

METODI MATEMATICI PER LA FISICA

PRIMA PROVA PARZIALE - 28 FEBBRAIO 2022

Si risolvano cortesemente i seguenti problemi, sapendo che il punteggio assegnato a ciascuna procedura di risoluzione può variare tra lo zero e il massimo indicato ed è stabilito valutando:

1. la correttezza del risultato ottenuto e della procedura utilizzata;
2. la completezza dei passaggi riportati;
3. il livello di semplificazione con cui sono espressi i risultati (ad esempio un risultato numerico reale non deve contenere l'unità immaginaria);
4. la correttezza del formalismo utilizzato;
5. la chiarezza dell'esposizione e la leggibilità del testo.

PRIMO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 3/30)

Si calcoli l'integrale in valore principale

$$\Xi = \text{Pr} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\alpha}{\tan(\alpha) + 1}.$$

SOLUZIONE DEL PRIMO PROBLEMA

Portiamo l'integrale nel piano complesso con il cambiamento di variabile $z = e^{i\alpha}$, da cui: $\alpha = -i \ln(z)$ e $d\alpha = -idz/z$ e quindi il percorso d'integrazione diventa la circonferenza unitaria orientata in senso positivo, ovvero anti-orario. Usando l'espressione in termini degli esponenziali della funzione tangente si ha

$$\Xi = \text{Pr} \oint_{|z|=1} \frac{-idz/z}{-i(z - 1/z)/(z + 1/z) + 1}.$$

Possiamo riscrivere l'integrale manipolando algebricamente la funzione integranda, che, con $z \neq 0$, condizione verifica sul percorso d'integrazione, diventa

$$\begin{aligned} \Xi &= \text{Pr} \oint_{|z|=1} \frac{-idz/z}{-i(z - 1/z)/(z + 1/z) + 1} = \text{Pr} \oint_{|z|=1} \frac{(z^2 + 1)dz}{z[z^2 - 1 + i(z^2 + 1)]} \\ &= \text{Pr} \oint_{|z|=1} \frac{(z^2 + 1)dz}{z(z^2(1 + i) - 1 + i)} = \frac{1}{1 + i} \text{Pr} \oint_{|z|=1} \frac{(z^2 + 1)dz}{z(z^2 - (1 - i)/(1 + i))} \\ &= \frac{1}{1 + i} \text{Pr} \oint_{|z|=1} \frac{(z^2 + 1)dz}{z(z^2 + i)}. \end{aligned}$$

In questa forma è evidente la presenza di due poli semplici nei punti $z_{\pm} = \pm\sqrt{-i}$, cioè $z_- = e^{-i\pi/4}$ e $z_+ = e^{3i\pi/4}$ del percorso d'integrazione ed è rispetto a questi che va considerato il valore principale. Definiamo il percorso chiuso Γ_{ϵ} , che si ottiene "dentando" internamente, in corrispondenza dei poli, con archi di raggio ϵ la circonferenza unitaria, ovvero

$$\Gamma_{\epsilon} = \{z : z = e^{i\theta}, \theta \in [-\pi, -\pi/4 - \epsilon] \cup [-\pi/4 + \epsilon, 3\pi/4 - \epsilon] \cup [3\pi/4 + \epsilon, \pi]\} \cup (-\gamma_{\epsilon}^+) \cup (-\gamma_{\epsilon}^-),$$

γ_{ϵ}^{\pm} sono gli archi centrati nei poli $z = z_{\pm}$, in dettaglio

$$\begin{aligned} \gamma_{\epsilon}^- &= \{z : z = e^{-i\pi/4} + \epsilon e^{i\phi}, \phi \in [\pi/4 + \epsilon^2, 5\pi/4 - \epsilon^2]\}, \\ \gamma_{\epsilon}^+ &= \{z : z = e^{3i\pi/4} + \epsilon e^{i\phi}, \phi \in [-3\pi/4 + \epsilon^2, \pi/4 - \epsilon^2]\}. \end{aligned}$$

In questa e nella precedente espressione il segno meno indica il verso di percorrenza negativo, cioè il verso orario. Il percorso chiuso Γ_{ϵ} avvolge una sola volta il polo semplice nell'origine della funzione integranda. Ne consegue che,

usando il teorema dei residui e i lemmi per l'integrazione sugli archi, nel limite $\epsilon \rightarrow 0^+$, si ha

$$\begin{aligned}\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{1+i} \oint_{\Gamma_\epsilon} \frac{(z^2+1)dz}{z(z^2+i)} &= \Xi + \frac{1}{1+i} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{-\gamma_\epsilon^-} \frac{(z^2+1)dz}{z(z^2+i)} + \int_{-\gamma_\epsilon^+} \frac{(z^2+1)dz}{z(z^2+i)} \right) \\ &= \Xi - \frac{1}{1+i} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{\gamma_\epsilon^-} \frac{(z^2+1)dz}{z(z^2+i)} + \int_{\gamma_\epsilon^+} \frac{(z^2+1)dz}{z(z^2+i)} \right) \\ &= 2i\pi \frac{1}{1+i} \text{Res} \left[\frac{z^2+1}{z(z^2+i)}, z=0 \right]\end{aligned}$$

e dell'identità degli ultimi due membri si ottiene il valore dell'integrale Ξ come

$$\Xi = \frac{2i\pi}{1+i} \text{Res} \left[\frac{z^2+1}{z(z^2+i)}, z=0 \right] + \frac{1}{1+i} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{\gamma_\epsilon^-} \frac{(z^2+1)dz}{z(z^2+i)} + \int_{\gamma_\epsilon^+} \frac{(z^2+1)dz}{z(z^2+i)} \right).$$

Gli integrali sui percorsi γ_ϵ^\pm si calcolano sfruttando i lemmi d'integrazione sugli archi e quindi

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\gamma_\epsilon^\pm} \frac{(z^2+1)dz}{z(z^2+i)} = i\pi \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{z^2+1}{z(z^2+i)} (z - z_\pm) = i\pi \frac{z_\pm^2+1}{2z_\pm^2} = i\pi \frac{-i+1}{-2i} = i\pi \frac{1+i}{2}.$$

