# Metodi Matematici per la Fisica

## Prima prova parziale - 28 febbraio 2022

Si risolvano cortesemente i seguenti problemi, sapendo che il punteggio assegnato a ciascuna procedura di risoluzione può variare tra lo zero e il massimo indicato ed è stabilito valutando:

1. la correttezza del risultato ottenuto e della procedura utilizzata;
2. la completezza dei passaggi riportati;
3. il livello di esemplificazione con cui sono espressi i risultati (ad esempio un risultato numerico reale non deve contenere l'unità immaginaria);
4. la correttezza del formalismo utilizzato;
5. la chiarezza dell'esposizione e la leggibilità del testo.

## Primo problema (punteggio massimo: 3/30)

Si calcoli l'integrale in valore principale

$$\Xi = \Pr\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\alpha}{\tan(\alpha)+1}\,.$$

### Soluzione del primo problema

Portiamo l'integrale nel piano complesso con il cambiamento di variabile $z = e^{i\alpha}$, da cui: $\alpha = -i\ln(z)$ e $d\alpha = -idz/z$ e quindi il percorso d'integrazione diventa la circonferenza unitaria orientata in senso positivo, ovvero anti-orario. Usando l'espressione in termini degli esponenziali della funzione tangente si ha

$$\Xi = \Pr\oint_{|z|=1} \frac{-idz/z}{-i\,(z-1/z)\,/\,(z+1/z)+1}\,.$$

Possiamo riscrivere l'integrale manipolando algebricamente la funzione integranda, che, con $z \neq 0$, condizione verifica sul percorso d'integrazione, diventa

$$\begin{aligned}
\Xi &= \Pr\oint_{|z|=1} \frac{-idz/z}{-i\,(z-1/z)\,/\,(z+1/z)+1} = \Pr\oint_{|z|=1} \frac{\left(z^2+1\right)dz}{z\left[z^2-1+i\left(z^2+1\right)\right]}\\
&= \Pr\oint_{|z|=1} \frac{\left(z^2+1\right)dz}{z\left(z^2(1+i)-1+i\right)} = \frac{1}{1+i}\Pr\oint_{|z|=1} \frac{\left(z^2+1\right)dz}{z\left(z^2-(1-i)/(1+i)\right)}\\
&= \frac{1}{1+i}\Pr\oint_{|z|=1} \frac{\left(z^2+1\right)dz}{z\left(z^2+i\right)}\,.
\end{aligned}$$

In questa forma è evidente la presenza di due poli semplici nei punti $z_\pm = \pm\sqrt{-i}$, cioè $z_- = e^{-i\pi/4}$ e $z_+ = e^{3i\pi/4}$ del percorso d'integrazione ed è rispetto a questi che va considerato il valore principale. Definiamo il percorso chiuso $\Gamma_\epsilon$, che si ottiene "dentando" internamente, in corrispondenza dei poli, con archi di raggio $\epsilon$ la circonferenza unitaria, ovvero

$$\Gamma_\epsilon = \left\{z : z = e^{i\theta}, \theta \in [-\pi, -\pi/4-\epsilon] \cup [-\pi/4+\epsilon, \pi/4-\epsilon] \cup [\pi/4+\epsilon, \pi]\right\} \cup \left(-\gamma_\epsilon^+\right) \cup \left(-\gamma_\epsilon^-\right)\,,$$

$\gamma_\epsilon^\pm$ sono gli archi centrati nei poli $z = z_\pm$, in dettaglio

$$\begin{aligned}
\gamma_\epsilon^- &= \left\{z : z = e^{-i\pi/4} + \epsilon e^{i\phi}, \phi \in \left[\pi/4+\epsilon^2, 5\pi/4-\epsilon^2\right]\right\}\,,\\
\gamma_\epsilon^+ &= \left\{z : z = e^{3i\pi/4} + \epsilon e^{i\phi}, \phi \in \left[-3\pi/4+\epsilon^2, \pi/4-\epsilon^2\right]\right\}\,.
\end{aligned}$$

In questa e nella precedente espressione il segno meno indica il verso di percorrenza negativo, cioè il verso orario. Il percorso chiuso $\Gamma_\epsilon$ avvolge una sola volata il polo semplice nell'origine della funzione integranda. Ne consegue che, usando il teorema dei residui e i lemmi per l'integrazione sugli archi, nel limite $\epsilon \to 0^+$, si ha

$$\begin{aligned}
\lim_{\epsilon\to 0^+} \frac{1}{1+i} \oint_{\Gamma_\epsilon} \frac{\left(z^2+1\right) dz}{z\left(z^2+i\right)} &= \Xi + \frac{1}{1+i} \lim_{\epsilon\to 0^+} \left( \int_{-\gamma_\epsilon^-} \frac{\left(z^2+1\right) dz}{z\left(z^2+i\right)} + \int_{-\gamma_\epsilon^+} \frac{\left(z^2+1\right) dz}{z\left(z^2+i\right)} \right) \\
&= \Xi - \frac{1}{1+i} \lim_{\epsilon\to 0^+} \left( \int_{\gamma_\epsilon^-} \frac{\left(z^2+1\right) dz}{z\left(z^2+i\right)} + \int_{\gamma_\epsilon^+} \frac{\left(z^2+1\right) dz}{z\left(z^2+i\right)} \right) \\
&= 2i\pi \frac{1}{1+i} \operatorname{Res}\left[ \frac{z^2+1}{z\left(z^2+i\right)}, z=0 \right]
\end{aligned}$$

e dell'identità degli ultimi due membri si ottiene il valore dell'integrale $\Xi$ come

$$\Xi = \frac{2i\pi}{1+i} \operatorname{Res}\left[ \frac{z^2+1}{z\left(z^2+i\right)}, z=0 \right] + \frac{1}{1+i} \lim_{\epsilon\to 0^+} \left( \int_{\gamma_\epsilon^-} \frac{\left(z^2+1\right) dz}{z\left(z^2+i\right)} + \int_{\gamma_\epsilon^+} \frac{\left(z^2+1\right) dz}{z\left(z^2+i\right)} \right).$$

Gli integrali sui percorsi $\gamma_\epsilon^\pm$ si calcolano sfruttando i lemmi d'integrazione sugli archi e quindi

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{\gamma_\epsilon^\pm} \frac{\left(z^2+1\right) dz}{z\left(z^2+i\right)} = i\pi \lim_{\epsilon\to 0^+} \frac{z^2+1}{z\left(z^2+i\right)} (z-z_\pm) = i\pi \frac{z_\pm^2+1}{2z_\pm^2} = i\pi \frac{-i+1}{-2i} = i\pi \frac{1+i}{2}.$$

