2+\sqrt{3}\right)} = -1 + \frac{2\ln\left(2+\sqrt{3}\right)}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}}{2\ln\left(2+\sqrt{3}\right)} \\ &= 0 , \end{aligned}$$

che come il coefficiente $a$ è nullo. L'espressione finale è

$$f(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\frac{R_k^+}{z - z_k^+} + \frac{R_k^-}{z - z_k^-}\right) .$$

## TERZO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

Si calcoli l'integrale in valore principale

$$= \operatorname{Pr}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(t) - 1}{t^2(t-\pi)} dt .$$

**Curiosità**. L'immagine rappresenta una foggia di baffi detta *Dalí*, in ricordo di quelli portati dal maestro spagnolo, per non dire il numero uno del surrealismo e del dadaismo, i movimenti artistici che hanno avuto i maggiori fulgori nei primi decenni del ventesimo secolo.
**Salvador Domingo Felipe Jacinto Dalí i Domènech** è stato sceneggiatore, cineasta, fotografo, scrittore, pittore, scultore e disegnatore.

## SOLUZIONE DEL TERZO PROBLEMA

La funzione integranda è un rapporto di funzioni intere è quindi meromorfa. Ha singolarità nell'origine e in $t = \pi$. Poiché nell'origine si annulla anche il numeratore, verifichiamo la natura della singolarità calcolando il limite

$$\lim_{t\to 0} \frac{\cos(t) - 1}{t^2(t-\pi)} = \lim_{t\to 0} \frac{-\operatorname{sen}(t)}{2t(t-\pi)} = \frac{1}{2\pi} ,$$

ne consegue che quella nell'origine è una singolarità eliminabile e che quindi il valore principale è relativo al polo semplice in $t = \pi$.

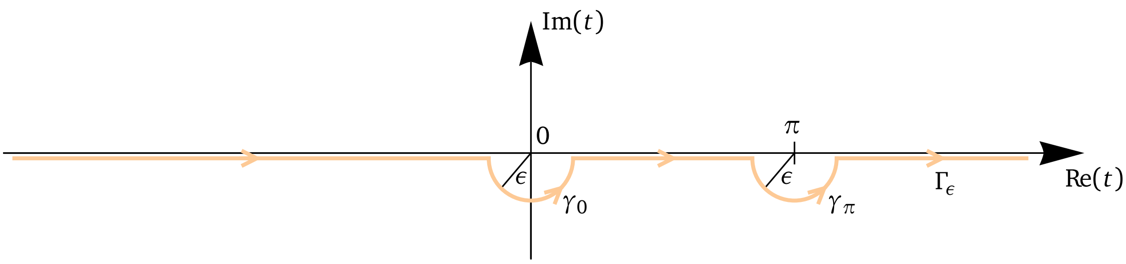
Calcoliamo l'integrale avvalendoci del lemma di Jordan e del teorema dei residui, a tal fine scriviamo la funzione coseno con la formula di Eulero

$$= \frac{1}{2}\,\mathrm{Pr}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{it}+e^{-it}-2}{t^2(t-\pi)}dt\,.$$

Deformiamo con continuità il percorso d'integrazione dentandolo con archi che aggirano sia l'origine, che il polo semplice in $t=\pi$, immersi nel semipiano delle parti immaginarie negative cioè consideriamo il percorso, mostrato in figura,

$$\begin{aligned}\Gamma_\epsilon &= (-\infty,-\epsilon]\cup\left\{t: t=\epsilon e^{i\theta}\,, \theta\in[\pi,2\pi]\right\}\cup[\epsilon,\pi-\epsilon]\cup\left\{t: t=\pi+\epsilon e^{i\theta}\,,\theta\in[\pi,2\pi]\right\}\cup[\pi-\epsilon,\infty)\\ &\equiv(-\infty,-\epsilon]\cup\gamma_0\cup[\epsilon,\pi-\epsilon]\cup\gamma_\pi\cup[\pi-\epsilon,\infty)\,,\end{aligned}$$

dove abbiamo chiamato $\gamma_0$ e $\gamma_\pi$ gli archi centrati, rispettivamente nell'origine e in $t=\pi$.