Mentre, per il residuo nell'origine si ha

$$\text{Res} \left[\frac{z^2+1}{z(z^2+i)}, z=0 \right] = -i.$$

Ne consegue che l'integrale cercato vale

$$\Xi = \frac{2i\pi}{1+i} \underbrace{\text{Res} \left[\frac{z^2+1}{z(z^2+i)}, z=0 \right]}_{=-i} + \frac{1}{1+i} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \underbrace{\left(\int_{\gamma_\epsilon^-} \frac{(z^2+1)dz}{z(z^2+i)} + \int_{\gamma_\epsilon^+} \frac{(z^2+1)dz}{z(z^2+i)} \right)}_{=i\pi(1+i)} = \frac{2\pi}{1+i} + i\pi,$$

ovvero

$$\Xi = \pi.$$

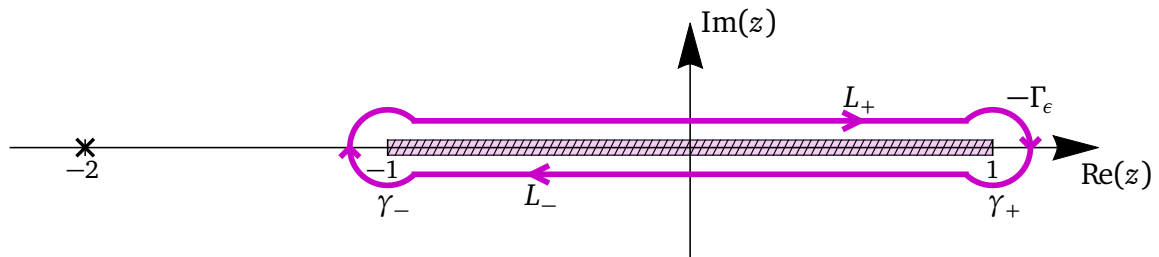
SECONDO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 3/30)

Si calcoli l'integrale

$$P = \int_{-1}^1 \frac{2+x}{2-x} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx.$$

SOLUZIONE DEL SECONDO PROBLEMA

La funzione integranda è polidroma e ha punti di diramazione di ordine uno in $x = \pm 1$.



Consideriamo il percorso chiuso Γ_ϵ orientato in senso orario e quindi negativo, mostrato in figura costituito dall'unione

di due tratti rettilinei simmetrici rispetto all'asse reale e due archi simmetrici rispetto all'asse immaginario. In dettaglio si ha $\Gamma_\epsilon = L_+ \cup (-\gamma_+) \cup L_- \cup (-\gamma_-)$, con

$$\begin{aligned} L^\pm &= [\mp 1 \pm i\epsilon, \pm 1 \pm i\epsilon], \\ \gamma_- &= \{z : z = -1 + \epsilon e^{i\theta}, \theta \in [\epsilon^2, 2\pi - \epsilon^2]\}, \\ \gamma_+ &= \{z : z = 1 + \epsilon e^{i\theta}, \theta \in [-\pi + \epsilon^2, \pi - \epsilon^2]\}. \end{aligned}$$

Il simbolo $[z_1, z_2]$ indica il segmento rettilineo di estremi z_1 e z_2 orientato nel verso che va dal primo al secondo estremo. La funzione integranda ha una sola singolarità al finito, il polo semplice in $z = -2$. Ne consegue che l'integrale sul percorso $-\Gamma_\epsilon$, orientato negativamente, coincide con $2i\pi$ -volte la somma dei residui avvolti dal percorso $-\Gamma_\epsilon$ e quindi esterni a questo. Inoltre, poiché il valore dell'integrale non dipende dal parametro ϵ , è lecito considerare il limite per $\epsilon \rightarrow 0^+$, si ha cioè

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \oint_{-\Gamma_\epsilon} \frac{2+z}{2-z} \sqrt{\frac{1+z}{1-z}} dz = 2i\pi \left(\text{Res} \left[\frac{2+z}{2-z} \sqrt{\frac{1+z}{1-z}}, z=2 \right] + \text{Res} \left[\frac{2+z}{2-z} \sqrt{\frac{1+z}{1-z}}, z=\infty \right] \right).$$

Lo stesso integrale limite, può essere scritto come la somma dei contributi relativi ai tratti rettilinei e agli archi che compongono il percorso Γ_ϵ , ovvero

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \oint_{-\Gamma_\epsilon} \frac{2+z}{2-z} \sqrt{\frac{1+z}{1-z}} dz = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(\sum_{\sigma=L_-, L_+, -\gamma_-, -\gamma_+} \int_\sigma \frac{2+z}{2-z} \sqrt{\frac{1+z}{1-z}} dz \right).$$

Al fine di calcolare i singoli contributi, definiamo i binomi, il cui rapporto rappresenta l'argomento della radice quadrata, in modo tale che la regione di discontinuità che taglieremo e quindi escluderemo dal dominio, coincida con il segmento reale $[-1, 1]$, cioè con il percorso d'integrazione dell'integrale P del problema. La radice quadrata di ciascuno dei binomi $z+1$ e $1-z$, essendo entrambi polinomi di primo grado, ha una regione di discontinuità che si origina nell'unico zero, ovvero, come anticipato, in $z = -1$ per il numeratore e $z = 1$ per il denominatore, che sono punti di diramazione di ordine uno. Scegliamo le fasi dei binomi in modo che i tagli generati siano entrambi lungo l'asse reale e si estendano all'infinito nel verso positivo, cioè

$$\begin{aligned} z+1 &= |z+1|e^{i\theta_1}, & \theta_1 &\in (0, 2\pi), \\ 1-z &= |z-1|e^{i\theta_2}, & \theta_2 &\in (-\pi, \pi). \end{aligned}$$

Per il secondo binomio la scelta ricade sulla determinazione $(-\pi, \pi)$ poiché in esso la z compare con il segno negativo. I tagli, che sono rispettivamente $T_\pm = [\pm 1, \infty)$, si cancellano sull'intersezione, che coincide con T_+ , ne consegue che la regione di discontinuità, ovvero il taglio risultante è il segmento reale $[-1, 1) = T_- \setminus T_+$.