Mentre, per il residuo nell'origine si ha

$$\operatorname{Res}\left[ \frac{z^2+1}{z\left(z^2+i\right)}, z=0 \right] = -i.$$

Ne consegue che l'integrale cercato vale

$$\Xi = \frac{2i\pi}{1+i} \underbrace{\operatorname{Res}\left[ \frac{z^2+1}{z\left(z^2+i\right)}, z=0 \right]}_{=-i} + \frac{1}{1+i} \underbrace{\lim_{\epsilon\to 0^+} \left( \int_{\gamma_\epsilon^-} \frac{\left(z^2+1\right) dz}{z\left(z^2+i\right)} + \int_{\gamma_\epsilon^+} \frac{\left(z^2+1\right) dz}{z\left(z^2+i\right)} \right)}_{=i\pi(1+i)} = \frac{2\pi}{1+i} + i\pi,$$

ovvero

$$\Xi = \pi.$$

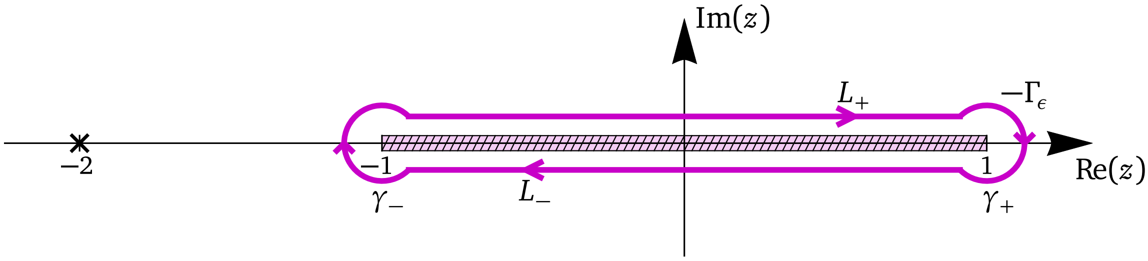
## Secondo problema (punteggio massimo: 3/30)

Si calcoli l'integrale

$$P = \int_{-1}^{1} \frac{2+x}{2-x} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\, dx.$$

### Soluzione del secondo problema

La funzione integranda è polidroma e ha punti di diramazione di ordine uno in $x = \pm 1$.




Consideriamo il percorso chiuso $\Gamma_\epsilon$ orientato in senso orario e quindi negativo, mostrato in figura costituito dall'unione di due tratti rettilinei simmetrici rispetto all'asse reale e due archi simmetrici rispetto all'asse immaginario. In dettaglio si ha $\Gamma_\epsilon = L_+ \cup (-\gamma_+) \cup L_- \cup (-\gamma_-)$, con

$$\begin{aligned}
&L^\pm = [\mp 1 \pm i\epsilon, \pm 1 \pm i\epsilon]\,,\\
&\gamma_- = \left\{z : z = -1 + \epsilon e^{i\theta}, \theta \in \left[\epsilon^2, 2\pi - \epsilon^2\right]\right\}\,,\\
&\gamma_+ = \left\{z : z = 1 + \epsilon e^{i\theta}, \theta \in \left[-\pi + \epsilon^2, \pi - \epsilon^2\right]\right\}\,.
\end{aligned}$$

Il simbolo $[z_1, z_2]$ indica il segmento rettilineo di estremi $z_1$ e $z_2$ orientato nel verso cha va dal primo al secondo estremo. La funzione integranda ha una sola singolarità al finito, il polo semplice in $z = -2$. Ne consegue che l'integrale sul percorso $-\Gamma_\epsilon$, orientato negativamente, coincide con $2i\pi$-volte la somma dei residui avvolti dal percorso $-\Gamma_\epsilon$ e quindi esterni a questo. Inoltre, poiché il valore dell'integrale non dipende dal parametro $\epsilon$, è lecito considerare il limite per $\epsilon \to 0^+$, si ha cioè

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \oint_{-\Gamma_\epsilon} \frac{2+z}{2-z}\sqrt{\frac{1+z}{1-z}}\,dz = 2i\pi\left(\mathrm{Res}\left[\frac{2+z}{2-z}\sqrt{\frac{1+z}{1-z}}, z=2\right] + \mathrm{Res}\left[\frac{2+z}{2-z}\sqrt{\frac{1+z}{1-z}}, z=\infty\right]\right).$$

Lo stesso integrale limite, può essere scritto come la somma dei contributi relativi ai tratti rettilinei e agli archi che compongono il percorso $\Gamma_\epsilon$, ovvero

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \oint_{-\Gamma_\epsilon} \frac{2+z}{2-z}\sqrt{\frac{1+z}{1-z}}\,dz = \lim_{\epsilon\to 0^+}\left(\sum_{\sigma = L_-, L_+, -\gamma_-, -\gamma_+} \int_\sigma \frac{2+z}{2-z}\sqrt{\frac{1+z}{1-z}}\,dz\right).$$

Al fine di calcolare i singoli contributi, definiamo i binomi, il cui rapporto rappresenta l'argomento della radice quadrata, in modo tale che la regione di discontinuità che taglieremo e quindi escluderemo dal dominio, coincida con il segmento reale $[-1, 1]$, cioè con il percorso d'integrazione dell'integrale $P$ del problema. La radice quadrata di ciascuno dei binomi $z+1$ e $1-z$, essendo entrambi polinomi di primo grado, ha una regione di discontinuità che si origina nell'unico zero, ovvero, come anticipato, in $z = -1$ per il numeratore e $z = 1$ per il denominatore, che sono punti di diramazione di ordine uno. Scegliamo le fasi dei binomi in modo che i tagli generati siano entrambi lungo l'asse reale e si estendano all'infinito nel verso positivo, cioè

$$\begin{aligned}
z + 1 &= |z+1| e^{i\theta_1}\,, \qquad && \theta_1 \in (0, 2\pi)\,,\\
1 - z &= |z-1| e^{i\theta_2}\,, \qquad && \theta_1 \in (-\pi, \pi)\,.
\end{aligned}$$