L'integrale richiesto può essere ottenuto come

$$= \frac{1}{2}\lim_{\epsilon\to0^+}\left(\int_{\Gamma_\epsilon}\frac{e^{it}+e^{-it}-2}{t^2(t-\pi)}dt-\int_{\gamma_\pi}\frac{e^{it}+e^{-it}-2}{t^2(t-\pi)}dt\right)=\lim_{\epsilon\to0^+}\left(\frac{1}{2}\int_{\Gamma_\epsilon}\frac{e^{it}+e^{-it}-2}{t^2(t-\pi)}dt-\int_{\gamma_\pi}\frac{\cos(t)-1}{t^2(t-\pi)}dt\right).$$

Il contributo dovuto all'arco $\gamma_\pi$ si ottiene come

$$\lim_{\epsilon\to0^+}\int_{\gamma_\pi}\frac{\cos(t)-1}{t^2(t-\pi)}dt = i\pi\lim_{\epsilon\to0^+}\frac{\cos(t)-1}{t^2}=i\pi\lim_{t\to\pi}\frac{\cos(t)-1}{t^2}=-\frac{2i}{\pi}\,.$$

L'integrale su $\Gamma_\epsilon$ si calcola usando il lemma di Jordan, chiudendo il percorso nel semipiano delle parti immaginarie positive o negative a seconda del segno del coefficiente dell'unità immaginaria a esponente dell'esponenziale, appunto, qualora sia presente. Separiamo l'integranda come

$$= \frac{1}{2}\lim_{\epsilon\to0^+}\left(\int_{\Gamma_\epsilon}\frac{e^{it}}{t^2(t-\pi)}dt+\int_{\Gamma_\epsilon}\frac{e^{-it}-2}{t^2(t-\pi)}dt\right)+\frac{2i}{\pi}\,,$$

chiudiamo il percorso del primo integrale nel semipiano delle parti immaginarie positive, cosicché il percorso avvolgerà le singolarità nell'origine e in $t=\pi$; mentre quello del secondo verrà chiuso nel semipiano delle parti immaginarie negative, sicché non avvolgerà alcuna singolarità. Ne consegue che, usando il teorema dei residui, solo il primo integrale darà contributo non nullo, infatti

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{2}\lim_{\epsilon\to0^+}\left(\int_{\Gamma_\epsilon}\frac{e^{it}}{t^2(t-\pi)}dt+\underbrace{\int_{\Gamma_\epsilon}\frac{e^{-it}-2}{t^2(t-\pi)}dt}_{=0}\right)+\frac{2i}{\pi}\\ &= i\pi\left(\mathrm{Res}\left[\frac{e^{it}}{t^2(t-\pi)},0\right]+\mathrm{Res}\left[\frac{e^{it}}{t^2(t-\pi)},\pi\right]\right)+\frac{2i}{\pi}\\ &= i\pi\left(\frac{d}{dt}\frac{e^{it}}{t-\pi}\bigg|_0+\frac{e^{i\pi}}{\pi^2}\right)+\frac{2i}{\pi}=i\pi\left(\left(\frac{i}{t-\pi}-\frac{1}{(t-\pi)^2}\right)e^{it}\bigg|_0-\frac{1}{\pi^2}\right)+\frac{2i}{\pi}\\ &= i\pi\left(-\frac{i}{\pi}-\frac{2}{\pi^2}\right)+\frac{2i}{\pi}=1-\frac{2i}{\pi}+\frac{2i}{\pi}\,,\end{aligned}$$

da cui il risultato finale

 $= 1\,.$

## Quarto problema (punteggio massimo: 5/30)

L'operatore  è definito nello spazio di Hilbert a $N$ dimensioni $E_N$ in termini dei vettori ortogonali $|x\rangle, |y\rangle \in E_N \setminus \{|0\rangle\}$ come

 $= |x\rangle\langle y| + |y\rangle\langle x|\,.$

Dopo averlo classificato e averne descritto le caratteristiche, se ne ottengono gli autovalori e gli autovettori.