Le fasi $\theta_{1,2}$ sul bordo superiore del taglio risultante, quindi su L_+ , hanno i valori limite: $\theta_1 \rightarrow 0^+$ e $\theta_2 \rightarrow 0^-$. Sul bordo inferiore, invece, $\theta_1 \rightarrow 2\pi^-$ e $\theta_2 \rightarrow 0^+$. Alla luce di queste considerazioni, i valori limite degli integrali sui tratti rettilinei sono

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{L_+} \frac{2+z}{2-z} \sqrt{\frac{1+z}{1-z}} dz &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{-1}^1 \frac{2+x+i\epsilon}{2-x-i\epsilon} \sqrt{\frac{|1+x+i\epsilon|}{|1-x-i\epsilon|}} \underbrace{e^{i(\theta_1-\theta_2)/2}}_{e^{i(0-0)/2}=1} dx = \int_{-1}^1 \frac{2+x}{2-x} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx = P, \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{L_-} \frac{2+z}{2-z} \sqrt{\frac{1+z}{1-z}} dz &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_1^{-1} \frac{2+x-i\epsilon}{2-x+i\epsilon} \sqrt{\frac{|1+x-i\epsilon|}{|1-x+i\epsilon|}} \underbrace{e^{i(\theta_1-\theta_2)/2}}_{e^{i(2\pi-0)/2}=-1} dx = \int_{-1}^1 \frac{2+x}{2-x} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx = P, \end{aligned}$$

nel secondo integrale il fattore $e^{i\pi} = -1$ compensa il cambiamento di segno dovuto all'inversione degli estremi d'integrazione.

Gli integrali sugli archi γ_\pm , invece, sono nulli nel limite $\epsilon \rightarrow 0^+$. Infatti, per il contributo su γ_- , posto $z = -1 + \epsilon e^{i\theta}$, si ha

$$\left| \frac{2+z}{2-z} \sqrt{\frac{1+z}{1-z}} (z+1) \right| = \left| \frac{1+\epsilon e^{i\theta}}{3-\epsilon e^{i\theta}} \frac{\epsilon^{3/2} e^{3i\theta/2}}{\sqrt{2-\epsilon e^{i\theta}}} \right| = \frac{|1+\epsilon e^{i\theta}|}{|3-\epsilon e^{i\theta}|} \frac{|\epsilon^{3/2} e^{3i\theta/2}|}{|\sqrt{2-\epsilon e^{i\theta}}|} \leq \frac{1+\epsilon}{|3-\epsilon|} \frac{\epsilon^{3/2}}{\sqrt{|2-\epsilon|}} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0^+} 0.$$

Mentre per il contributo su γ_+ , posto $z = 1 + \epsilon e^{i\theta}$, si ha

$$\left| \frac{2+z}{2-z} \sqrt{\frac{1+z}{1-z}} (z-1) \right| = \left| \frac{3+\epsilon e^{i\theta}}{1-\epsilon e^{i\theta}} \sqrt{-2\epsilon e^{i\theta} - \epsilon^2 e^{2i\theta}} \right| = \frac{|3+\epsilon e^{i\theta}|}{|1-\epsilon e^{i\theta}|} \left| \sqrt{-\epsilon e^{i\theta} (2+\epsilon e^{i\theta})} \right| \leq \frac{3+\epsilon}{|1-\epsilon|} \sqrt{\epsilon (2+\epsilon)} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0^+} 0.$$

Questi due risultati, considerando il lemmi d'integrazione sugli archi, implicano

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\gamma_{\pm}} \frac{2+z}{2-z} \sqrt{\frac{1+z}{1-z}} dz = 0.$$

Da cui si ha il valore limite dell'integrale sul percorso chiuso Γ_{ϵ} completo

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \oint_{-\Gamma_{\epsilon}} \frac{2+z}{2-z} \sqrt{\frac{1+z}{1-z}} dz = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(\sum_{\sigma=L_-, L_+, -\gamma_-, -\gamma_+} \int_{\sigma} \frac{2+z}{2-z} \sqrt{\frac{1+z}{1-z}} dz \right) = 2P.$$

Usando l'espressione dello stesso valore limite in termini dei residui

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \oint_{-\Gamma_{\epsilon}} \frac{2+z}{2-z} \sqrt{\frac{1+z}{1-z}} dz = 2i\pi \left(\text{Res} \left[\frac{2+z}{2-z} \sqrt{\frac{1+z}{1-z}}, z=2 \right] + \text{Res} \left[\frac{2+z}{2-z} \sqrt{\frac{1+z}{1-z}}, z=\infty \right] \right),$$

si ottiene l'integrale cercato come

$$P = i\pi \left(\text{Res} \left[\frac{2+z}{2-z} \sqrt{\frac{1+z}{1-z}}, z=2 \right] + \text{Res} \left[\frac{2+z}{2-z} \sqrt{\frac{1+z}{1-z}}, z=\infty \right] \right).$$

Il residuo nel polo semplice $z=2$ è

$$\text{Res} \left[\frac{2+z}{2-z} \sqrt{\frac{1+z}{1-z}}, z=2 \right] = \lim_{z \rightarrow 2} \frac{2+z}{2-z} \sqrt{\frac{1+z}{1-z}} (z-2) = -\lim_{z \rightarrow 2} (2+z) \sqrt{\frac{|1+z|}{|1-z|}} e^{i(\theta_1 - \theta_2)/2},$$

le fasi sopra e sotto l'asse reale hanno rispettivamente i valori limite: $\theta_1 \rightarrow 0^+$, $2\pi^-$ e $\theta_2 \rightarrow -\pi^+$, π^- , quindi le differenze tendono, rispettivamente da sotto a da sopra, allo stesso valore: $(\theta_1 - \theta_2) \rightarrow \pi^-$, π^+ e per il residuo si ha

$$\text{Res} \left[\frac{2+z}{2-z} \sqrt{\frac{1+z}{1-z}}, z=2 \right] = -\lim_{z \rightarrow 2} (2+z) \sqrt{\frac{|1+z|}{|1-z|}} e^{i(\theta_1 - \theta_2)/2} = -4\sqrt{3}i.$$

Il residuo all'infinito lo otteniamo come

$$\begin{aligned} \text{Res}[f(z), z=\infty] &= -\text{Res} \left[\frac{f(1/w)}{w^2}, w=0 \right] = -\text{Res} \left[\frac{2w+1}{(2w-1)w^2} \sqrt{\frac{w+1}{w-1}}, w=0 \right] \\ &= -\frac{1}{2i\pi} \oint_{|w|=r} \frac{2w+1}{(2w-1)w^2} \sqrt{\frac{w+1}{w-1}} dw \end{aligned}$$

con $r < 1$. L'origine $w=0$ rappresenta un polo di ordine due per la funzione integranda, quindi l'integrale può essere calcolato usando la formula integrale di Cauchy per le derivate, cioè

$$\begin{aligned} \text{Res}[f(z), z=\infty] &= -\frac{d}{dw} \frac{2w+1}{2w-1} \sqrt{\frac{w+1}{w-1}} \Big|_{w=0} \\ &= -\frac{2}{2w-1} \sqrt{\frac{w+1}{w-1}} \Big|_{w=0} + 2 \frac{2w+1}{(2w-1)^2} \sqrt{\frac{w+1}{w-1}} \Big|_{w=0} - \frac{1}{2} \frac{2w+1}{2w-1} \sqrt{\frac{w+1}{w-1}} \frac{1}{w+1} \Big|_{w=0} \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{2w+1}{2w-1} \sqrt{\frac{w+1}{w-1}} \frac{1}{w-1} \Big|_{w=0}. \end{aligned}$$

