Metodi Matematici per la Fisica

Primo esonero - 28 febbraio 2018

Si risolvano cortesemente i seguenti problemi, sapendo che verranno valutati:

1. la correttezza del risultato ottenuto e della procedura utilizzata;
2. la completezza dei passaggi riportati;
3. il livello di esemplificazione con cui sono espressi i risultati (ad esempio un risultato numerico reale non deve contenere l'unità immaginaria);
4. la correttezza del formalismo utilizzato;
5. la chiarezza dell'esposizione e la leggibilità del testo.

Primo problema (punteggio: 3/30)

Si calcolino gli integrali

$$J_k = \int_{|z|=1} e^{1/z^3} z^k dz\,, \qquad k \in \mathbb{N}\,.$$

Soluzione del primo problema

L'integranda ha, al finito, una sola singolarità essenziale nell'origine, quindi, usando il teorema dei residui,

$$J_k = \int_{|z|=1} e^{1/z^3} z^k dz = 2i\pi \, \mathrm{Res}\left[e^{1/z^3} z^k, 0\right]\,.$$

Otteniamo il valore del residuo come il coefficienti della potenza z^{-1} della serie di Laurent dell'integranda centrata nell'origine. La serie può essere dedotta dalla serie dell'esponenziale, ovvero

$$e^{1/z^3} z^k \equiv g_k(z) = z^k \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(z^{-3}\right)^j}{j!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^{-3j+k}}{j!} = \sum_{n=-\infty}^{k} C_n z^n\,,$$

dove i coefficienti di Laurent sono

$$C_n = \begin{cases} \dfrac{1}{j!} & \forall\, n \text{ tale che: } j = \dfrac{k-n}{3} \in \mathbb{N} \cup \{0\} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}\,.$$

Il residuo, come detto, coincide con il coefficiente della potenza z^{-1}, quindi

$$C_{-1} = \begin{cases} \dfrac{1}{[(k+1)/3]!} & \forall\, k \text{ tale che: } \dfrac{k+1}{3} \in \mathbb{N} \cup \{0\} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}\,,$$

ovvero, C_{-1} sarà non nullo per tutti quei valori di k uguali a un multiplo di 3 meno 1, cioè

$$k = 3m - 1\,, \qquad \forall m \in \mathbb{N}\,.$$

In definitiva

$$J_{3m-1} = \frac{1}{m!}\,, \qquad J_{3m-2} = J_{3m} = 0\,, \qquad \forall\, m \in \mathbb{N}\,.$$

Secondo problema (punteggio 3/30)

Si calcoli l'integrale in valore principale

$$C = \Pr \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos^2(x)}{x^4 - 1} dx\,.$$

Soluzione del secondo problema

L'integranda ha quattro poli semplici nei punti

$$z_k = e^{ki\pi/2}\,, \qquad k = 0,1,2,3\,.$$

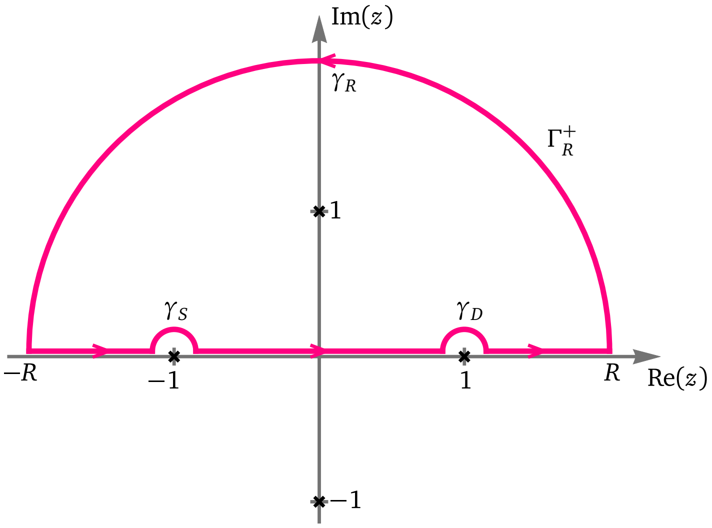
I punti $z_0 = 1$ e $z_2 = -1$ appartengono all'asse reale, ovvero al percorso di integrazione, è quindi in relazione ad essi che va considerato il valore principale. Riscriviamo l'integrale usando per la funzione coseno la forma esponenziale di Eulero

$$C = \frac{1}{4}\,\mathrm{Pr}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2ix}+e^{-2ix}+2}{x^4-1}dx = \frac{1}{4}\left(\mathrm{Pr}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{2ix}}{x^4-1}dx + \mathrm{Pr}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-2ix}}{x^4-1}dx + \mathrm{Pr}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2}{x^4-1}dx\right) = C_+ + C_- + C_0\,,$$

dove abbiamo definito i tre integrali

$$C_+ = \frac{1}{4}\,\mathrm{Pr}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{2ix}}{x^4-1}dx\,, \qquad C_- = \frac{1}{4}\,\mathrm{Pr}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-2ix}}{x^4-1}dx\,, \qquad C_0 = \frac{1}{2}\,\mathrm{Pr}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^4-1}\,.$$

Questi integrali possono essere calcolati sfruttando il lemma di Jordan, ovvero chiudendo il percorso di integrazione e usando il teorema dei residui. Per il primo, C_+, consideriamo il percorso chiuso Γ_R^+ mostrato in figura.