**Curiosità**. L'immagine rappresenta una foggia di baffi detta à la *Fu Manchu*. **Fu Manchu** è il personaggio immaginario concepito dallo scrittore britannico Sax Rohmer. Compare in una serie di romanzi pubblicati nei primi anni del ventesimo secolo, nel ruolo di "genio del male", uno dei primi "super criminali" della letteratura mondiale. Il suo personaggio è anche un esempio di razzismo anti-asiatico, in quanto si prefigge l'obiettivo di annientamento della civiltà occidentale. Lo stesso personaggio compare anche in romanzi di altri autori e in film di varia ispirazione.

## Soluzione del quarto problema

Poiché l'aggiunto di un operatore definito dal prodotto *ket-bra* di due vettori è il prodotto degli stessi in ordine invertito e che l'aggiunto della somma di operatori è la somma degli aggiunti, si ha

 $^{\dagger} = \left(|x\rangle\langle y| + |y\rangle\langle x|\right)^{\dagger} = \left(|x\rangle\langle y|\right)^{\dagger} + \left(|y\rangle\langle x|\right)^{\dagger} = |y\rangle\langle x| + |x\rangle\langle y| =$  ,

l'operatore  è hermitiano e ha, quindi, autovalori reali. Inoltre, è normale, quindi ammette un insieme ortonormale di autovettori.
Al fine di determinarne lo spettro discreto e l'insieme degli autovettori, facciamo riferimento ai vettori $|x\rangle$ e $|y\rangle$ in termini dei quali l'operatore è definito.
I vettori sono ortogonali, cioè

$$\langle x|y\rangle = \langle y|x\rangle = 0\,,$$

ne consegue che l'azione dell'operatore su ciascuno di essi dà

 $|x\rangle = |x\rangle \underbrace{\langle y|x\rangle}_{=0} + |y\rangle\langle x|x\rangle = \|x\|^2\,|y\rangle\,,$

 $|y\rangle = |x\rangle\langle y|y\rangle + |y\rangle \underbrace{\langle x|y\rangle}_{=0} = \|y\|^2\,|x\rangle\,,$

quindi, i vettori $|x\rangle$ e $|y\rangle$ non sono autovettori.
Consideriamo il vettore

$$|v\rangle = \alpha|x\rangle + \beta|y\rangle\,,$$

combinazione lineare dei due vettori dati con i coefficienti generici $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. L'azione dell'operatore su questo vettore dà

 $|v\rangle = \alpha\langle x|x\rangle|y\rangle + \beta\langle y|y\rangle|x\rangle = \alpha\,\|x\|^2\,|y\rangle + \beta\,\|y\|^2\,|x\rangle\,.$

Scriviamo l'equazione agli autovalori con il vettore $|v\rangle$


$$|v\rangle = \lambda |v\rangle$$


$$|v\rangle = \alpha \, \|x\|^2 \, |y\rangle + \beta \, \|y\|^2 \, |x\rangle = \lambda |v\rangle = \lambda \left( \alpha |x\rangle + \beta |y\rangle \right) ,$$

l'identità vale se

$$\beta \, \|y\|^2 = \lambda \alpha \,, \qquad \alpha \, \|x\|^2 = \lambda \beta \,.$$

Ricaviamo $\beta$ in funzione di $\alpha$, ad esempio dalla prima equazione,

$$\beta = \frac{\lambda \alpha}{\|y\|^2}$$

e dalla seconda otteniamo l'autovalore $\lambda$ come

$$\lambda = \frac{\alpha \, \|x\|^2}{\beta} = \frac{\|x\|^2 \, \|y\|^2}{\lambda} \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_\pm = \pm \, \|x\| \, \|y\| \,.$$