I valori delle fasi dei binomi $w+1$ e $w-1$ il cui rapporto rappresenta l'argomento della radice quadrata deve essere scelto coerentemente con quelli fissati per ottenere il residuo nel polo semplice in $z=2$. Usando le espressioni

$$w+1 = |w+1|e^{i\alpha_1}, \quad w-1 = |w-1|e^{i\alpha_2}, \quad \sqrt{\frac{w+1}{w-1}} = \sqrt{\frac{|w+1|}{|w-1|}} e^{i(\alpha_1 - \alpha_2)/2},$$

otteniamo il valore della differenza $(\alpha_1 - \alpha_2)$ nell'origine, richiedendo che valga

$$\begin{aligned} -4\sqrt{3}i &= \text{Res} \left[\frac{2+z}{2-z} \sqrt{\frac{1+z}{1-z}} z = 2 \right] = \frac{1}{2i\pi} \oint_{|z-2|=r} \frac{2+z}{2-z} \sqrt{\frac{1+z}{1-z}} dz = -\frac{1}{2i\pi} \oint_{|w-1/2|=r'} \frac{2w+1}{(2w-1)w^2} \sqrt{\frac{w+1}{w-1}} dw \\ &= -\text{Res} \left[\frac{2w+1}{(2w-1)w^2} \sqrt{\frac{w+1}{w-1}}, w = 1/2 \right] = -\lim_{w \rightarrow 1/2} \frac{2w+1}{(2w-1)w^2} \sqrt{\frac{w+1}{w-1}} (w - 1/2) \\ &= -\frac{2}{2/4} \sqrt{\frac{3/2}{1/2}} e^{i(\alpha_1 - \alpha_2)/2} = -4\sqrt{3}e^{i(\alpha_1 - \alpha_2)/2}, \end{aligned}$$

da cui $e^{i(\alpha_1 - \alpha_2)/2} = i$ in $w = 1/2$ ma anche $w = 0$ in quanto entrambi i punti sono singolarità isolate appartenenti all'intervallo reale $[-1, 1]$ in cui non si hanno discontinuità, ovvero tagli. Il taglio $[-1, 1)$ nel piano complesso z si trasforma nell'unione dei due tagli "esterni" $(-\infty, -1] \cup (1, \infty)$. Da ciò segue che nell'origine $w = 0$ si ha

$$\sqrt{\frac{w+1}{w-1}} \Big|_{w=0} = e^{i(\alpha_1 - \alpha_2)/2} = i.$$

In definitiva il residuo all'infinito vale

$$\begin{aligned} \text{Res}[f(z), z = \infty] &= -\frac{2}{2w-1} \sqrt{\frac{w+1}{w-1}} \Big|_{w=0} + 2 \frac{2w+1}{(2w-1)^2} \sqrt{\frac{w+1}{w-1}} \Big|_{w=0} - \frac{1}{2} \frac{2w+1}{2w-1} \sqrt{\frac{w+1}{w-1}} \frac{1}{w+1} \Big|_{w=0} \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{2w+1}{2w-1} \sqrt{\frac{w+1}{w-1}} \frac{1}{w-1} \Big|_{w=0} = i \left(2 + 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = 5i \end{aligned}$$

l'integrale cercato è

$$P = \pi(4\sqrt{3} - 5).$$

TERZO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 3/30)

Si determini lo sviluppo di Mittag-Leffler della funzione

$$s(z) = \frac{1}{\text{sen}(z) \sinh(z)}.$$

SOLUZIONE DEL TERZO PROBLEMA

La funzione è meromorfa, ha poli in corrispondenza degli zeri delle funzioni seno e seno iperbolico il cui prodotto ne costituisce il denominatore. Si hanno, quindi, due insiemi di poli $\{r_k = k\pi\}_{k \in \mathbb{Z}}$ e $\{c_k = ik\pi\}_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}}$ disposti rispettivamente lungo gli assi reale e immaginario. L'origine, $r_0 = 0$, che è inclusa nell'insieme dei poli reali, è l'unico polo di secondo ordine, tutti gli altri sono poli semplici. I residui dei poli reali diversi dall'origine, cioè con $k \neq 0$, sono

$$R_k = \text{Res} \left[\frac{1}{\text{sen}(z) \sinh(z)}, r_k \right] = \lim_{z \rightarrow r_k} \frac{(z - r_k)}{\text{sen}(z) \sinh(z)} = \frac{(-1)^k}{\sinh(r_k)} = \frac{(-1)^k}{\sinh(k\pi)}, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

Quelli dei poli immaginari puri,

$$C_k = \text{Res} \left[\frac{1}{\text{sen}(z) \sinh(z)}, c_k \right] = \lim_{z \rightarrow c_k} \frac{(z - c_k)}{\text{sen}(z) \sinh(z)} = \frac{(-1)^k}{\text{sen}(c_k)} = \frac{(-1)^k}{\text{sen}(ik\pi)} = \frac{-i(-1)^k}{\sinh(k\pi)} = -iR_k, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

Nel caso del polo doppio $r_0 = 0$ la parte principale della serie di Laurent da includere nello sviluppo di Mittag-Leffler, che possiede due termini, può essere dedotta direttamente dalle serie di Taylor delle funzioni seno e seno iperbolico. Sfruttando anche la somma della serie geometrica, nel limite $z \rightarrow 0$, avremo

$$\begin{aligned} s(z) &= \frac{1}{\text{sen}(z) \sinh(z)} = \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots \right)^{-1} \left(z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots \right)^{-1} \\ &= \frac{1}{z^2} \left(1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \dots \right)^{-1} \left(1 + \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \dots \right)^{-1} = \frac{1}{z^2} \left[1 - \left(\frac{z^2}{3!} - \frac{z^4}{5!} + \dots \right) \right]^{-1} \left[1 + \left(\frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \dots \right) \right]^{-1} \\ &= \frac{1}{z^2} \left[1 + \left(\frac{z^2}{3!} - \frac{z^4}{5!} + \dots \right) + \left(\frac{z^2}{3!} - \frac{z^4}{5!} + \dots \right)^2 + \dots \right] \left[1 - \left(\frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \dots \right) + \left(\frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \dots \right)^2 + \dots \right]. \end{aligned}$$