Il percorso Γ_R^+ è l'unione di tre archi, γ_S, γ_D e γ_R, e tre tratti rettilinei. Gli archi γ_S e γ_D sono centrati rispettivamente nei poli $z_0 = 1$ e $z_2 = -1$ ed hanno raggio ϵ, mentre γ_R è centrato nell'origine ed ha raggio R. I tratti rettilinei sono gli intervalli reali: $[-R, -1-\epsilon]$, $[-1+\epsilon, 1-\epsilon]$ e $[1+\epsilon, R]$. Per $R > 1$ il percorso Γ_R^+ avvolge il solo polo semplice $z_1 = i$, quindi, considerando l'integranda di C_+, si ha

$$\lim_{R\to\infty}\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{4}\oint_{\Gamma_R^+}\frac{e^{2iz}}{z^4-1}dz = 2i\pi\,\mathrm{Res}\left[\frac{1}{4}\frac{e^{2iz}}{z^4-1}, z_1 = i\right] = -\frac{\pi}{8}e^{-2}\,.$$

Lo stesso integrale può essere scritto come somma degli integrali sui tratti rettilinei e sugli archi

$$\lim_{R\to\infty}\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{4}\oint_{\Gamma_R^+}\frac{e^{2iz}}{z^4-1}dz = C_+ + \frac{1}{4}\oint_{-\gamma_S}\frac{e^{2iz}}{z^4-1}dz + \frac{1}{4}\oint_{-\gamma_D}\frac{e^{2iz}}{z^4-1}dz\,,$$

dove l'integrale in valore principale C_+ è dato dalla somma degli integrali sui tratti rettilinei, nel limiti $R \to \infty$ e $\epsilon \to 0$, mentre l'integrale sull'arco γ_R è nullo nel limite $R \to \infty$ (lemma di Jordan). I valori limite degli integrali sugli archi γ_S e γ_D, percorsi in senso orario, sono

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{4}\oint_{-\gamma_S}\frac{e^{2iz}}{z^4-1}dz = -\frac{1}{4}i\pi\lim_{z\to -1}\frac{e^{2iz}}{z^4-1} = \frac{i\pi}{16}e^{-2i}\,,$$

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{4}\oint_{-\gamma_D}\frac{e^{2iz}}{z^4-1}dz = -\frac{1}{4}i\pi\lim_{z\to 1}\frac{e^{2iz}}{z^4-1} = -\frac{i\pi}{16}e^{2i}\,,$$

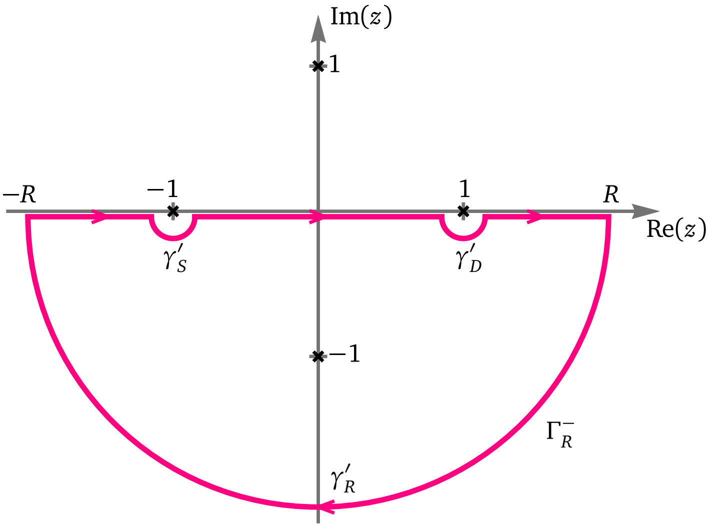
quindi

$$\lim_{R\to\infty}\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{4}\oint_{\Gamma_R^+}\frac{e^{2iz}}{z^4-1}dz = C_+ + \frac{\pi}{8}\,\mathrm{sen}(2)\,.$$

Con il risultato precedente si ottiene

$$C_+ = -\frac{\pi}{8}\left(e^{-2} + \mathrm{sen}(2)\right)\,.$$

Seguendo un ragionamento analogo, calcoliamo l'integrale C_-, partendo da quello fatto con la stessa integranda sul percorso Γ_R^- mostrato in figura.