Abbiamo così ottenuto due autovalori opposti e reali. Sono diversi, poiché i due vettori sono diversi dal vettore nullo e quindi hanno norme strettamente positive. Gli autovettori corrispondenti, che devono essere ortogonali, sono

$$|v_\pm\rangle = \alpha \left( |x\rangle + \frac{\lambda_\pm}{\|y\|^2} |y\rangle \right) = \alpha \left( |x\rangle \pm \frac{\|x\|}{\|y\|} |y\rangle \right) ,$$

dove abbiamo l'espressione del coefficiente $\beta$ in funzione degli autovalori e dell'altro coefficiente $\alpha$. Scegliamo un valore per $\alpha$ che normalizzi gli autovettori, si ha

$$\|v_\pm\|^2 = \langle v_\pm | v_\pm \rangle = |\alpha|^2 \left( \|x\|^2 + \frac{\|x\|^2}{\|y\|^2} \, \|y\|^2 \right) = 2|\alpha|^2 \, \|x\|^2 = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = \frac{1}{\sqrt{2} \, \|x\|} \,.$$

Gli autovettori normalizzati sono

$$|v_\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{|x\rangle}{\|x\|} \pm \frac{|y\rangle}{\|y\|} \right) .$$

Verifichiamo che siano ortogonali

$$\langle v_\pm | v_\mp \rangle = \frac{1}{2} \left( \frac{|x\rangle}{\|x\|} \mp \frac{|y\rangle}{\|y\|} \right) \left( \frac{|x\rangle}{\|x\|} \mp \frac{|y\rangle}{\|y\|} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\|x\|^2}{\|x\|^2} - \frac{\|y\|^2}{\|y\|^2} \right) = 0 \,.$$

Definiamo una base ortonormale dello spazio di Hilbert $E_N$ avente come primi due vettori gli autovettori $|v_+\rangle$ e $|v_-\rangle$, cioè

$$\{|e_k\rangle\}_{k=1}^N = \{|v_+\rangle, |v_-\rangle\} \cup \{|e_k\rangle\}_{k=3}^N ,$$

dove $|e_1\rangle = |v_+\rangle$, a $|e_2\rangle = |v_-\rangle$. Ne consegue che i due autovettori sono ortogonali a tutti gli $N-2$ vettori della base con indici maggiori di 2, cioè

$$\langle v_\pm | e_k \rangle = \langle e_k | v_\pm \rangle = 0 \,, \qquad \forall \, k \in \{3, 4, \dots, N\} \,.$$

Ciò implica che anche i due vettori $|x\rangle$ e $|y\rangle$ sono ortogonali a tutti gli $N-2$ vettori della base con indici maggiori di 2, infatti

$$\begin{cases} 0 = \langle e_k | v_+ \rangle = \dfrac{1}{2} \left( \dfrac{\langle e_k | x \rangle}{\|x\|} + \dfrac{\langle e_k | y \rangle}{\|y\|} \right) = \langle v_+ | e_k \rangle = \dfrac{1}{2} \left( \dfrac{\langle x | e_k \rangle}{\|x\|} + \dfrac{\langle y | e_k \rangle}{\|y\|} \right) \\[2ex] 0 = \langle e_k | v_- \rangle = \dfrac{1}{2} \left( \dfrac{\langle e_k | x \rangle}{\|x\|} - \dfrac{\langle e_k | y \rangle}{\|y\|} \right) = \langle v_- | e_k \rangle = \dfrac{1}{2} \left( \dfrac{\langle x | e_k \rangle}{\|x\|} - \dfrac{\langle y | e_k \rangle}{\|y\|} \right) \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} \langle e_k | x \rangle = \langle x | e_k \rangle = 0 \\[1ex] \langle e_k | y \rangle = \langle y | e_k \rangle = 0 \\[1ex] \forall \, k \in \{3, 4, \dots, N\} \end{cases} .$$

Ulteriore conseguenza è che gli $N-2$ vettori dell'insieme $\{|e_k\rangle\}_{k=3}^N$, sono autovettori dell'operatore  con autovalore nullo. Le corrispondenti $N-2$ equazioni agli autovalori si ottengono applicando l'operatore ai vettori dell'insieme $\{|e_k\rangle\}_{k=3}^N$,

 $$|e_k\rangle = (|x\rangle\langle y| + |y\rangle\langle x|)\,|e_k\rangle = \underbrace{\langle y|e_k\rangle}_{=0}|x\rangle + \underbrace{\langle x|e_k\rangle}_{=0}|y\rangle = |0\rangle = 0|e_k\rangle\,, \qquad \forall\, k\in\{3,4,\ldots,N\}\,.$$

