Metodi Matematici per la Fisica

Primo esonero - 28 febbraio 2017

Si risolvano cortesemente i seguenti problemi.

Primo problema (punteggio: 3/30)

Si dimostri che gli integrali

$$J_n = \mathrm{Pr}\int_{C_1} \frac{z}{z^n+1}\,dz\,,$$

dove C_1 è la circonferenza unitaria e $n \in \mathbb{N}$, sono tutti nulli ad eccezione dei primi due, che valgono

$$J_1 = -i\pi\,, \qquad J_2 = i\pi\,.$$

Soluzione del primo problema

L'integranda ha gli n poli semplici

$$z_k = e^{i\pi(2k+1)/n}\,, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1\,,$$

disposti lungo il percorso di integrazione, la circonferenza unitaria. Consideriamo il percorso chiuso Γ_ϵ ottenuto "dentando" la circonferenza unitaria con archi infinitesimi di raggio ϵ, γ_k, centrati nei poli z_k, poiché non ci sono singolarità dell'integranda all'interno di Γ_ϵ si ha

$$\lim_{\epsilon\to 0}\oint_{\Gamma_\epsilon} \frac{z}{z^n+1}\,dz = 0\,.$$

D'altro canto l'integrale su Γ_ϵ può essere scomposto nella somma dei contributi dovuti agli archi infinitesimi γ_k, che sono percorsi in senso orario, e a quelli di circonferenza unitaria,

$$0 = \lim_{\epsilon\to 0}\oint_{\Gamma_\epsilon} \frac{z}{z^n+1}\,dz = \lim_{\epsilon\to 0}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\int_{-\gamma_k} \frac{z}{z^n+1}\,dz + \int_{C_1-\bigcup_{k=0}^{n-1}(-\gamma_k)} \frac{z}{z^n+1}\,dz\right) = -i\pi\sum_{k=0}^{n-1} A_k + \mathrm{Pr}\int_{C_1} \frac{z}{z^n+1}\,dz\,,$$

dove i valori A_k sono i limiti uniformi

$$A_k = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{z}{z^n+1}(z-z_k) \overset{\text{unif.}}{=} = \frac{z_k^{2-n}}{n} = \frac{e^{i\pi(2k+1)(2-n)/n}}{n}\,, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1\,.$$

In definitiva, usando il risultato precedente si ha

$$J_n = \mathrm{Pr}\int_{C_1} \frac{z}{z^n+1}\,dz = \frac{i\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1} e^{i\pi(2k+1)(2-n)/n} = -\frac{i\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1} e^{2i\pi(2k+1)/n} = -\frac{i\pi e^{2i\pi/n}}{n}\sum_{k=0}^{n-1} e^{4i\pi k/n}\,.$$

Il valore J_1 e J_2 si calcolano direttamente come

$$J_1 = -i\pi\,, \qquad J_2 = -\frac{i\pi e^{2i\pi/2}}{2}\left(1 + e^{4i\pi/2}\right) = -\frac{i\pi(-1)}{2}(1+1) = i\pi\,.$$

In generale per $n > 2$, posto $\alpha = e^{4i\pi/n}$, si ha

$$J_n = -\frac{i\pi e^{2i\pi/n}}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\alpha^k = -\frac{i\pi e^{2i\pi/n}}{n}\frac{1-\alpha^n}{1-\alpha} = -\frac{i\pi e^{2i\pi/n}}{n}\frac{1-e^{4i\pi}}{1-e^{4i\pi/n}} = 0\,,$$

l'azzeramento è garantito dal fatto che il numeratore è nullo e il denominatore, invece, è sempre, $\forall\, n > 2$, diverso da zero, infatti, posto $\beta = 4\pi/n$, si ha $0 < \beta = 4\pi/n < 2\pi$ e quindi

$$e^{4i\pi/n} = e^{4i\beta} \neq 1 \qquad \Rightarrow \qquad 1 - e^{4i\pi/n} \neq 0\,.$$

Ovviamente, questa diseguaglianza non è vera nei casi $n = 1$ e $n = 2$, per i quali invece si ha $e^{4i\pi/n} = e^{4i\pi} = e^{2i\pi} = 1$.

SECONDO PROBLEMA (PUNTEGGIO 3/30)

Si calcoli l'integrale

$$J = \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+x^3} dx \,.$$

SOLUZIONE DEL SECONDO PROBLEMA

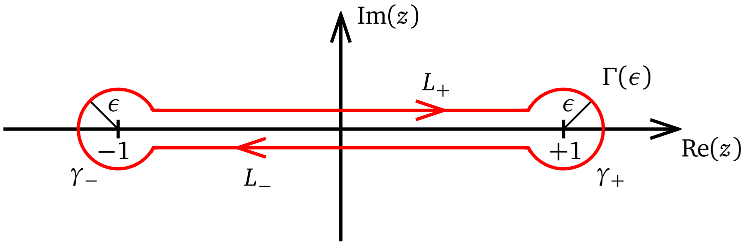
L'integranda

$$f(z) = \frac{\sqrt{1-z^2}}{1+z^3} \,,$$

estesa la piano complesso è una funzione polidroma con punti di diramazione in $z = \pm 1$, coincidenti con gli estremi di integrazione. Ha, inoltre, due poli semplici in

$$z_1 = e^{i\pi/3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad z_2 = e^{5i\pi/3} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \,.$$

Lo zero $z_0 = -1$ del polinomio a denominatore non rappresenta un polo bensì una singolarità eliminabile in quanto coincidente con uno dei punti di diramazione.