Come prima, per $R > 1$ il percorso Γ_R^- avvolge il solo polo semplice $z_3 = -i$, di conseguenza si ha

$$\lim_{R\to\infty}\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{4}\oint_{-\Gamma_R^-}\frac{e^{-2iz}}{z^4-1}dz = -2i\pi\,\mathrm{Res}\left[\frac{1}{4}\frac{e^{-2iz}}{z^4-1}, z_1 = -i\right] = -\frac{\pi}{8}e^{-2}\,,$$

dove il segno meno del secondo membro è dovuto al fatto che si sta integrando su $-\Gamma_R^-$. L'integrale a primo membro coincide con la somma dell'integrale in valore principale, C_-, e quelli sugli archi γ'_S e γ'_D, mentre, per il lemma di Jordan, l'integrale sull'arco γ'_R è nullo nel limite $R\to\infty$, avremo cioè

$$\lim_{R\to\infty}\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{4}\oint_{-\Gamma_R^-}\frac{e^{-2iz}}{z^4-1}dz = C_- + \frac{1}{4}\oint_{\gamma'_S}\frac{e^{-2iz}}{z^4-1}dz + \frac{1}{4}\oint_{\gamma'_D}\frac{e^{-2iz}}{z^4-1}dz\,,$$

con

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{4}\oint_{\gamma'_S}\frac{e^{-2iz}}{z^4-1}dz = \frac{1}{4}i\pi\lim_{z\to -1}\frac{e^{-2iz}}{z^4-1} = -\frac{i\pi}{16}e^{2i}\,,$$
$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{4}\oint_{\gamma'_D}\frac{e^{-2iz}}{z^4-1}dz = \frac{1}{4}i\pi\lim_{z\to 1}\frac{e^{-2iz}}{z^4-1} = \frac{i\pi}{16}e^{-2i}\,.$$

Si ottiene quindi il valore di C_- come

$$C_- = -\frac{\pi}{8}\left(e^{-2} + \mathrm{sen}(2)\right)\,.$$

Per l'integrale C_0 procediamo come per C_+

$$C_0 = 2i\pi\,\mathrm{Res}\left[\frac{1}{2}\frac{dz}{z^4-1}, z_1 = i\right] + \frac{1}{2}\int_{\gamma_S}\frac{dz}{z^4-1} + \frac{1}{2}\int_{\gamma_D}\frac{dz}{z^4-1} = -\frac{\pi}{4} - \frac{i\pi}{8} + \frac{i\pi}{8} = -\frac{\pi}{4}\,.$$

In definitiva, sommando i tre contributi, si ottiene il risultato cercato

$$C = C_+ + C_- + C_0 = -\frac{\pi}{4}\left(e^{-2} + \mathrm{sen}(2) + 1\right).$$

Terzo problema (punteggio 3/30)

Si dimostri la seguente identità

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{k^2+\alpha^2} = \frac{\pi}{\alpha \tanh(\pi\alpha)}, \qquad \forall\, \alpha \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}.$$

Soluzione del terzo problema

Usiamo l'integrazione nel piano complesso per sommare la serie. Definaimo la funzione

$$f(z) = \frac{1}{z^2+\alpha^2},$$

cosicché la serie può essere posta nella forma

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{k^2+\alpha^2} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k).$$

Consideriamo ora la funzione

$$g(z) = \frac{\pi\cos(\pi z)}{\mathrm{sen}(\pi z)},$$

che ha come singolarità i poli semplici nei punti $z_k = k$, $\forall\, k \in \mathbb{Z}$, tutti con residuo uguale ad uno, infatti, usando il teorema di de l'Hôpital per il calcolo del limite,

$$R_k = \lim_{z\to z_k} \frac{\pi\cos(\pi z)}{\mathrm{sen}(\pi z)}(z - z_k) = \frac{\pi\cos(\pi z_k)}{\pi\cos(\pi z_k)} = 1.$$

Studiamo il comportamento dell'integrale del prodotto delle funzioni $g(z)$ e $f(z)$

$$S_k = \frac{1}{2i\pi}\oint_{|z|=(2k+1)/2} g(z)f(z)dz,$$

dove il percorso di integrazione è la circonferenza di raggio $(2k+1)/2$, centrata nell'origine, orientata in senso antiorario. Per valori di $k \in \mathbb{N}$, tali che $(2k+1)/2 > \alpha$, la circonferenza avvolge una sola volta i due poli semplici della $f(z)$, $z_\pm = \pm i\alpha$, e i $2k+1$ poli semplici della $g(z)$, $\{z_j\}_{j=-k}^{k}$. Usando quindi il teorema dei residui si ottiene