Per il secondo binomio la scelta ricade sulla determinazione $(-\pi, \pi)$ poiché in esso la $z$ compare con il segno negativo. I tagli, che sono rispettivamente $T_\pm = [\pm 1, \infty)$, si cancellano sull'intersezione, che coincide con $T_+$, ne consegue che la regione di discontinuità, ovvero il taglio risultante è il segmento reale $[-1, 1) = T_- \backslash T_+$.
Le fasi $\theta_{1,2}$ sul bordo superiore del taglio risultante, quindi su $L_+$, hanno i valori limite: $\theta_1 \to 0^+$ e $\theta_2 \to 0^-$. Sul bordo inferiore, invece, $\theta_1 \to 2\pi^-$ e $\theta_2 \to 0^+$. Alla luce di queste considerazioni, i valori limite degli integrali sui tratti rettilinei sono

$$\begin{aligned}
&\lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{L_+} \frac{2+z}{2-z}\sqrt{\frac{1+z}{1-z}}dz = \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{-1}^{1} \frac{2+x+i\epsilon}{2-x-i\epsilon}\sqrt{\frac{|1+x+i\epsilon|}{|1-x-i\epsilon|}}\underbrace{e^{i(\theta_1-\theta_2)/2}}_{e^{i(0-0)/2}=1}dx = \int_{-1}^{1}\frac{2+x}{2-x}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx = P\,,\\
&\lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{L_-} \frac{2+z}{2-z}\sqrt{\frac{1+z}{1-z}}dz = \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{1}^{-1} \frac{2+x-i\epsilon}{2-x+i\epsilon}\sqrt{\frac{|1+x-i\epsilon|}{|1-x+i\epsilon|}}\underbrace{e^{i(\theta_1-\theta_2)/2}}_{e^{i(2\pi-0)/2}=-1}dx = \int_{-1}^{1}\frac{2+x}{2-x}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx = P\,,
\end{aligned}$$

nel secondo integrale il fattore $e^{i\pi} = -1$ compensa il cambiamento di segno dovuto all'inversione degli estremi d'integrazione.
Gli integrali sugli archi $\gamma_\pm$, invece, sono nulli nel limite $\epsilon \to 0^+$. Infatti, per il contributo su $\gamma_-$, posto $z = -1 + \epsilon e^{i\theta}$, si ha

$$\left|\frac{2+z}{2-z}\sqrt{\frac{1+z}{1-z}}(z+1)\right| = \left|\frac{1+\epsilon e^{i\theta}}{3-\epsilon e^{i\theta}}\frac{\epsilon^{3/2}e^{3i\theta/2}}{\sqrt{2-\epsilon e^{i\theta}}}\right| = \frac{\left|1+\epsilon e^{i\theta}\right|}{\left|3-\epsilon e^{i\theta}\right|}\frac{\left|\epsilon^{3/2}e^{3i\theta/2}\right|}{\left|\sqrt{2-\epsilon e^{i\theta}}\right|} \le \frac{1+\epsilon}{|3-\epsilon|}\frac{\epsilon^{3/2}}{\sqrt{|2-\epsilon|}} \xrightarrow[\epsilon\to 0^+]{} 0\,.$$

Mentre per il contributo su $\gamma_+$, posto $z = 1 + \epsilon e^{i\theta}$, si ha

$$\left|\frac{2+z}{2-z}\sqrt{\frac{1+z}{1-z}}(z-1)\right| = \left|\frac{3+\epsilon e^{i\theta}}{1-\epsilon e^{i\theta}}\sqrt{-2\epsilon e^{i\theta}-\epsilon^2 e^{2i\theta}}\right| = \frac{\left|3+\epsilon e^{i\theta}\right|}{\left|1-\epsilon e^{i\theta}\right|}\left|\sqrt{-\epsilon e^{i\theta}\left(2+\epsilon e^{i\theta}\right)}\right| \le \frac{3+\epsilon}{|1-\epsilon|}\sqrt{\epsilon\,(2+\epsilon)} \xrightarrow[\epsilon\to 0^+]{} 0\,.$$

Questi due risultati, considerando il lemmi d'integrazione sugli archi, implicano

$$\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{\gamma_\pm}\frac{2+z}{2-z}\sqrt{\frac{1+z}{1-z}}dz=0\,.$$

Da cui si ha il valore limite dell'integrale sul percorso chiuso $\Gamma_\epsilon$ completo

$$\lim_{\epsilon\to 0^+}\oint_{-\Gamma_\epsilon}\frac{2+z}{2-z}\sqrt{\frac{1+z}{1-z}}\,dz=\lim_{\epsilon\to 0^+}\left(\sum_{\sigma=L_-,L_+,-\gamma_-,-\gamma_+}\int_\sigma\frac{2+z}{2-z}\sqrt{\frac{1+z}{1-z}}\,dz\,.\right)=2P\,.$$

Usando l'espressione dello stesso valore limite in termini dei residui

$$\lim_{\epsilon\to 0^+}\oint_{-\Gamma_\epsilon}\frac{2+z}{2-z}\sqrt{\frac{1+z}{1-z}}\,dz=2i\pi\left(\mathrm{Res}\left[\frac{2+z}{2-z}\sqrt{\frac{1+z}{1-z}},z=2\right]+\mathrm{Res}\left[\frac{2+z}{2-z}\sqrt{\frac{1+z}{1-z}},z=\infty\right]\right),$$

si ottiene l'integrale cercato come

$$P=i\pi\left(\mathrm{Res}\left[\frac{2+z}{2-z}\sqrt{\frac{1+z}{1-z}},z=2\right]+\mathrm{Res}\left[\frac{2+z}{2-z}\sqrt{\frac{1+z}{1-z}},z=\infty\right]\right).$$

Il residuo nel polo semplice $z=2$ è

$$\mathrm{Res}\left[\frac{2+z}{2-z}\sqrt{\frac{1+z}{1-z}},z=2\right]=\lim_{z\to 2}\frac{2+z}{2-z}\sqrt{\frac{1+z}{1-z}}(z-2)=-\lim_{z\to 2}(2+z)\sqrt{\frac{|1+z|}{|1-z|}}e^{i(\theta_1-\theta_2)/2}\,,$$

le fasi sopra e sotto l'asse reale hanno rispettivamente i valori limite: $\theta_1\to 0^+,2\pi^-$ e $\theta_2\to-\pi^+,\pi^-$, quindi le differenze tendono, rispettivamente da sotto a da sopra, allo stesso valore: $(\theta_1-\theta_2)\to\pi^-,\pi^+$ e per il residuo si ha

$$\mathrm{Res}\left[\frac{2+z}{2-z}\sqrt{\frac{1+z}{1-z}},z=2\right]=-\lim_{z\to 2}(2+z)\sqrt{\frac{|1+z|}{|1-z|}}e^{i(\theta_1-\theta_2)/2}=-4\sqrt{3}\,i\,.$$

Il residuo all'infinito lo otteniamo come

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}\,[f(z),z=\infty]&=-\mathrm{Res}\left[\frac{f(1/w)}{w^2},w=0\right]=-\mathrm{Res}\left[\frac{2w+1}{(2w-1)w^2}\sqrt{\frac{w+1}{w-1}},w=0\right]\\&=-\frac{1}{2i\pi}\oint_{|w|=r}\frac{2w+1}{(2w-1)w^2}\sqrt{\frac{w+1}{w-1}}dw\end{aligned}$$

con $r<1$. L'origine $w=0$ rappresenta un polo di ordine due per la funzione integranda, quindi l'integrale può essere calcolato usando la formula integrale di Cauchy per le derivate, cioè