È immediato osservare che, come conseguenza dalla parità della funzione $s(z)$, ovvero dalla sua invarianza rispetto alla trasformazione $z \rightarrow -z$ per cui $s(z) = s(-z)$, la potenza z^{-1} non sia presente in tale parte principale, che quindi consta del solo termine in z^{-2} . Il coefficiente di tale potenza si ottiene considerando i prodotti dei termini delle parentesi quadre non contenenti la z , cioè proporzionali alla potenza nulla z^0 , l'unico prodotto con questa proprietà è quello tra le due unità e quindi si ha

$$s(z) = \frac{1}{z^2} + \mathcal{O}(1).$$

Alla luce di questo e dei precedenti risultati, lo sviluppo di Mittag-Leffler può essere ulteriormente definito come

$$s(z) = \sigma(z) + \frac{1}{z^2} + \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left(\frac{R_k}{z - r_k} + \frac{C_k}{z - c_k} \right) = \sigma(z) + \frac{1}{z^2} + \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{(-1)^k}{\sinh(k\pi)} \left(\frac{1}{z - k\pi} + \frac{-i}{z - ik\pi} \right),$$

dove la funzione $\sigma(z)$ rappresenta la parte intera della funzione $s(z)$, avente lo stesso comportamento asintotico, cioè

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \sigma(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} s(z).$$

La funzione $s(z)$ è regolare all'infinito, infatti, il limite sui punti della successione dei multipli dispari di $\pi/2$, $\{(2k+1)\pi/2\}_{k=0}^{\infty}$, che si accumula monotonamente all'infinito, avendo intersezione vuota con l'insieme dei poli, non è divergente. Questo può essere evinto dalla limitazione del modulo del termine k -esimo, con $k \in \mathbb{N}$, della stessa successione

$$|s((2k+1)\pi/2)| = \left| \frac{1}{\sinh((2k+1)\pi/2)} \right| = \frac{2}{|e^{(2k+1)\pi/2} - e^{-(2k+1)\pi/2}|} \leq \frac{2}{e^{(2k+1)\pi/2} - e^{-(2k+1)\pi/2}} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

Ne consegue che la funzione $\sigma(z)$ è costante e ne indichiamo il valore con: $\sigma(z) = \sigma_0$. Possiamo ottenere σ_0 valutando la stessa funzione $s(z)$ e lo sviluppo di Mittag-Leffler in un punto opportuno. Solitamente, si usa la valutazione nell'origine, in questo caso però l'origine rappresenta un polo doppio. Ciononostante, potremmo considerare il valore nell'origine della differenza $s(z) - 1/z^2$, che, come risulta deducibile dalla serie di Laurent centrata appunto nell'origine, la cui parte principale è stata precedentemente ricavata, è costante. Tale valore si ottiene dall'espressione della funzione $s(z)$ mostra all'inizio di questa pagina, esso rappresenta il coefficiente "zero", quello della potenza z^0 , della serie di Laurent. Anche questo coefficiente, come quello della potenza z^{-1} , è nullo, infatti

$$s(z) = \frac{1}{z^2} + \left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{3!} \right) + \left(-\frac{1}{5!} - \frac{1}{5!} - \frac{1}{(3!)^2} + \frac{1}{(3!)^2} + \frac{1}{(3!)^2} \right) z^2 + \mathcal{O}(z^4) = \frac{1}{z^2} + \frac{z^2}{90} + \mathcal{O}(z^2),$$

la prima potenza non negativa della serie di Laurent è z^2 . Si ha allora che anche la costante σ_0 è nulla, infatti

$$0 = \lim_{z \rightarrow 0} \left(s(z) - \frac{1}{z^2} \right) = \sigma_0 + \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{(-1)^k}{\sinh(k\pi)} \left(\frac{1}{-k\pi} + \frac{-i}{-ik\pi} \right) \Rightarrow \sigma_0 = \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{(-1)^k}{\sinh(k\pi)} \left(\frac{1}{k\pi} + \frac{-i}{ik\pi} \right) = 0.$$

Lo sviluppo di Mittag-Leffler completo è

$$s(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{(-1)^k}{\sinh(k\pi)} \left(\frac{1}{z - k\pi} + \frac{-i}{z - ik\pi} \right).$$

Può essere ulteriormente semplificato separando nella somma i termini con indici positivi e negativi, sfruttando la parità dei coefficienti e sommando opportunamente le coppie di poli opposti nelle variabile z , prima, e z^2 , poi, si ha

$$\begin{aligned} s(z) &= \frac{1}{z^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sinh(k\pi)} \left(\frac{1}{z - k\pi} + \frac{-i}{z - ik\pi} - \frac{1}{z + k\pi} - \frac{-i}{z + ik\pi} \right) \\ &= \frac{1}{z^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sinh(k\pi)} \left(\frac{2k\pi}{z^2 - k^2\pi^2} + \frac{-i(2ik\pi)}{z^2 + k^2\pi^2} \right) \\ &= \frac{1}{z^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 2k\pi}{\sinh(k\pi)} \frac{2z^2}{z^4 - k^4\pi^4}, \end{aligned}$$

in definitiva

$$s(z) = \frac{1}{z^2} + 4\pi z^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k k}{\sinh(k\pi)} \frac{1}{z^4 - k^4 \pi^4}.$$

QUARTO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 3/30)

Si ottengano le espressioni dei coefficienti della serie di Laurent della funzione

$$g(z) = \frac{\operatorname{sen}(z)}{z^2 - 1},$$

centrata in $z_0 = 1$ e convergente in un intorno dello stesso z_0 .
Qual è il dominio di convergenza di questa serie di Laurent?

SOLUZIONE DEL QUARTO PROBLEMA

La funzione $g(z)$ è meromorfa in quanto rapporto di funzioni intere e ha come uniche singolarità due poli semplici nei punti di $z_{\pm} = \pm 1$. Ne consegue che il dominio di convergenza della serie di Laurent centrata nel polo semplice $z = z_0 = z_+ = 1$ è la corona circolare $C = \{z : 0 < |z - 1| < 2\}$, centrata nello stesso polo $z_+ = 1$ di raggio interno nullo ed esterno pari alla distanza tra i due poli, cioè $|z_+ - z_-| = 2$.