In definitiva, gli autovettori dell'operatore  sono i vettori della base ortonormale $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^N$, con $|e_1\rangle = |v_+\rangle$ e $|e_2\rangle = |v_-\rangle$, mentre l'insieme degli autovalori è $\{\lambda_k\}_{k=1}^N$, con

$$\lambda_1 = \lambda_+ = \|x\|\,\|y\|\,, \qquad \lambda_2 = \lambda_- = -\|x\|\,\|y\|\,, \qquad \lambda_j = 0\,, \qquad \forall\, j\in\{3,4,\ldots,N\}\,.$$

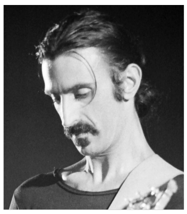
L'autovalore nullo è degenere, con ordine di degenerazione $N-2$, mentre i primi due autovalori sono non degeneri.

## Quinto problema (punteggio massimo: 6/30)

I tre vettori dell'insieme $\{|v_k\rangle\}_{k=1}^3 \subset E_4$, appartenenti allo spazio di Hilbert a quattro dimensioni $E_4$, sono ortogonali e, rispetto alla base ortonormale $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^4 \subset E_4$, sono rappresentati dai vettori

$$|v_1\rangle \overset{e}{\hookleftarrow} v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \qquad |v_2\rangle \overset{e}{\hookleftarrow} v_2 = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}, \qquad |v_3\rangle \overset{e}{\hookleftarrow} v_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}.$$

Si ottenga la matrice che rappresenta, rispetto alla stessa base ortonormale $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^4 \subset E_4$, l'operatore hermitiano  avente come primi tre autovettori, i vettori dell'insieme dato $\{|v_k\rangle\}_{k=1}^3 \subset E_4$, con il corrispondente insieme di autovalori $\{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\} = \{-2,-1,1\}$, mentre il quarto autovalore è $\lambda_4 = 2$.



**Curiosità**. L'immagine rappresenta una foggia di baffi detta à la *Frank Zappa*. **Frank Vincent Zappa**, di origini italo-francesi, è stato un poliedrico artista e attivista per la libertà di parola statunitense, vissuto nella seconda metà del ventesimo secolo. Pur essendosi cimentato con successo in una vasta gamma di forme espressive, dalla regia, alla sceneggiatura, alla recitazione, si è distinto principalmente come uno dei più brillanti talenti musicali del ventesimo secolo. Negli oltre centoventi album pubblicati, si mescolano e coesistono influenze stilistiche che spaziano dal rock, al blues, al jazz, finanche alla musica classica.

## Soluzione del quinto problema

L'operatore è normale in quanto hermitiano, ne consegue che il quarto autovettore, $|v_4\rangle$, è ortogonale ai primi tre, cosicché l'insieme dei quattro $\{|v_k\rangle\}_{k=1}^4 \subset E_4$ è ortogonale. Le componenti contro-varianti del vettore $|v_4\rangle$ si ottengono dalle condizioni di ortogonalità

$$\langle v_j|v_4\rangle = \sum_{k=1}^4 v_j^{k*} v_4^k = 0\,, \qquad \forall\, j\in\{1,2,3\}\,,$$

dove $v_j^k$ è la $k$-esima componente contro-variante del $j$-esimo autovettore, con $k,j\in\{1,2,3,4\}$. Si ottiene il sistema lineare di tre equazioni

$$\left\{\begin{aligned} v_4^1 + v_4^2 + v_4^3 + v_4^4 &= 0\\ v_4^1 - v_4^2 + v_4^3 - v_4^4 &= 0\\ v_4^1 + v_4^2 - v_4^3 - v_4^4 &= 0\end{aligned}\right. \qquad \Rightarrow \qquad \left\{\begin{aligned} v_4^2 + v_4^3 + v_4^4 &= -v_4^1\\ -v_4^2 + v_4^3 - v_4^4 &= -v_4^1\\ v_4^2 - v_4^3 - v_4^4 &= -v_4^1\end{aligned}\right.\,,$$