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}\,[f(z),z=\infty]&=-\left.\frac{d}{dw}\frac{2w+1}{2w-1}\sqrt{\frac{w+1}{w-1}}\right|_{w=0}\\&=-\left.\frac{2}{2w-1}\sqrt{\frac{w+1}{w-1}}\right|_{w=0}+2\left.\frac{2w+1}{(2w-1)^2}\sqrt{\frac{w+1}{w-1}}\right|_{w=0}-\left.\frac{1}{2}\frac{2w+1}{2w-1}\sqrt{\frac{w+1}{w-1}}\frac{1}{w+1}\right|_{w=0}\\&\quad+\left.\frac{1}{2}\frac{2w+1}{2w-1}\sqrt{\frac{w+1}{w-1}}\frac{1}{w-1}\right|_{w=0}.\end{aligned}$$

I valori delle fasi dei binomi $w+1$ e $w-1$ il cui rapporto rappresenta l'argomento della radice quadrata deve essere scelto coerentemente con quelli fissati per ottenere il residuo nel polo semplice in $z=2$. Usando le espressioni

$$w+1=|w+1|e^{i\alpha_1}\,,\qquad w-1=|w-1|e^{i\alpha_2}\,,\qquad \sqrt{\frac{w+1}{w-1}}=\sqrt{\frac{|w+1|}{|w-1|}}e^{i(\alpha_1-\alpha_2)/2}\,,$$

otteniamo il valore della differenza $(\alpha_1-\alpha_2)$ nell'origine, richiedendo che valga

$$-4\sqrt{3}i = \text{Res}\left[\frac{2+z}{2-z}\sqrt{\frac{1+z}{1-z}}\, z=2\right] = \frac{1}{2i\pi}\oint_{|z-2|=r}\frac{2+z}{2-z}\sqrt{\frac{1+z}{1-z}}dz = -\frac{1}{2i\pi}\oint_{|w-1/2|=r'}\frac{2w+1}{(2w-1)w^2}\sqrt{\frac{w+1}{w-1}}dw$$
$$= -\text{Res}\left[\frac{2w+1}{(2w-1)w^2}\sqrt{\frac{w+1}{w-1}}, w=1/2\right] = -\lim_{w\to 1/2}\frac{2w+1}{(2w-1)w^2}\sqrt{\frac{w+1}{w-1}}(w-1/2)$$
$$= -\frac{2}{2/4}\sqrt{\frac{3/2}{1/2}}e^{i(\alpha_1-\alpha_2)/2} = -4\sqrt{3}e^{i(\alpha_1-\alpha_2)/2},$$

da cui $e^{i(\alpha_1-\alpha_2)/2}=i$ in $w=1/2$ ma anche $w=0$ in quanto entrambi i punti sono singolarità isolate appartenenti all'intervallo reale $[-1,1]$ in cui non si hanno discontinuità, ovvero tagli. Il taglio $[-1,1)$ nel piano complesso $z$ si trasforma nell'unione dei due tagli "esterni" $(-\infty,-1]\cup(1,\infty)$. Da ciò segue che nell'origine $w=0$ si ha

$$\left.\sqrt{\frac{w+1}{w-1}}\right|_{w=0} = e^{i(\alpha_1-\alpha_2)/2} = i\,.$$

In definitiva il residuo all'infinito vale

$$\text{Res}\,[f(z), z=\infty] = -\left.\frac{2}{2w-1}\sqrt{\frac{w+1}{w-1}}\right|_{w=0} + 2\left.\frac{2w+1}{(2w-1)^2}\sqrt{\frac{w+1}{w-1}}\right|_{w=0} - \left.\frac{1}{2}\frac{2w+1}{2w-1}\sqrt{\frac{w+1}{w-1}}\frac{1}{w+1}\right|_{w=0}$$
$$+\left.\frac{1}{2}\frac{2w+1}{2w-1}\sqrt{\frac{w+1}{w-1}}\frac{1}{w-1}\right|_{w=0} = i\left(2+2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) = 5i$$

l'integrale cercato è

$$P = \pi\left(4\sqrt{3}-5\right).$$

## Terzo problema (punteggio massimo: 3/30)

Si determini lo sviluppo di Mittag-Leffler della funzione

$$s(z) = \frac{1}{\text{sen}(z)\,\text{senh}(z)}\,.$$

### Soluzione del terzo problema

La funzione è meromorfa, ha poli in corrispondenza degli zeri delle funzioni seno e seno iperbolico il cui prodotto ne costituisce il denominatore. Si hanno, quindi, due insiemi di poli $\{r_k=k\pi\}_{k\in\mathbb{Z}}$ e $\{c_k=ik\pi\}_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}$ disposti rispettivamente lungo gli assi reale e immaginario. L'origine, $r_0=0$, che è inclusa nell'insieme dei poli reali, è l'unico polo di secondo ordine, tutti gli altri sono poli semplici. I residui dei poli reali diversi dall'origine, cioè con $k\neq 0$, sono

$$R_k = \text{Res}\left[\frac{1}{\text{sen}(z)\,\text{senh}(z)}, r_k\right] = \lim_{z\to r_k}\frac{(z-r_k)}{\text{sen}(z)\,\text{senh}(z)} = \frac{(-1)^k}{\text{senh}(r_k)} = \frac{(-1)^k}{\text{senh}(k\pi)}, \qquad k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}\,.$$

Quelli dei poli immaginari puri,

$$C_k = \text{Res}\left[\frac{1}{\text{sen}(z)\,\text{senh}(z)}, c_k\right] = \lim_{z\to c_k}\frac{(z-c_k)}{\text{sen}(z)\,\text{senh}(z)} = \frac{(-1)^k}{\text{sen}(c_k)} = \frac{(-1)^k}{\text{sen}(ik\pi)}\,. = \frac{-i(-1)^k}{\text{senh}(k\pi)} = -iR_k\,, \qquad k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}\,.$$