Otteniamo la serie di Laurent usando la serie di Taylor della funzione seno e la somma della serie geometrica, dopo aver opportunamente manipolato la funzione $g(z)$ in modo da porla in una forma in cui la dipendenza dalla variabile z sia sempre espressa attraverso il binomio $(z - 1)$, si ha

$$g(z) = \frac{1}{2} \frac{\operatorname{sen}(z - 1 + 1)}{(z - 1)(1 + (z - 1)/2)}.$$

Usando le formule di somma della funzione seno e, come detto, quella della serie geometrica, nella condizione $0 < |z - 1| < 2$, ovvero per $z \in C$,

$$\begin{aligned} g(z) &= \frac{\operatorname{sen}(z - 1) \cos(1) + \cos(z - 1) \operatorname{sen}(1)}{2(z - 1)} \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{z - 1}{2}\right)^k \\ &= \frac{\operatorname{sen}(z - 1) \cos(1) + \cos(z - 1) \operatorname{sen}(1)}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^k (z - 1)^{k-1} \\ &= \frac{\cos(1)}{2} \sum_{k,j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{j+k}}{(2j+1)!} \frac{1}{2^k} (z - 1)^{2j+k} + \frac{\operatorname{sen}(1)}{2} \sum_{k,l=0}^{\infty} \frac{(-1)^{l+k}}{(2l)!} \frac{1}{2^k} (z - 1)^{2l+k-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n (z - 1)^n + \sum_{m=-1}^{\infty} B_m (z - 1)^m, \end{aligned}$$

l'ultima è un'identità formale. I due insiemi di coefficienti $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$ e $\{B_m\}_{m=-1}^{\infty}$, definiti nell'espressione precedente, si ottengono come

$$A_n = \frac{\cos(1)}{2} \sum_{k,j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{j+k}}{(2j+1)!} \frac{1}{2^k} \delta_{2j+k,n}, \quad B_m = \frac{\operatorname{sen}(1)}{2} \sum_{k,l=0}^{\infty} \frac{(-1)^{l+k}}{(2l)!} \frac{1}{2^k} \delta_{2l+k-1,m},$$

con $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e $m \in \mathbb{N} \cup \{-1, 0\}$. I simboli delta di Kronecker permettono di arrestare una delle due somme. Nel primo caso si ha la condizione $k = n - 2j$, da cui si ottiene che i valori dell'indice j sono vincolati dalla condizione di non negatività dell'indice $k \geq 0$, ovvero si ha: $2j \leq n$. Ciò implica che lo stesso indice j può variare da 0 fino alla parte intera di $n/2$, indicata con il simbolo $\operatorname{Int}[n/2]$. Nel secondo caso, la condizione imposta dal simbolo delta di Kronecker è $k = m + 1 - 2l$ e l può variare da -1 fino alla intera di $(m + 1)/2$, indicata con il simbolo $\operatorname{Int}[(m + 1)/2]$. Alla luce di questi risultati, le espressioni per i coefficienti degli insiemi $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$ e $\{B_m\}_{m=-1}^{\infty}$ sono

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{\cos(1)}{2} \left(-\frac{1}{2}\right)^n \sum_{j=0}^{\operatorname{Int}[n/2]} \frac{(-1)^{-j}}{(2j+1)!} \frac{1}{2^{-2j}} = \frac{\cos(1)}{2} \left(-\frac{1}{2}\right)^n \sum_{j=0}^{\operatorname{Int}[n/2]} \frac{(-4)^j}{(2j+1)!}, \\ B_m &= \frac{\operatorname{sen}(1)}{2} \left(-\frac{1}{2}\right)^{m+1} \sum_{l=0}^{\operatorname{Int}[(m+1)/2]} \frac{(-1)^{-l}}{(2l)!} \frac{1}{2^{-2l}} = \frac{\operatorname{sen}(1)}{2} \left(-\frac{1}{2}\right)^{m+1} \sum_{l=0}^{\operatorname{Int}[(m+1)/2]} \frac{(-4)^l}{(2l)!}, \end{aligned}$$

con $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e $m \in \mathbb{N} \cup \{-1, 0\}$. In definitiva, si ha la serie di Laurent

$$g(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k (z-1)^k,$$

dove il k -esimo coefficiente, con $k \in \mathbb{Z}$, è dato, in termini dei coefficienti degli insiemi $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$ e $\{B_m\}_{m=-1}^{\infty}$, dalla legge multipla

$$C_k = \begin{cases} 0 & \text{per } k < -1 \\ B_{-1} & \text{per } k = -1 \\ A_k + B_k & \text{per } k > -1 \end{cases}.$$

QUINTO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 3/30)

Si verifichi il seguente risultato

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{a^{ix}}{x^{10}+1} dx = \frac{2\pi}{5} \left(\frac{\operatorname{sen}(\cos(\pi/10)\ln(a) + \pi/10)}{a^{\operatorname{sen}(\pi/10)}} + \frac{\operatorname{sen}(\cos(3\pi/10)\ln(a) + 3\pi/10)}{a^{\operatorname{sen}(3\pi/10)}} + \frac{1}{2a} \right),$$

valido per ogni $a \in (1, \infty)$.

SOLUZIONE DEL QUINTO PROBLEMA

La funzione integranda ha 10 poli semplici coincidenti con le 10 radici decime di -1 , ovvero gli elementi dell'insieme $\{e^{(2k+1)i\pi/10}\}_{k=0}^9$, che ha intersezione vuota con l'asse reale. In particolare, i primi cinque punti, per $k = 0, 1, 2, 3, 4$, appartengono al semipiano delle parti immaginarie positive, gli ultimi cinque, con $k = 5, 6, 7, 8, 9$, al semipiano delle parti immaginarie negative. Le cinque coppie z_k e z_{9-k} , con $k = 0, 1, 2, 3, 4$ sono coppie di complessi coniugati, cioè $z_k = z_{9-k}^*$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$. Ad esempio con $k = 2$ si ha la coppia

$$z_{9-2} = z_7 = e^{3i\pi/2} = -i, \quad z_2 = e^{i\pi/2} = i = z_7^*.$$

L'integrale può essere calcolato usando il lemma di Jordan e quindi con il teorema dei residui, infatti