$$\begin{aligned}
S_k &= \sum_{j=-k}^{k} \mathrm{Res}\left[g(z)f(z), z_j\right] + \mathrm{Res}\left[g(z)f(z), z = i\alpha\right] + \mathrm{Res}\left[g(z)f(z), z = -i\alpha\right] \\
&= \sum_{j=-k}^{k} f(j) + \frac{g(i\alpha)}{2i\alpha} + \frac{g(-i\alpha)}{-2i\alpha} \\
&= \sum_{j=-k}^{k} \frac{1}{j^2+\alpha^2} + \frac{\pi\cos(i\pi\alpha)}{2i\alpha\,\mathrm{sen}(i\pi\alpha)} + \frac{\pi\cos(-i\pi\alpha)}{-2i\alpha\,\mathrm{sen}(-i\pi\alpha)} \\
&= \sum_{j=-k}^{k} \frac{1}{j^2+\alpha^2} + \frac{\pi\cosh(\pi\alpha)}{-2\alpha\,\mathrm{senh}(\pi\alpha)} + \frac{\pi\cosh(\pi\alpha)}{-2\alpha\,\mathrm{senh}(\pi\alpha)} \\
&= \sum_{j=-k}^{k} \frac{1}{j^2+\alpha^2} - \frac{\pi}{\alpha\tanh(\pi\alpha)}.
\end{aligned}$$

Nel limite $k \to \infty$ la funzione $g(z)f(z)z$, ovvero l'integranda moltiplicata per z, tende uniformemente a zero. Per provarlo consideriamo il modulo

$$\left|g(z)f(z)z\right| = \left|g(z)\right|\left|f(z)z\right| \,,$$

e minoriamo separatamente i due fattori per valori di z appartenenti alla circonferenza $|z| = (2k+1)/2$. Per il modulo quadro di $g(z)$ consideriamo due casi: $y = 0$ e $y \neq 0$. Nel primo caso, poiché $|z| = (2k+1)/2$, avremo $x = \pm(2k+1)/2$, quindi il modulo di $g(z)$ è nullo per ogni $k \in \mathbb{N}$, infatti

$$\left|g(z)\right| = \left|\frac{\pi\cos(\pi x)}{\operatorname{sen}(\pi x)}\right| = 0\,.$$

Nel secondo caso, $y \neq 0$, studiamo, per economia di simboli, il modulo quadro di $g(z)$, si ha

$$\begin{aligned}
\left|g(z)\right|^2 = \left|\frac{\pi\cos(\pi x + i\pi y)}{\operatorname{sen}(\pi x + i\pi y)}\right|^2 &= \pi^2\frac{\cos^2(\pi x)\cosh^2(\pi y) + \operatorname{sen}^2(\pi x)\operatorname{senh}^2(\pi y)}{\operatorname{sen}^2(\pi x)\cosh^2(\pi y) + \cos^2(\pi x)\operatorname{senh}^2(\pi y)}\\
&= \pi^2\frac{\left(1-\operatorname{sen}^2(\pi x)\right)\cosh^2(\pi y) + \operatorname{sen}^2(\pi x)\operatorname{senh}^2(\pi y)}{\operatorname{sen}^2(\pi x)\cosh^2(\pi y) + \left(1-\operatorname{sen}^2(\pi x)\right)\operatorname{senh}^2(\pi y)}\\
&= \pi^2\frac{\cosh^2(\pi y) - \operatorname{sen}^2(\pi x)}{\operatorname{senh}^2(\pi y) + \operatorname{sen}^2(\pi x)}\,, \qquad \text{si è usata: } \cosh^2(v) - \operatorname{senh}^2(v) = 1\,,\\
&= \pi^2\frac{\cosh^2(\pi y) - \operatorname{sen}^2(\pi x)}{\operatorname{senh}^2(\pi y) + \operatorname{sen}^2(\pi x)}\\
&\le \pi^2\frac{\cosh^2(\pi y)}{\operatorname{senh}^2(\pi y)} = \pi^2\left(\frac{e^{\pi y} + e^{-\pi y}}{e^{\pi y} - e^{-\pi y}}\right)^2 \underset{y\to\pm\infty}{\longrightarrow} \pi^2\,.
\end{aligned}$$

Questo valore limite implica che esiste un $y_0 > 0$, tale che, ad esempio,

$$\left|g(z)\right| \le 2\pi$$

per tutti i valori di y, tali che $|y| \ge y_0$.
Infine, per il modulo di $f(z)z$ abbiamo

$$\left|f(z)z\right| = \frac{|z|}{\left|z^2 + \alpha^2\right|} \le \frac{(2k+1)/2}{\left|(2k+1)^2/4 - |\alpha|^2\right|}\,.$$

Mettendo insieme i due risultati, per valori di z tali che $|\mathrm{Im}(z)| = |y| \ge y_0$, si ottiene

$$0 \le \left|g(z)f(z)z\right| \le \frac{(2k+1)\pi}{\left|(2k+1)^2/4 - |\alpha|^2\right|} \underset{k\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0\,,$$

ne consegue che

$$\lim_{k\to\infty} S_k = \lim_{k\to\infty}\oint_{|z|=(2k+1)/2} g(z)f(z)dz = 0\,.$$