Nel caso del polo doppio $r_0=0$ la parte principale della serie di Laurent da includere nello sviluppo di Mittag-Leffler, che possiede due termini, può essere dedotta direttamente dalle serie di Taylor delle funzioni seno e seno iperbolico. Sfruttando anche la somma della serie geometrica, nel limite $z\to 0$, avremo

$$s(z) = \frac{1}{\text{sen}(z)\,\text{senh}(z)} = \left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\cdots\right)^{-1}\left(z+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\cdots\right)^{-1}$$
$$= \frac{1}{z^2}\left(1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}+\cdots\right)^{-1}\left(1+\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}+\cdots\right)^{-1} = \frac{1}{z^2}\left[1-\left(\frac{z^2}{3!}-\frac{z^4}{5!}+\cdots\right)\right]^{-1}\left[1+\left(\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}+\cdots\right)\right]^{-1}$$
$$= \frac{1}{z^2}\left[1+\left(\frac{z^2}{3!}-\frac{z^4}{5!}+\cdots\right)+\left(\frac{z^2}{3!}-\frac{z^4}{5!}+\cdots\right)^2+\cdots\right]\left[1-\left(\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}+\cdots\right)+\left(\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}+\cdots\right)^2+\cdots\right].$$

È immediato osservare che, come conseguenza dalla parità della funzione $s(z)$, ovvero dalla sua invarianza rispetto alla trasformazione $z \to -z$ per cui $s(z) = s(-z)$, la potenza $z^{-1}$ non sia presente in tale parte principale, che quindi consta del solo termine in $z^{-2}$. Il coefficiente di tale potenza si ottiene considerando i prodotti dei termini delle parentesi quadre non contenenti la $z$, cioè proporzionali alla potenza nulla $z^0$, l'unico prodotto con questa proprietà è quello tra le due unità e quindi si ha

$$s(z) = \frac{1}{z^2} + \mathcal{O}(1)\,.$$

Alla luce di questo e dei precedenti risultati, lo sviluppo di Mittag-Leffler può essere ulteriormente definito come

$$s(z) = \sigma(z) + \frac{1}{z^2} + \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left( \frac{R_k}{z - r_k} + \frac{C_k}{z - c_k} \right) = \sigma(z) + \frac{1}{z^2} + \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{(-1)^k}{\operatorname{senh}(k\pi)} \left( \frac{1}{z - k\pi} + \frac{-i}{z - ik\pi} \right),$$

dove la funzione $\sigma(z)$ rappresenta la parte intera della funzione $s(z)$, avente lo stesso comportamento asintotico, cioè

$$\lim_{z\to\infty} \sigma(z) = \lim_{z\to\infty} s(z)\,.$$

La funzione $s(z)$ è regolare all'infinito, infatti, il limite sui punti della successione dei multipli dispari di $\pi/2$, $\{(2k+1)\pi/2\}_{k=0}^{\infty}$, che si accumula monotonamente all'infinito, avendo intersezione vuota con l'insieme dei poli, non è divergente. Questo può essere evinto dalla limitazione del modulo del termine $k$-esimo, con $k \in \mathbb{N}$, della stessa successione

$$|s\left((2k+1)\pi/2\right)| = \left| \frac{1}{\operatorname{senh}\left((2k+1)\pi/2\right)} \right| = \frac{2}{|e^{(2k+1)\pi/2} - e^{-(2k+1)\pi/2}|} \le \frac{2}{e^{(2k+1)\pi/2} - e^{-(2k+1)\pi/2}} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0\,.$$

Ne consegue che la funzione $\sigma(z)$ è costante e ne indichiamo il valore con: $\sigma(z) = \sigma_0$. Possiamo ottenere $\sigma_0$ valutando la stessa funzione $s(z)$ e lo sviluppo di Mittag-Leffler in un punto opportuno. Solitamente, si usa la valutazione nell'origine, in questo caso però l'origine rappresenta un polo doppio. Ciononostante, potremmo considerare il valore nell'origine della differenza $s(z) - 1/z^2$, che, come risulta deducibile dalla serie di Laurent centrata appunto nell'origine, la cui parte principale è stata precedentemente ricavata, è costante. Tale valore si ottiene dall'espressione della funzione $s(z)$ mostra all'inizio di questa pagina, esso rappresenta il coefficiente "zero", quello della potenza $z^0$, della serie di Laurent. Anche questo coefficiente, come quello della potenza $z^{-1}$, è nullo, infatti

$$s(z) = \frac{1}{z^2} + \left( \frac{1}{3!} - \frac{1}{3!} \right) + \left( -\frac{1}{5!} - \frac{1}{5!} - \frac{1}{(3!)^2} + \frac{1}{(3!)^2} + \frac{1}{(3!)^2} \right) z^2 + \mathcal{O}\left(z^4\right) = \frac{1}{z^2} + \frac{z^2}{90} + \mathcal{O}\left(z^2\right),$$

la prima potenza non negativa della serie di Laurent è $z^2$. Si ha allora che anche la costante $\sigma_0$ è nulla, infatti

$$0 = \lim_{z\to 0} \left( s(z) - \frac{1}{z^2} \right) = \sigma_0 + \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{(-1)^k}{\operatorname{senh}(k\pi)} \left( \frac{1}{-k\pi} + \frac{-i}{-ik\pi} \right) \quad \Rightarrow \quad \sigma_0 = \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{(-1)^k}{\operatorname{senh}(k\pi)} \left( \frac{1}{k\pi} + \frac{-i}{ik\pi} \right) = 0\,.$$

Lo sviluppo di Mittag-Leffler completo è

$$s(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{(-1)^k}{\operatorname{senh}(k\pi)} \left( \frac{1}{z - k\pi} + \frac{-i}{z - ik\pi} \right).$$

Può essere ulteriormente semplificato separando nella somma i termini con indici positivi e negativi, sfruttando la parità dei coefficienti e sommando opportunamente le coppie di poli opposti nelle variabile $z$, prima, e $z^2$, poi, si ha

$$\begin{aligned} s(z) &= \frac{1}{z^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\operatorname{senh}(k\pi)} \left( \frac{1}{z - k\pi} + \frac{-i}{z - ik\pi} - \frac{1}{z + k\pi} - \frac{-i}{z + ik\pi} \right) \\ &= \frac{1}{z^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\operatorname{senh}(k\pi)} \left( \frac{2k\pi}{z^2 - k^2\pi^2} + \frac{-i(2ik\pi)}{z^2 + k^2\pi^2} \right) \\ &= \frac{1}{z^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 2k\pi}{\operatorname{senh}(k\pi)} \frac{2z^2}{z^4 - k^4\pi^4}\,, \end{aligned}$$

in definitiva

$$s(z)=\frac{1}{z^2}+4\pi z^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k k}{\operatorname{senh}(k\pi)}\frac{1}{z^4-k^4\pi^4}\,.$$

## Quarto problema (punteggio massimo: 3/30)

Si ottengano le espressioni dei coefficienti della serie di Laurent della funzione

$$g(z)=\frac{\operatorname{sen}(z)}{z^2-1}\,,$$

centrata in $z_0=1$ e convergente in un intorno dello stesso $z_0$.
Qual è il dominio di convergenza di questa serie di Laurent?