da cui otteniamo le tre componenti $v_4^2$, $v_4^3$ e $v_4^4$ in funzione della prima $v_4^1$, come

$$v_4^2 = \frac{\det\begin{pmatrix} -v_4^1 & 1 & 1 \\ -v_4^1 & 1 & -1 \\ -v_4^1 & -1 & -1 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}} = -v_4^1\,, \qquad v_4^3 = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & -v_4^1 & 1 \\ -1 & -v_4^1 & -1 \\ 1 & -v_4^1 & -1 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}} = -v_4^1\,, \qquad v_4^4 = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & -v_4^1 \\ -1 & 1 & -v_4^1 \\ 1 & -1 & -v_4^1 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}} = v_4^1\,.$$

Poiché le condizioni di ortogonalità lasciano libero un grado di libertà, scegliamo $v_4^1 = 1$, così da ottenere la rappresentazione del quarto autovettore

$$|v_4\rangle \overset{e}{\hookleftarrow} v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

ribadiamo che l'insieme dei quattro vettori $\{v_k\}_{k=1}^4$ è ortogonale. Per ottenere la matrice che rappresenta l'operatore , ci avvaliamo del teorema spettrale e usiamo la scomposizione spettrale


$$= \sum_{k=1}^{4} \lambda_k \hat{P}_k\,.$$

Gli operatori dell'insieme $\left\{\hat{P}_k\right\}_{k=1}^4$ sono proiettori ortogonali, cioè: $\hat{P}_k\hat{P}_j = \delta_{kj}\hat{P}_k$, con $k, j \in \{1,2,3,4\}$ e tali che

$$\sum_{k=1}^{4} \hat{P}_k = \hat{I}\,,$$

dove $\hat{I}$ è l'operatore identità. Nel caso di un operatore normale, con autovettori ortogonali, il $k$-esimo proiettore si ottiene dal prodotto *ket-bra* con se stesso del $k$-esimo autovettore normalizzato.
Quindi, in questo caso si ha la rappresentazione spettrale


$$= \sum_{k=1}^{4} \lambda_k \frac{|v_k\rangle\langle v_k|}{\langle v_k|v_k\rangle}\,.$$

La matrice che, rispetto alla base ortonormale $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^4$, rappresenta il $k$-esimo proiettore è

$$\hat{P}_k = \frac{|v_k\rangle\langle v_k|}{\langle v_k|v_k\rangle} \overset{e}{\hookleftarrow} P_k\,, \qquad \forall\, k \in \{1,2,3,4\}$$

e ha elementi

$$(P_k)^l_m = \frac{\langle e_l|v_k\rangle\langle v_k|e_m\rangle}{\langle v_k|v_k\rangle} = \frac{v_k^l v_k^{m*}}{4}\,, \qquad \forall\, k, l, m \in \{1,2,3,4\}\,.$$

Le matrici che rappresentano i quattro proiettori sono

$$P_1 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P_2 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$P_3 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P_4 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Infine, la matrice che rappresenta l'operatore  è


$$\overset{e}{\hookleftarrow}$$

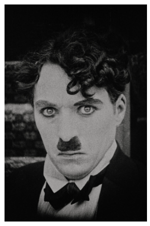
$$= \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & -3/2 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 & -3/2 \\ -3/2 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & -3/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

## **Sesto problema** (punteggio massimo: 6/30)

Dopo aver dimostrato che l'operatore differenziale, definito nella spazio funzionale $L^2(\mathbb{R})$,

 $$= \alpha \frac{d}{dx} + \beta \frac{d^2}{dx^2} \,,$$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, non è hermitiano, si ottengano le espressioni degli operatori differenziali hermitiani $A$ e $B$, tali che:  $= A + iB$.