In termini dei residui

$$0 = \lim_{k\to\infty} S_k = \lim_{k\to\infty}\sum_{j=-k}^{k}\frac{1}{j^2+\alpha^2} - \frac{\pi}{\alpha\tanh(\pi\alpha)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{k^2+\alpha^2} - \frac{\pi}{\alpha\tanh(\pi\alpha)}\,,$$

ovvero

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{k^2+\alpha^2} = \frac{\pi}{\alpha\tanh(\pi\alpha)}\,.$$

QUARTO PROBLEMA (PUNTEGGIO 3/30)

Si verifichi che

$$f(z)=\frac{1}{2}+\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{-z\ln(a)+2i\pi k-2\sqrt{3}\pi/9}{(z\ln(a)-2i\pi k)^2+(2\pi/3)^2}\,,$$

con $a\in(1,\infty)$, rappresenta lo sviluppo di Mittag-Leffler della funzione

$$f(z)=\frac{1}{a^{2z}+a^z+1}\,.$$

Potrebbe essere utile la serie del terzo problema.

SOLUZIONE DEL QUARTO PROBLEMA

La funzione $f(z)$ è meromorfa, i poli coincidono con gli zeri del dominatore, ovvero della funzione inversa, che otteniamo risolvendo l'equazione

$$f^{-1}(z)=a^{2z}+a^z+1=0\,.$$

Le soluzioni rispetto ad a^z sono

$$(a^z)_{1,2}=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}=e^{\pm 2i\pi/3}\,,$$

mentre per la variabile z si hanno

$$a^z=e^{z_k^{\pm}\ln(a)}=e^{2i\pi(\pm 1/3+k)}\,.$$

Ne consegue che i poli della funzione $f(z)$ si trovano nei punti

$$z_k^{\pm}=\frac{2i\pi}{3\ln(a)}(\pm 1+3k)\,,$$

questa espressione non è singolare in quanto il logaritmo a denominatore risulta strettamente positivo poiché il parametro a è reale e strettamente maggiore di uno, cioè: $a\in(1,\infty)$. I punti $z_k^{\pm}$ rappresentano poli semplici, lo verifichiamo osservando che in tali punti si azzera la funzione $f^{-1}(z)$, ma non la derivata prima, infatti

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}f^{-1}(z)&=\frac{d}{dz}\left(a^{2z}+a^z+1\right)=2\ln(a)a^{2z}+\ln(a)a^z\\&=\ln(a)a^z\left(2a^z+1\right)\xrightarrow[z\to z_k^{\pm}]{}\ln(a)\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}\left(\pm i\sqrt{3}\right)=\ln(a)\frac{\mp i\sqrt{3}-3}{2}\neq 0\,.\end{aligned}$$

Otteniamo il residuo del polo $z_k^{\pm}$ come

$$R_k^{\pm}=\lim_{z\to z_k^{\pm}}\frac{z-z_k^{\pm}}{a^{2z}+a^z+1}=\lim_{z\to z_k^{\pm}}\frac{1}{\ln(a)a^z\left(2a^z+1\right)}=\frac{1}{\ln(a)}\frac{2}{-3\mp i\sqrt{3}}=\frac{-3\pm i\sqrt{3}}{6\ln(a)}=\frac{e^{\pm 5i\pi/6}}{\sqrt{3}\,\ln(a)}\equiv R^{\pm}\,,$$

l'indice è stato omesso poiché il residuo è indipendente da k.
Lo sviluppo di Mittag-Leffler è quindi

$$f(z)=\phi(z)+\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{R^+}{z-z_k^+}+\frac{R^-}{z-z_k^-}\right)\,,$$

dove la funzione $\phi(z)$ rappresenta la parte intera della funzione $f(z)$. Usando le forme esplicite dei residui e dei poli si ha

$$\begin{aligned}f(z)&=\phi(z)+\frac{1}{6\ln(a)}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{-3+i\sqrt{3}}{z-z_k^+}+\frac{-3-i\sqrt{3}}{z-z_k^-}\right)\\&=\phi(z)+\frac{1}{\ln(a)}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{-z+(z_k^++z_k^-)/2+i\left(z_k^+-z_k^-\right)/(2\sqrt{3})}{\left(z-z_k^+\right)\left(z-z_k^-\right)}\,,\end{aligned}$$

e quindi, avendo,

$$z_k^+ + z_k^- = \frac{4i\pi}{\ln(a)}k\,, \qquad z_k^+ - z_k^- = \frac{4i\pi}{3\ln(a)}\,,$$

$$\left(z - z_k^+\right)\left(z - z_k^-\right) = \left(z - \frac{2i\pi}{3\ln(a)}(1+3k)\right)\left(z - \frac{2i\pi}{3\ln(a)}(-1+3k)\right) = \left(z - \frac{2i\pi}{\ln(a)}k\right)^2 + \left(\frac{2\pi}{3\ln(a)}\right)^2,$$

si ottiene la forma "compatta"

$$f(z) = \phi(z) + \frac{1}{\ln(a)}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{-z + \frac{2i\pi}{\ln(a)}k - \frac{2\pi}{3\sqrt{3}\ln(a)}}{\left(z - \frac{2i\pi}{\ln(a)}k\right)^2 + \left(\frac{2\pi}{3\ln(a)}\right)^2} = \phi(z) + \sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{-z\ln(a) + 2i\pi k - 2\sqrt{3}\pi/9}{(z\ln(a) - 2i\pi k)^2 + (2\pi/3)^2}\,.$$