### Soluzione del quarto problema

La funzione $g(z)$ è meromorfa in quanto rapporto di funzioni intere e ha come uniche singolarità due poli semplici nei punti di $z_\pm=\pm1$. Ne consegue che il dominio di convergenza della serie di Laurent centrata nel polo semplice $z=z_0=z_+=1$ è la corona circolare $C=\{z:0<|z-1|<2\}$, centrata nello stesso polo $z_+=1$ di raggio interno nullo ed esterno pari alla distanza tra i due poli, cioè $|z_+-z_-|=2$.
Otteniamo la serie di Laurent usando la serie di Taylor della funzione seno e la somma della serie geometrica, dopo aver opportunamente manipolato la funzione $g(z)$ in modo da porla in una forma in cui la dipendenza dalla variabile $z$ sia sempre espressa attraverso il binomio $(z-1)$, si ha

$$g(z)=\frac{1}{2}\frac{\operatorname{sen}(z-1+1)}{(z-1)(1+(z-1)/2)}\,.$$

Usando le formule di somma della funzione seno e, come detto, quella della serie geometrica, nella condizione $0<|z-1|<2$, ovvero per $z\in C$,

$$\begin{aligned}
g(z)&=\frac{\operatorname{sen}(z-1)\cos(1)+\cos(z-1)\operatorname{sen}(1)}{2(z-1)}\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{z-1}{2}\right)^k\\
&=\frac{\operatorname{sen}(z-1)\cos(1)+\cos(z-1)\operatorname{sen}(1)}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^k(z-1)^{k-1}\\
&=\frac{\cos(1)}{2}\sum_{k,j=0}^{\infty}\frac{(-1)^{j+k}}{(2j+1)!}\frac{1}{2^k}(z-1)^{2j+k}+\frac{\operatorname{sen}(1)}{2}\sum_{k,l=0}^{\infty}\frac{(-1)^{l+k}}{(2l)!}\frac{1}{2^k}(z-1)^{2l+k-1}\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}A_n(z-1)^n+\sum_{m=-1}^{\infty}B_m(z-1)^m\,,
\end{aligned}$$

l'ultima è un'identità formale. I due insiemi di coefficienti $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$ e $\{B_m\}_{m=-1}^{\infty}$, definiti nell'espressione precedente, si ottengono come

$$A_n=\frac{\cos(1)}{2}\sum_{k,j=0}^{\infty}\frac{(-1)^{j+k}}{(2j+1)!}\frac{1}{2^k}\delta_{2j+k,n}\,,\qquad B_m=\frac{\operatorname{sen}(1)}{2}\sum_{k,l=0}^{\infty}\frac{(-1)^{l+k}}{(2l)!}\frac{1}{2^k}\delta_{2l+k-1,m}\,,$$

con $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ e $m\in\mathbb{N}\cup\{-1,0\}$. I simboli delta di Kronecker permettono di arrestare una delle due somme. Nel primo caso si ha la condizione $k=n-2j$, da cui si ottiene che i valori dell'indice $j$ sono vincolati dalla condizione di non negatività dell'indice $k\geq0$, ovvero si ha: $2j\leq n$. Ciò implica che lo stesso indice $j$ può variare da 0 fino alla parte intera di $n/2$, indicata con il simbolo $\operatorname{Int}[n/2]$. Nel secondo caso, la condizione imposta dal simbolo delta di Kronecker è $k=m+1-2l$ e $l$ può variare da $-1$ fino alla intera di $(m+1)/2$, indicata con il simbolo $\operatorname{Int}[(m+1)/2]$. Alla luce di questi risultati, le espressioni per i coefficienti degli insiemi $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$ e $\{B_m\}_{m=-1}^{\infty}$ sono

$$\begin{aligned}
A_n&=\frac{\cos(1)}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\sum_{j=0}^{\operatorname{Int}[n/2]}\frac{(-1)^{-j}}{(2j+1)!}\frac{1}{2^{-2j}}=\frac{\cos(1)}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\sum_{j=0}^{\operatorname{Int}[n/2]}\frac{(-4)^j}{(2j+1)!}\,,\\
B_m&=\frac{\operatorname{sen}(1)}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^{m+1}\sum_{l=0}^{\operatorname{Int}[(m+1)/2]}\frac{(-1)^{-l}}{(2l)!}\frac{1}{2^{-2l}}=\frac{\operatorname{sen}(1)}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^{m+1}\sum_{l=0}^{\operatorname{Int}[(m+1)/2]}\frac{(-4)^l}{(2l)!}\,,
\end{aligned}$$

con $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e $m \in \mathbb{N} \cup \{-1, 0\}$. In definitiva, si ha la serie di Laurent

$$g(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k (z-1)^k \,,$$

dove il $k$-esimo coefficiente, con $k \in Z$, è dato, in termini dei coefficienti degli insiemi $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$ e $\{B_m\}_{m=-1}^{\infty}$, dalla legge multipla

$$C_k = \begin{cases} 0 & \text{per } k < -1 \\ B_{-1} & \text{per } k = -1 \\ A_k + B_k & \text{per } k > -1 \end{cases} \,.$$

## Quinto problema (punteggio massimo: 3/30)

Si verifichi il seguente risultato

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{a^{ix}}{x^{10}+1} dx = \frac{2\pi}{5} \left( \frac{\operatorname{sen}(\cos(\pi/10)\ln(a) + \pi/10)}{a^{\operatorname{sen}(\pi/10)}} + \frac{\operatorname{sen}(\cos(3\pi/10)\ln(a) + 3\pi/10)}{a^{\operatorname{sen}(3\pi/10)}} + \frac{1}{2a} \right) \,,$$

valido per ogni $a \in (1, \infty)$.