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{a^{ix}}{x^{10}+1} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix \ln(a)}}{x^{10}+1} dx = 2i\pi \begin{cases} \sum_{k=0}^4 \operatorname{Res} \left[\frac{e^{iz \ln(a)}}{z^{10}+1}, z = z_k \right] & \text{se: } \ln(a) > 0 \Leftrightarrow a \in (1, \infty) \\ \sum_{k=0}^4 \operatorname{Res} \left[\frac{1}{z^{10}+1}, z = z_k \right] & \text{se: } \ln(a) = 0 \Leftrightarrow a = 1 \\ -\sum_{k=5}^9 \operatorname{Res} \left[\frac{e^{iz \ln(a)}}{z^{10}+1}, z = z_k \right] & \text{se: } \ln(a) < 0 \Leftrightarrow a \in (0, 1) \end{cases}.$$

In base alle condizioni del problema, è solo il primo dei tre casi che deve essere considerato. Il residuo del k -esimo polo è

$$\operatorname{Res} \left[\frac{e^{iz \ln(a)}}{z^{10}+1}, z = z_k \right] = \frac{e^{iz_k \ln(a)}}{10z_k^9} = -\frac{z_k e^{iz_k \ln(a)}}{10}, \quad \forall k \in \{0, 1, \dots, 9\}.$$

L'ultima identità è stata ottenuta moltiplicando numeratore e denominatore per z_k e sfruttando il fatto che $z_k^{10} = -1$, per ogni $k \in \{0, 1, \dots, 9\}$.

Nel caso del problema, cioè con $a \in (1, \infty)$, l'integrale è la somma dei residui dei primi cinque poli moltiplicata per $2i\pi$. Questi poli, per cui usiamo la rappresentazione cartesiana $z_k = x_k + iy_k$, con $k = 0, 1, 2, 3, 4$, verificano le seguenti relazioni

$$\begin{aligned} z_0 &= e^{i\pi/10} = \cos(\pi/10) + i \operatorname{sen}(\pi/10) = x_0 + iy_0, \\ z_1 &= e^{3i\pi/10} = \cos(3\pi/10) + i \operatorname{sen}(3\pi/10) = x_1 + iy_1, \\ z_2 &= e^{5i\pi/10} = i \\ z_3 &= e^{7i\pi/10} = \cos(7\pi/10) + i \operatorname{sen}(7\pi/10) = -\cos(3\pi/10) + i \operatorname{sen}(3\pi/10) = -x_1 + iy_1, \\ z_4 &= e^{9i\pi/10} = \cos(9\pi/10) + i \operatorname{sen}(9\pi/10) = -\cos(\pi/10) + i \operatorname{sen}(\pi/10) = -x_0 + iy_0. \end{aligned}$$

Utilizziamo tali relazioni per scrivere la somma dei loro residui, si ha

$$\begin{aligned}
-\sum_{k=0}^4 \frac{z_k e^{iz_k \ln(a)}}{10} &= -\frac{1}{10} \left(x_0 \left(e^{(ix_0-y_0) \ln(a)} - e^{(-ix_0-y_0) \ln(a)} \right) + iy_0 \left(e^{(ix_0-y_0) \ln(a)} + e^{(-ix_0-y_0) \ln(a)} \right) \right) \\
&\quad -\frac{1}{10} \left(x_1 \left(e^{(ix_1-y_1) \ln(a)} - e^{(-ix_1-y_1) \ln(a)} \right) + iy_1 \left(e^{(ix_1-y_1) \ln(a)} + e^{(-ix_1-y_1) \ln(a)} \right) \right) \\
&\quad -\frac{1}{10} i e^{-\ln(a)} \\
&= -\frac{i}{5} \left(x_0 \frac{\operatorname{sen}(x_0 \ln(a))}{e^{y_0 \ln(a)}} + y_0 \frac{\cos(x_0 \ln(a))}{e^{y_0 \ln(a)}} + x_1 \frac{\operatorname{sen}(x_1 \ln(a))}{e^{y_1 \ln(a)}} + y_1 \frac{\cos(x_1 \ln(a))}{e^{y_1 \ln(a)}} + \frac{i}{2a} \right) \\
&= -\frac{i}{5} \left(\frac{\cos(\pi/10) \operatorname{sen}(\cos(\pi/10) \ln(a)) + \operatorname{sen}(\pi/10) \cos(\cos(\pi/10) \ln(a))}{e^{\operatorname{sen}(\pi/10) \ln(a)}} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\cos(3\pi/10) \operatorname{sen}(\cos(3\pi/10) \ln(a)) + \operatorname{sen}(3\pi/10) \cos(\cos(3\pi/10) \ln(a))}{e^{\operatorname{sen}(3\pi/10) \ln(a)}} + \frac{i}{2a} \right) \\
&= -\frac{i}{5} \left(\frac{\operatorname{sen}(\cos(\pi/10) \ln(a) + \pi/10)}{e^{\operatorname{sen}(\pi/10) \ln(a)}} + \frac{\operatorname{sen}(\cos(3\pi/10) \ln(a) + 3\pi/10)}{e^{\operatorname{sen}(3\pi/10) \ln(a)}} + \frac{i}{2a} \right).
\end{aligned}$$

Quindi l'integrale del problema vale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{a^{ix}}{x^{10} + 1} dx = \frac{2\pi}{5} \left(\frac{\operatorname{sen}(\cos(\pi/10) \ln(a) + \pi/10)}{e^{\operatorname{sen}(\pi/10) \ln(a)}} + \frac{\operatorname{sen}(\cos(3\pi/10) \ln(a) + 3\pi/10)}{e^{\operatorname{sen}(3\pi/10) \ln(a)}} + \frac{i}{2a} \right).$$

Questo risultato coincidente con l'espressione cercata.