La parte intera $\phi(z)$ può essere determinata studiando il comportamento asintotico della funzione di partenza $f(z)$. In particolare potremmo considerare il limite di $f(z)$ sui punti della successione complessa crescente $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$, che si accumula all'infinto e tale che

$$|b_k| = \frac{|z_k^+| + |z_k^-|}{2} = \frac{2k\pi}{\ln(a)}\,.$$

Scegliamo la direzione definita dalla fase $\theta \in [0, 2\pi]$

$$b_k = \frac{2k\pi}{\ln(a)}e^{i\theta}\,.$$

I valori della funzione $f(z)$ sui punti della successione sono limitati in modulo secondo la seguente relazione

$$\left|f(b_k)\right| = \frac{1}{\left|a^{2b_k} + a^{b_k} + 1\right|} \leq \frac{1}{\left|\left|a^{2b_k} + a^{b_k}\right| - 1\right|} \leq \frac{1}{\left|a^{\mathrm{Re}(b_k)}\left|a^{\mathrm{Re}(b_k)} - 1\right| - 1\right|} = \frac{1}{\left|a^{\frac{2k\pi}{\ln(a)}\cos(\theta)}\left|a^{\frac{2k\pi}{\ln(a)}\cos(\theta)} - 1\right| - 1\right|}\,.$$

Consideriamo tre casi corrispondenti ad altrettanti valori di $\cos(\theta)$, in particolare, ricordando che $\ln(a) > 0$,

$$\left|f(b_k)\right| \leq \begin{cases} \left|a^{\frac{2k\pi}{\ln(a)}|\cos(\theta)|}\left|a^{\frac{2k\pi}{\ln(a)}|\cos(\theta)|} - 1\right| - 1\right|^{-1} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 & \cos(\theta) > 0 \\ 1 & \cos(\theta) = 0 \\ \left|a^{-\frac{2k\pi}{\ln(a)}|\cos(\theta)|}\left|a^{-\frac{2k\pi}{\ln(a)}|\cos(\theta)|} - 1\right| - 1\right|^{-1} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 1 & \cos(\theta) < 0 \end{cases},$$

in definitiva

$$\lim_{k\to\infty}\left|f(b_k)\right| \leq 1\,, \qquad \forall\,\theta \in [0, 2\pi]\,.$$

Otterremo lo stesso risultato anche considerando una fase dipendente da k. Ne consegue che la funzione $f(z)$ non diverge asintoticamente e quindi la parte intera $\phi(z)$ è una costante. Poniamo $\phi(z) \equiv \phi_0$ e determiniamo ϕ_0 valutando $f(z)$ nell'origine,

$$\begin{aligned} f(0) = \frac{1}{3} &= \phi_0 + \sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{2i\pi k - 2\sqrt{3}\pi/9}{(2i\pi k)^2 + (2\pi/3)^2} \\ &= \phi_0 - \frac{2\sqrt{3}\pi}{9}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{-4\pi^2k^2 + (2\pi/3)^2} \\ &= \phi_0 + \frac{\sqrt{3}}{18\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{k^2 - (1/3)^2}\,. \end{aligned}$$

La serie può essere sommata usando il risultato del terzo problema, ovvero

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{k^2 + \alpha^2} = \frac{\pi}{\alpha\tanh(\pi\alpha)}\,, \qquad \forall\,\alpha \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}\,.$$

In questo caso abbiamo $\alpha = i/3$, quindi

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{k^2 - (1/3)^2} = \frac{3\pi}{i\tanh(i\pi/3)} = -\frac{3\pi}{\tan(\pi/3)} = -\sqrt{3}\pi\,.$$

Dalla relazione precedente si ottiene ϕ_0, infatti

$$\frac{1}{3} = \phi_0 + \frac{\sqrt{3}}{18\pi}\left(-\sqrt{3}\pi\right) = \phi_0 - \frac{1}{6} \qquad \Rightarrow \qquad \phi_0 = \frac{1}{2}\,.$$

Lo sviluppo di Mittag-Leffler completo è

$$f(z) = \frac{1}{2} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{-z\ln(a) + 2i\pi k - 2\sqrt{3}\pi/9}{(z\ln(a) - 2i\pi k)^2 + (2\pi/3)^2}\,.$$