### Soluzione del quinto problema

La funzione integranda ha 10 poli semplici coincidenti con le 10 radici decime di $-1$, ovvero gli elementi dell'insieme $\left\{e^{(2k+1)i\pi/10}\right\}_{k=0}^{9}$, che ha intersezione vuota con l'asse reale. In particolare, i primi cinque punti, per $k = 0, 1, 2, 3, 4$, appartengono al semipiano delle parti immaginarie positive, gli ultimi cinque, con $k = 5, 6, 7, 8, 9$, al semipiano delle parti immaginarie negative. Le cinque coppie $z_k$ e $z_{9-k}$, con $k = 0, 1, 2, 3, 4$ sono coppie di complessi coniugati, cioè $z_k = z_{9-k}^*$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$. Ad esempio con $k = 2$ si ha la coppia

$$z_{9-2} = z_7 = e^{3i\pi/2} = -i \,, \qquad z_2 = e^{i\pi/2} = i = z_7^* \,.$$

L'integrale può essere calcolato usando il lemma di Jordan e quindi con il teorema dei residui, infatti

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{a^{ix}}{x^{10}+1} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix\ln(a)}}{x^{10}+1} dx = 2i\pi \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=0}^{4} \operatorname{Res}\left[\frac{e^{iz\ln(a)}}{z^{10}+1}, z = z_k\right] & \text{se: } \ln(a) > 0 \Longleftrightarrow a \in (1, \infty) \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{4} \operatorname{Res}\left[\frac{1}{z^{10}+1}, z = z_k\right] & \text{se: } \ln(a) = 0 \Longleftrightarrow a = 1 \\ \displaystyle-\sum_{k=5}^{9} \operatorname{Res}\left[\frac{e^{iz\ln(a)}}{z^{10}+1}, z = z_k\right] & \text{se: } \ln(a) < 0 \Longleftrightarrow a \in (0, 1) \end{cases} \,.$$

In base alle condizioni del problema, è solo il primo dei tre casi che deve essere considerato. Il residuo del $k$-esimo polo è

$$\operatorname{Res}\left[\frac{e^{iz\ln(a)}}{z^{10}+1}, z = z_k\right] = \frac{e^{iz_k\ln(a)}}{10 z_k^9} = -\frac{z_k e^{iz_k\ln(a)}}{10} \,, \qquad \forall\, k \in \{0, 1, \ldots, 9\} \,.$$

L'ultima identità è stata ottenuta moltiplicando numeratore e denominatore per $z_k$ e sfruttando il fatto che $z_k^{10} = -1$, per ogni $k \in \{0, 1, \ldots, 9\}$.
Nel caso del problema, cioè con $a \in (1, \infty)$, l'integrale è la somma dei residui dei primi cinque poli moltiplicata per $2i\pi$. Questi poli, per cui usiamo la rappresentazione cartesiana $z_k = x_k + i y_k$, con $k = 0, 1, 2, 3, 4$, verificano le seguenti relazioni

$$\begin{aligned}
z_0 &= e^{i\pi/10} = \cos(\pi/10) + i\operatorname{sen}(\pi/10) = x_0 + i y_0 \,, \\
z_1 &= e^{3i\pi/10} = \cos(3\pi/10) + i\operatorname{sen}(3\pi/10) = x_1 + i y_1 \,, \\
z_2 &= e^{5i\pi/10} = i \\
z_3 &= e^{7i\pi/10} = \cos(7\pi/10) + i\operatorname{sen}(7\pi/10) = -\cos(3\pi/10) + i\operatorname{sen}(3\pi/10) = -x_1 + i y_1 \,, \\
z_4 &= e^{9i\pi/10} = \cos(9\pi/10) + i\operatorname{sen}(9\pi/10) = -\cos(\pi/10) + i\operatorname{sen}(\pi/10) = -x_0 + i y_0 \,.
\end{aligned}$$

Utilizziamo tali relazioni per scrivere la somma dei loro residui, si ha

$$
\begin{aligned}
-\sum_{k=0}^{4}\frac{z_k e^{iz_k\ln(a)}}{10} &= -\frac{1}{10}\left(x_0\left(e^{(ix_0-y_0)\ln(a)}-e^{(-ix_0-y_0)\ln(a)}\right)+iy_0\left(e^{(ix_0-y_0)\ln(a)}+e^{(-ix_0-y_0)\ln(a)}\right)\right)\\
&\quad -\frac{1}{10}\left(x_1\left(e^{(ix_1-y_1)\ln(a)}-e^{(-ix_1-y_1)\ln(a)}\right)+iy_1\left(e^{(ix_1-y_1)\ln(a)}+e^{(-ix_1-y_1)\ln(a)}\right)\right)\\
&\quad -\frac{1}{10}ie^{-\ln(a)}\\
&= -\frac{i}{5}\left(x_0\frac{\operatorname{sen}(x_0\ln(a))}{e^{y_0\ln(a)}}+y_0\frac{\cos(x_0\ln(a))}{e^{y_0\ln(a)}}+x_1\frac{\operatorname{sen}(x_1\ln(a))}{e^{y_1\ln(a)}}+y_1\frac{\cos(x_1\ln(a))}{e^{y_1\ln(a)}}+\frac{i}{2a}\right)\\
&= -\frac{i}{5}\left(\frac{\cos(\pi/10)\operatorname{sen}(\cos(\pi/10)\ln(a))+\operatorname{sen}(\pi/10)\cos(\cos(\pi/10)\ln(a))}{e^{\operatorname{sen}(\pi/10)\ln(a)}}\right.\\
&\quad \left.+\frac{\cos(3\pi/10)\operatorname{sen}(\cos(3\pi/10)\ln(a))+\operatorname{sen}(3\pi/10)\cos(\cos(3\pi/10)\ln(a))}{e^{\operatorname{sen}(3\pi/10)\ln(a)}}+\frac{i}{2a}\right)\\
&= -\frac{i}{5}\left(\frac{\operatorname{sen}(\cos(\pi/10)\ln(a)+\pi/10)}{e^{\operatorname{sen}(\pi/10)\ln(a)}}+\frac{\operatorname{sen}(\cos(3\pi/10)\ln(a)+3\pi/10)}{e^{\operatorname{sen}(3\pi/10)\ln(a)}}+\frac{i}{2a}\right).
\end{aligned}
$$

Quindi l'integrale del problema vale

$$
\int_{-\infty}^{\infty}\frac{a^{ix}}{x^{10}+1}dx=\frac{2\pi}{5}\left(\frac{\operatorname{sen}(\cos(\pi/10)\ln(a)+\pi/10)}{e^{\operatorname{sen}(\pi/10)\ln(a)}}+\frac{\operatorname{sen}(\cos(3\pi/10)\ln(a)+3\pi/10)}{e^{\operatorname{sen}(3\pi/10)\ln(a)}}+\frac{i}{2a}\right).
$$

Questo risultato coincidente con l'espressione cercata.