SESTO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 3/30)

Con il metodo dei residui si calcoli la somma della serie

$$\Phi = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\cos(k\pi/4)}{k^4}.$$

SOLUZIONE DEL SESTO PROBLEMA

Al fine di usare il metodo dei residui, definiamo la funzione $f(z)$ scrivendo la serie nella forma

$$\Phi = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k f(k),$$

da cui si ha

$$f(z) = \frac{\cos(z\pi/4)}{z^4}.$$

Consideriamo la successione di integrali

$$\left\{ \frac{1}{2i\pi} \oint_{|z|=(n+1/2)} \frac{\cos(z\pi/4)}{z^4} \frac{\pi}{\operatorname{sen}(z\pi)} dz \right\}_{n=1}^{\infty},$$

la cui convergenza a zero, al divergere n all'infinito, è facilmente verificabile. Infatti, sfruttando i lemmi di integrazione sugli archi, sulla circonferenza centrata nell'origine di raggio $(n+1/2)$, con $n \in \mathbb{N}$, e usando la rappresentazione cartesiana $z = x + iy$, si ha che le limitazioni

$$\left| \frac{\cos(z\pi/4)}{z^4} \frac{z\pi}{\operatorname{sen}(z\pi)} \right| = \frac{\pi}{(n+1/2)^3} \left| \frac{e^{ix\pi/4-y\pi/4} + e^{-ix\pi/4+y\pi/4}}{e^{ix\pi-y\pi} - e^{-ix\pi+y\pi}} \right| \begin{cases} \sim \frac{\pi e^{-3\pi y/4}}{(n+1/2)^3} & \text{con: } y >, \text{ e } n, y \rightarrow \infty \\ \leq \frac{\pi}{(n+1/2)^3} & y = 0, x = \pm \left(n + \frac{1}{2} \right) \rightarrow \pm \infty \\ \sim \frac{\pi e^{3\pi y/4}}{(n+1/2)^3} & \text{con: } y <, \text{ e } -n, y \rightarrow -\infty \end{cases},$$

implicano

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2i\pi} \oint_{|z|=(n+1/2)} \frac{\cos(z\pi/4)}{z^4} \frac{\pi}{\operatorname{sen}(z\pi)} dz = 0.$$

Gli integrali della successione posso essere calcolati con il teorema dei residui. La funzione integranda è meromorfa e ha poli semplici nei punti delle successioni $\{z_k = k\}_{k=1}^{\infty}$ e $\{z_{-k} = -k\}_{k=1}^{\infty}$, e un polo di ordine cinque nell'origine $z_0 = 0$. Il percorso d'integrazione, ovvero la circonferenza centrata nell'origine di raggio $(n+1/2)$, avvolge una sola volta i $(2n+1)$ poli dell'insieme $\{z_k = k\}_{k=-n}^n$, ne consegue che

$$\frac{1}{2i\pi} \oint_{|z|=(n+1/2)} \frac{\cos(z\pi/4)}{z^4} \frac{\pi}{\operatorname{sen}(z\pi)} dz = \sum_{k=-n}^n \operatorname{Res} \left[\frac{\cos(z\pi/4)}{z^4} \frac{\pi}{\operatorname{sen}(z\pi)}, z = k \right].$$

I residui dei poli semplici sono

$$\operatorname{Res} \left[\frac{\cos(z\pi/4)}{z^4} \frac{\pi}{\operatorname{sen}(z\pi)}, z = k \right] = (-1)^k \frac{\cos(k\pi/4)}{k^4}, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\},$$

in particolare, per la parità della funzione integranda, non dipendono dal segno di $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, cioè

$$\operatorname{Res} \left[\frac{\cos(z\pi/4)}{z^4} \frac{\pi}{\operatorname{sen}(z\pi)}, z = k \right] = \operatorname{Res} \left[\frac{\cos(z\pi/4)}{z^4} \frac{\pi}{\operatorname{sen}(z\pi)}, z = -k \right] = (-1)^k \frac{\cos(k\pi/4)}{k^4}.$$

Alla luce di questi risultati si ha

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2i\pi} \oint_{|z|=(n+1/2)} \frac{\cos(z\pi/4)}{z^4} \frac{\pi}{\operatorname{sen}(z\pi)} dz = 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\cos(k\pi/4)}{k^4} + \operatorname{Res} \left[\frac{\cos(z\pi/4)}{z^4} \frac{\pi}{\operatorname{sen}(z\pi)}, z = 0 \right],$$

da cui si ottiene la somma della serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\cos(k\pi/4)}{k^4} = -\frac{1}{2} \operatorname{Res} \left[\frac{\cos(z\pi/4)}{z^4} \frac{\pi}{\operatorname{sen}(z\pi)}, z = 0 \right].$$

Calcoliamo il residuo nell'origine come coefficiente della potenza z^{-1} della serie di Laurent della funzione integranda centrata nell'origine e convergente in un suo intorno. Ne ricaviamo il valore usando le serie di Taylor delle funzioni trigonometriche. In particolare, nel limite $z \rightarrow 0$,

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{z^4} \frac{\cos(z\pi/4)}{\operatorname{sen}(z\pi)} &= \frac{\pi}{z^4} \left[1 - \frac{1}{2!} \left(\frac{z\pi}{4} \right)^2 + \frac{1}{4!} \left(\frac{z\pi}{4} \right)^4 + \dots \right] \left[z\pi - \frac{1}{3!} (z\pi)^3 + \frac{1}{5!} (z\pi)^5 + \dots \right]^{-1} \\ &= \frac{1}{z^5} \left(1 - \frac{1}{2!} \left(\frac{z\pi}{4} \right)^2 + \frac{1}{4!} \left(\frac{z\pi}{4} \right)^4 + \dots \right) \left[1 + \left(\frac{1}{3!} (z\pi)^2 - \frac{1}{5!} (z\pi)^4 + \dots \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{3!} (z\pi)^2 - \frac{1}{5!} (z\pi)^4 + \dots \right)^2 + \dots \right], \end{aligned}$$

il coefficiente cercato è quello della potenza z^4 che si ottiene dal prodotto degli ultimi due fattori, in particolare si ha

$$\begin{aligned} &\frac{1}{z^5} \left(1 - \frac{1}{2!} \left(\frac{z\pi}{4} \right)^2 + \frac{1}{4!} \left(\frac{z\pi}{4} \right)^4 + \dots \right) \left[1 + \left(\frac{1}{3!} (z\pi)^2 - \frac{1}{5!} (z\pi)^4 + \dots \right) + \left(\frac{1}{3!} (z\pi)^2 - \frac{1}{5!} (z\pi)^4 + \dots \right)^2 + \dots \right] \\ &= \dots + \frac{1}{z} \pi^4 \left(-\frac{1}{5!} + \frac{1}{(3!)^2} - \frac{1}{2!} \frac{1}{4^2} \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!4^4} \right) + \dots \\ &= \dots + \frac{1}{z} \frac{1327\pi^4}{92160} + \dots, \end{aligned}$$

le linee colorate indicano i termini dal cui prodotto si ricava ciascun contributo. Il coefficiente così ottenuto coincide con il residuo nell'origine, quindi la somma della serie vale

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\cos(k\pi/4)}{k^4} = -\frac{1327\pi^4}{184320}.$$