Quinto problema (punteggio 2,5/30)

Si determini la serie di Laurent, centrata in $z_0 = 1$, della funzione

$$q(z) = \frac{z\,\mathrm{sen}(\pi z/2)}{(z-1)^3}\,.$$

Soluzione del quinto problema

La funzione $q(z)$ è meromorfa, ha una sola singolarità, il polo triplo $z_0 = 1$, ne consegue che la serie di Laurent con centro in z_0 converge nella corona circolate $C_0 = \{z : 0 < |z-1| < \infty\}$, di raggio minore nullo e raggio maggiore infinito.
Per avere termini in cui la dipendenza da z sia sempre nella forma desiderata, ovvero $(z-1)$, poniamo $z = (z-1)+1$ a numeratore, otteniamo così

$$\begin{aligned} q(z) &= \frac{[(z-1)+1]\ \mathrm{sen}\left(\pi(z-1)/2 + \pi/2\right)}{(z-1)^3} \\ &= \frac{[(z-1)+1]\cos\left(\pi(z-1)/2\right)}{(z-1)^3} \\ &= \frac{\cos\left(\pi(z-1)/2\right)}{(z-1)^2} + \frac{\cos\left(\pi(z-1)/2\right)}{(z-1)^3}\,. \end{aligned}$$

Usando la serie di Taylor della funzione coseno si arriva alla serie di potenze in $(z-1)$, infatti

$$q(z) = \frac{\cos\left(\pi(z-1)/2\right)}{(z-1)^2} + \frac{\cos\left(\pi(z-1)/2\right)}{(z-1)^3} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(\pi/2)^{2k}}{(2k)!}(z-1)^{2k-2} + \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(\pi/2)^{2k}}{(2k)!}(z-1)^{2k-3}\,.$$

Con opportuni cambiamenti di indice nelle due serie si ottiene la serie di Laurent in forma canonica

$$q(z) = \sum_{n=-3}^{\infty} C_n (z-1)^n\,,$$

dove i coefficienti sono definiti come

$$C_n = \begin{cases} 0 & n < -3 \\[2ex] (-1)^{(n-1)/2}\dfrac{(\pi/2)^{n+3}}{(n+3)!} & \text{per } |n| \text{ dispari} \\[2ex] (-1)^{(n+2)/2}\dfrac{(\pi/2)^{n+2}}{(n+2)!} & \text{per } |n| \text{ pari} \end{cases}\,.$$

SESTO PROBLEMA (PUNTEGGIO 3/30)

Le funzioni $f(z)$ e $\tilde{f}(w)$, con $\tilde{f}(w) = f(1/w)$, hanno serie di Laurent, centrate nelle rispettive origini $z = 0$ e $w = 0$,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n z^n\,, \qquad \tilde{f}(w) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} D_k w^k\,.$$

Sapendo che la funzione $f(z)$ può avere singolarità solo nell'origine e all'infinito e usando la definizione integrale dei coefficienti di Laurent, si dimostri che, $\forall\, n \in \mathbb{Z}$, vale la relazione

$$C_n = D_{-n}\,.$$

Si verifichi, inoltre, che il residuo all'infinito della funzione $f(z)$ coincide con l'opposto del coefficiente D_1, ovvero

$$\text{Res}\left[f(z), z = \infty\right] = -D_1\,.$$

Si calcoli, infine, il residuo all'infinito della funzione

$$f(z) = \frac{z^2 \cosh(1/z)}{\text{sen}(1/z)}\,.$$

SOLUZIONE DEL SESTO PROBLEMA

I coefficienti di Laurent delle funzioni $f(z)$ e $\tilde{f}(w)$ si ottengono con gli integrali

$$C_n = \frac{1}{2i\pi}\oint_\gamma \frac{f(z)}{z^{n+1}}dz\,, \qquad D_k = \frac{1}{2i\pi}\oint_\eta \frac{\tilde{f}(w)}{w^{k+1}}dw\,, \qquad n, k \in \mathbb{Z}\,,$$

dove γ ed η sono percorsi chiusi centrati, rispettivamente, in $z = 0$ e $w = 0$, di raggi arbitrari, visto che sia la funzione $f(z)$ che, di conseguenza, $\tilde{f}(w)$ possono avere singolarità solo nell'origine e all'infinito.
Dimostriamo come, partendo dall'integrale che definisce i coefficienti C_n e facendo la sostituzione $w = 1/z$, si arrivi al coefficiente D_{-n},

$$C_n = \frac{1}{2i\pi}\oint_\gamma \frac{f(z)}{z^{n+1}}dz = -\frac{1}{2i\pi}\oint_{-\gamma'} \frac{f(1/w)}{w^{-n-1}}\frac{dw}{w^2} = \frac{1}{2i\pi}\oint_{\gamma'} \frac{f(1/w)}{w^{-n+1}}dw = \frac{1}{2i\pi}\oint_\eta \frac{\tilde{f}(w)}{w^{-n+1}}dw = D_{-n}\,.$$