## Sesto problema (punteggio massimo: 3/30)

Con il metodo dei residui si calcoli la somma della serie

$$
\Phi=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{\cos(k\pi/4)}{k^4}.
$$

### Soluzione del sesto Problema

Al fine di usare il metodo dei residui, definiamo la funzione $f(z)$ scrivendo la serie nella forma

$$
\Phi=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k f(k),
$$

da cui si ha

$$
f(z)=\frac{\cos(z\pi/4)}{z^4}.
$$

Consideriamo la successione di integrali

$$
\left\{\frac{1}{2i\pi}\oint_{|z|=(n+1/2)}\frac{\cos(z\pi/4)}{z^4}\frac{\pi}{\operatorname{sen}(z\pi)}dz\right\}_{n=1}^{\infty},
$$

la cui convergenza a zero, al divergere $n$ all'infinito, è facilmente verificabile. Infatti, sfruttando i lemmi di integrazione sugli archi, sulla circonferenza centrata nell'origine di raggio $(n+1/2)$, con $n\in\mathbb{N}$, e usando la rappresentazione cartesiana $z=x+iy$, si ha che le limitazioni

$$
\left|\frac{\cos(z\pi/4)}{z^4}\frac{z\pi}{\operatorname{sen}(z\pi)}\right|=\frac{\pi}{(n+1/2)^3}\left|\frac{e^{ix\pi/4-y\pi/4}+e^{-ix\pi/4+y\pi/4}}{e^{ix\pi-y\pi}-e^{-ix\pi+y\pi}}\right|\begin{cases}\sim\dfrac{\pi e^{-3\pi y/4}}{(n+1/2)^3} & \text{con: } y>,\text{ e } n,y\to\infty\\[2ex] \le\dfrac{\pi}{(n+1/2)^3} & y=0,\ x=\pm\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\to\pm\infty\\[2ex] \sim\dfrac{\pi e^{3\pi y/4}}{(n+1/2)^3} & \text{con: } y<,\text{ e } -n,y\to-\infty\end{cases},
$$

implicano

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2i\pi}\oint_{|z|=(n+1/2)}\frac{\cos(z\pi/4)}{z^4}\frac{\pi}{\mathrm{sen}(z\pi)}dz=0\,.$$

Gli integrali della successione posso essere calcolati con il teorema dei residui. La funzione integranda è meromorfa e ha poli semplici nei punti delle successioni $\{z_k=k\}_{k=1}^{\infty}$ e $\{z_{-k}=-k\}_{k=1}^{\infty}$, e un polo di ordine cinque nell'origine $z_0=0$. Il percorso d'integrazione, ovvero la circonferenza centrata nell'origine di raggio $(n+1/2)$, avvolge una sola volta i $(2n+1)$ poli dell'insieme $\{z_k=k\}_{k=-n}^{n}$, ne consegue che

$$\frac{1}{2i\pi}\oint_{|z|=(n+1/2)}\frac{\cos(z\pi/4)}{z^4}\frac{\pi}{\mathrm{sen}(z\pi)}dz=\sum_{k=-n}^{n}\mathrm{Res}\left[\frac{\cos(z\pi/4)}{z^4}\frac{\pi}{\mathrm{sen}(z\pi)},z=k\right].$$

I residui dei poli semplici sono

$$\mathrm{Res}\left[\frac{\cos(z\pi/4)}{z^4}\frac{\pi}{\mathrm{sen}(z\pi)},z=k\right]=(-1)^k\frac{\cos(k\pi/4)}{k^4}\,,\qquad k\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}\,,$$

in particolare, per la parità della funzione integranda, non dipendono dal segno di $k\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}$, cioè

$$\mathrm{Res}\left[\frac{\cos(z\pi/4)}{z^4}\frac{\pi}{\mathrm{sen}(z\pi)},z=k\right]=\mathrm{Res}\left[\frac{\cos(z\pi/4)}{z^4}\frac{\pi}{\mathrm{sen}(z\pi)},z=-k\right]=(-1)^k\frac{\cos(k\pi/4)}{k^4}\,.$$

Alla luce di questi risultati si ha

$$0=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2i\pi}\oint_{|z|=(n+1/2)}\frac{\cos(z\pi/4)}{z^4}\frac{\pi}{\mathrm{sen}(z\pi)}dz=2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{\cos(k\pi/4)}{k^4}+\mathrm{Res}\left[\frac{\cos(z\pi/4)}{z^4}\frac{\pi}{\mathrm{sen}(z\pi)},z=0\right],$$

da cui si ottiene la somma della serie

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{\cos(k\pi/4)}{k^4}=-\frac{1}{2}\mathrm{Res}\left[\frac{\cos(z\pi/4)}{z^4}\frac{\pi}{\mathrm{sen}(z\pi)},z=0\right].$$

Calcoliamo il residuo nell'origine come coefficiente della potenza $z^{-1}$ della serie di Laurent della funzione integranda centrata nell'origine e convergente in un suo intorno. Ne ricaviamo il valore usando le serie di Taylor delle funzioni trigonometriche. In particolare, nel limite $z\to 0$,

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{z^4}\frac{\cos(z\pi/4)}{\mathrm{sen}(z\pi)}&=\frac{\pi}{z^4}\left[1-\frac{1}{2!}\left(\frac{z\pi}{4}\right)^2+\frac{1}{4!}\left(\frac{z\pi}{4}\right)^4+\cdots\right]\left[z\pi-\frac{1}{3!}(z\pi)^3+\frac{1}{5!}(z\pi)^5+\cdots\right]^{-1}\\&=\frac{1}{z^5}\left(1-\frac{1}{2!}\left(\frac{z\pi}{4}\right)^2+\frac{1}{4!}\left(\frac{z\pi}{4}\right)^4+\cdots\right)\left[1+\left(\frac{1}{3!}(z\pi)^2-\frac{1}{5!}(z\pi)^4+\cdots\right)\right.\\&\qquad\left.+\left(\frac{1}{3!}(z\pi)^2-\frac{1}{5!}(z\pi)^4+\cdots\right)^2+\cdots\right],\end{aligned}$$

il coefficiente cercato è quello della potenza $z^4$ che si ottiene dal prodotto degli ultimi due fattori, in particolare si ha

$$\begin{aligned}&\frac{1}{z^5}\left(1-\frac{1}{2!}\left(\frac{z\pi}{4}\right)^2+\frac{1}{4!}\left(\frac{z\pi}{4}\right)^4+\cdots\right)\left[1+\left(\frac{1}{3!}(z\pi)^2-\frac{1}{5!}(z\pi)^4+\cdots\right)+\left(\frac{1}{3!}(z\pi)^2-\frac{1}{5!}(z\pi)^4+\cdots\right)^2+\cdots\right]\\&=\cdots+\frac{1}{z}\pi^4\left(-\frac{1}{5!}+\frac{1}{(3!)^2}-\frac{1}{2!}\frac{1}{4^2}\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!4^4}\right)+\cdots\\&=\cdots+\frac{1}{z}\frac{1327\pi^4}{92160}+\cdots,\end{aligned}$$

le linee colorate indicano i termini dal cui prodotto si ricava ciascun contributo. Il coefficiente così ottenuto coincide con il residuo nell'origine, quindi la somma della serie vale

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{\cos(k\pi/4)}{k^4}=-\frac{1327\pi^4}{184320}\,.$$