**Curiosità**. L'immagine rappresenta il taglio di baffi detto a *spazzolino*. Tra i più noti portatori di baffi a spazzolino ci sono il dittatore nazista Adolf Hitler e **Charles Spencer Chaplin** (detto Charlie), mostrato in figura, attore, regista, sceneggiatore e produttore britannico. È stato uno degli artisti più creativi e geniali del cinema muto del ventesimo secolo. Il personaggio che più lo rappresenta è quello del "vagabondo", che nelle versioni originali dei sui film non ha nome, mentre in quelle italiane si chiama *Charlot* con la pronuncia alla francese. Tra i film più rappresentativi della sua opera ci sono: *Il monello* del 1921, *Tempi moderni* del 1936, *Il grande dittatore* del 1940 e *Luci della ribalta* del 1952.

## **Soluzione del sesto Problema**

Calcoliamo l'aggiunto hermitiano dell'operatore derivata $n$-esima, usando il prodotto scalare nello spazio funzionale $L^2(\mathbb{R})$. Ovvero, indicando con $D_n$ l'operatore derivata $n$-esima, con $n \in \mathbb{N}$, cioè

$$D_n = \frac{d^n}{dx^n} \,,$$

cerchiamo l'operatore $D_n^\dagger$, tale che, $\forall\, f(x), g(x) \in L^2(\mathbb{R})$, con $d^j f(x)/dx^j, d^j g(x)/dx^j \in L^2(\mathbb{R})$, $\forall\, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$,

$$(f, D_n g) = \left(g, D_n^\dagger f\right)^*$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} f^*(x) \frac{d^n g}{dx^n} dx = \left(\int_{-\infty}^{\infty} g^*(x) D_n^\dagger f(x) dx\right)^* .$$

Il primo prodotto scalare può essere calcolato iterando l'integrazione per parti e si ha

$$\begin{aligned}
(f, D_n g) &= \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x) \frac{d^n g}{dx^n} dx = \underbrace{f^*(x) \frac{d^{n-1} g}{dx^{n-1}}\bigg|_{-\infty}^{\infty}}_{=0} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df^*}{dx} \frac{d^{n-1} g}{dx^{n-1}} dx \\
&= \{(n-1) \text{ iterazioni}\} = \underbrace{\frac{d^{n-1} f^*}{dx^{n-1}}(x) g(x)\bigg|_{-\infty}^{\infty}}_{=0} + (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^n f^*}{dx^n} g(x) dx \\
&= \left(\int_{-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{d^n f}{dx^n} dx\, g^*(x)\right)^* = \left(g, (-1)^n \frac{d^n f}{dx^n}\right)^* .
\end{aligned}$$

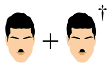
Si è ottenuto il complesso coniugato del prodotto scalare della funzione $g(x)$ per una funzione data dall'azione di un operatore differenziale sulla funzione $f(x)$, questo operatore è l'aggiunto hermitiano dell'operatore differenziale $D_n$, ovvero

$$D_n^\dagger = (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} \,, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N} .$$

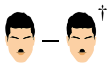
Alla luce di questo risultato possiamo calcolare l'aggiunto hermitiano dell'operatore  come

 $$^\dagger = \left(\alpha \frac{d}{dx} + \beta \frac{d^2}{dx^2}\right)^\dagger = \alpha^* \left(\frac{d}{dx}\right)^\dagger + \beta^* \left(\frac{d^2}{dx^2}\right)^\dagger = -\alpha^* \frac{d}{dx} + \beta^* \frac{d^2}{dx^2} .$$

Gli operatori cercati sono:



$$A = \frac{\qquad}{2} = \frac{1}{2}\left((\alpha - \alpha^*)\,\frac{d}{dx} + (\beta + \beta^*)\,\frac{d^2}{dx^2}\right) = i\,\mathrm{Im}(\alpha)\frac{d}{dx} + \mathrm{Re}(\beta)\frac{d^2}{dx^2}\,,$$



$$B = \frac{\qquad}{2i} = \frac{1}{2i}\left((\alpha + \alpha^*)\,\frac{d}{dx} + (\beta - \beta^*)\,\frac{d^2}{dx^2}\right) = -i\,\mathrm{Re}(\alpha)\frac{d}{dx} + \mathrm{Im}(\beta)\frac{d^2}{dx^2}\,.$$