Il percorso di integrazione $-\gamma'$ si ottiene trasformando γ con $z \to 1/z$. Poiché γ avvolge l'origine $z = 0$ ed è orientato in senso antiorario, $-\gamma'$ avvolge ancora l'origine, $w = 0$, ma è orientato in senso orario. Grazie all'assenza di sinogolarità diverse dall'origine e dal punto all'infinito, possiamo deformare con continuità γ' fino a farlo coincidere con il percorso chiuso η.
Come è noto, il residuo all'infinito della funzione $f(z)$ è uguale al residuo nell'origine della funzione $-\tilde{f}(w)/w^2$, si ha infatti

$$\text{Res}\left[f(z), z = \infty\right] = \text{Res}\left[-\frac{\tilde{f}(w)}{w^2}, w = 0\right]\,.$$

In generale il residuo di una funzione in un punto coincide con il coefficiente "-1" della serie di Laurent centrata in quel punto. La serie di Laurent, centrata nell'origine, della funzione $-\tilde{f}(w)/w^2$, per la quale usiamo i coefficienti $\left\{D'_j\right\}_{j=-\infty}^{\infty}$, si ottiene da quella della funzione $\tilde{f}(w)$ come

$$-\frac{\tilde{f}(w)}{w^2} = -\sum_{k=-\infty}^{\infty} D_k w^{k-2} = \{j = k-2,\ k = j+2\} = -\sum_{j=-\infty}^{\infty} D_{j+2} w^j \equiv \sum_{j=-\infty}^{\infty} D'_j w^j\,,$$

da cui

$$D'_j = -D_{j+2}\,, \qquad j \in \mathbb{Z}\,.$$

Il residuo nell'origine di $-\tilde{f}(w)/w^2$ e quindi quello all'infinito della funzione $f(z)$ sono

$$\text{Res}\left[-\frac{\tilde{f}(w)}{w^2}, w = 0\right] = \text{Res}\left[f(z), z = \infty\right] = D'_{-1} = -D_1\,,$$

come volevasi dimostrare.
Il residuo all'infinito della funzione

$$f(z) = \frac{z^2 \cosh(1/z)}{\mathrm{sen}(1/z)},$$

può essere ottenuto come il coefficiente "-1" della serie di Laurent centrata nell'origine della funzione

$$-\frac{\tilde{f}(w)}{w^2} = -\frac{f(1/w)}{w^2} = -\frac{\cosh(w)}{w^4 \mathrm{sen}(w)},$$

Per ottenere tale coefficiente, usiamo le serie di Taylor delle funzioni seno e coseno iperbolico, per cui, nel limite $w \to 0$, si ha

$$\begin{aligned}
-\frac{\tilde{f}(w)}{w^2} &= -\frac{1}{w^4}\left(1 + \frac{w^2}{2!} + \frac{w^4}{4!} + O\left(w^6\right)\right)\left(w - \frac{w^3}{3!} + \frac{w^5}{5!} + O\left(w^7\right)\right)^{-1} \\
&= -\frac{1}{w^5}\left(1 + \frac{w^2}{2!} + \frac{w^4}{4!} + O\left(w^6\right)\right)\left(1 - \frac{w^2}{3!} + \frac{w^4}{5!} + O\left(w^6\right)\right)^{-1} \\
&= -\frac{1}{w^5}\left(1 + \frac{w^2}{2!} + \frac{w^4}{4!} + O\left(w^6\right)\right)\left[1 + \left(\frac{w^2}{3!} - \frac{w^4}{5!} + \cdots\right) + \left(\frac{w^2}{3!} - \frac{w^4}{5!} + \cdots\right)^2 + \cdots\right] \\
&= -\frac{1}{w^5} - \frac{1}{w^3}\left(\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!}\right) - \frac{1}{w}\left(\frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{2!3!} + \frac{1}{(3!)^2}\right) + O(w) \\
&= -\frac{1}{w^5} - \frac{1}{w^3}\frac{2}{3} - \frac{1}{w}\frac{13}{90} + O(w)\,.
\end{aligned}$$

Ne consegue che i primi tre coefficienti di Laurent non nulli sono

$$B_{-5} = -1\,, \qquad B_{-3} = -\frac{2}{3}\,, \qquad B_{-1} = -\frac{13}{90}\,.$$

Il residuo all'infinito è

$$\mathrm{Res}\left[\frac{z^2 \cosh(1/z)}{\mathrm{sen}(1/z)}, z = \infty\right] = B_{-1} = -\frac{13}{90}\,.$$

Si noti che, usando la stessa procedura si ha che il coefficiente B_{-1} coincide con $-D_1$, che è l'opposto del coefficiente "1" della serie di Laurent della funzione $\tilde{f}(w)$, ovvero vale quanto dimostrato precedentemente.