Scegliendo le fasi in modo tale da avere la discontinuità in $[-1,1]$, si ottiene che l'integrale sul percorso ad osso, $\Gamma(\epsilon)$, mostrato in figura, è dato dalla somma dei residui in z_1 e z_2, ovvero

$$\oint_{\Gamma(\epsilon)} \frac{\sqrt{1-z^2}}{1+z^3} dz = 2i\pi \sum_{k=1,2} \mathrm{Res}\left[f(z), z_k\right] \,.$$

Il residuo all'infinito è nullo infatti

$$\mathrm{Res}\left[f(z),\infty\right] = -\mathrm{Res}\left[f(1/w)/w^2, 0\right] = -\frac{1}{2i\pi}\oint_{C_{1/2}} \frac{\sqrt{1-1/w^2}}{1+1/w^3}\frac{dw}{w^2} = -\frac{1}{2i\pi}\oint_{C_{1/2}} \frac{\sqrt{w^2-1}}{w^3+1} dw = 0 \,,$$

dove $C_{1/2}$ è la circonferenza di raggio $1/2$ centrata nell'origine. L'integrale è quindi il residuo sono nulli in quanto la funzione integranda non ha singolarità nell'origine. La funzione sotto radice può essere scritta come

$$1 - z^2 = (1-z)(1+z) = |1-z| e^{i\theta_1} \, |1+z| e^{i\theta_2} \,, \qquad \begin{array}{l} \theta_1 \in (-\pi,\pi)\,, \\ \theta_2 \in (0, 2\pi)\,, \end{array}$$

ovvero scegliendo le fasi in modo tale che i due tagli siano $(-1,\infty)$, poiché $\theta_2 \in (0,2\pi)$, e $(1,\infty)$ con $\theta_1 \in (-\pi,\pi)$. In questo modo le fasi sui tratti rettilinei L_+ e L_- del numeratore dell'integranda, la radice quadrata di $(1-z^2)$, sono

$$L_+ : \quad \sqrt{1-z^2} = \sqrt{|1-z||1+z|} e^{i(\theta_1+\theta_2)/2} = \sqrt{|1-z||1+z|} e^{i(0+0)/2} = \sqrt{1-x^2} \,,$$

$$L_- : \quad \sqrt{1-z^2} = \sqrt{|1-z||1+z|} e^{i(\theta_1+\theta_2)/2} = \sqrt{|1-z||1+z|} e^{i(0+2\pi)/2} = -\sqrt{1-x^2} \,.$$

Ne consegue che il limite per $\epsilon \to 0$ dell'integrale su $\Gamma(\epsilon)$ diventa

$$\lim_{\epsilon\to 0} \oint_{\Gamma(\epsilon)} \frac{\sqrt{1-z^2}}{1+z^3} dz = 2J + \lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\gamma_-} \frac{\sqrt{1-z^2}}{1+z^3} dz + \lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\gamma_+} \frac{\sqrt{1-z^2}}{1+z^3} dz \,.$$

I contributi sugli archi infinitesimi sono nulli, infatti, su $\gamma_{\mp}$

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{\sqrt{1-z^2}}{1+z^3}(z\pm 1)\overset{\text{unif.}}{=}0\,.$$

In particolare, su γ_-, $z=-1+\epsilon e^{i\theta}$, quindi

$$\left|\frac{\sqrt{1-z^2}}{1+z^3}(z+1)\right|=\left|\frac{\sqrt{2-\epsilon e^{i\theta}}\sqrt{\epsilon e^{i\theta}}}{(z_1+1-\epsilon e^{i\theta})(z_2+1-\epsilon e^{i\theta})}\right|\underset{\epsilon\to 0}{\sim}\left|\frac{\sqrt{2}\sqrt{\epsilon}}{(z_1+1)(z_2+1)}\right|\underset{\epsilon\to 0}{\to}0\,.$$

Su γ_+ si ha $z=1+\epsilon e^{i\theta}$ e

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{\sqrt{1-z^2}}{1+z^3}(z\pm 1)\overset{\text{unif.}}{=}0\,.$$

In particolare, su γ_-, $z=1+\epsilon e^{i\theta}$, quindi

$$\left|\frac{\sqrt{1-z^2}}{1+z^3}(z-1)\right|=\left|\frac{\sqrt{2+\epsilon e^{i\theta}}\sqrt{-\epsilon e^{i\theta}}\epsilon e^{i\theta}}{\left[1+\left(1+\epsilon e^{i\theta}\right)^3\right]}\right|\underset{\epsilon\to 0}{\sim}\left|\frac{\epsilon^{3/2}}{\sqrt{2}}\right|\underset{\epsilon\to 0}{\to}0\,.$$

In definitiva, si ottiene

$$J=i\pi\sum_{k=1,2}\text{Res}\left[f(z),z_k\right]\,.$$

I residui devono essere calcolati usando le determinazioni scelte, quindi, per quello in $z_1=e^{i\pi/3}=1/2+i\sqrt{3}/2$, si ha

$$\begin{aligned}\text{Res}\left[f(z),z_1\right]&=\lim_{z\to z_1}\frac{\sqrt{1-z^2}}{1+z^3}(z-z_1)=\frac{\sqrt{1-z_1^2}}{3z_1^2}=\frac{\sqrt{|1-z_1||1+z_1|}\,e^{i(\theta_1+\theta_2)/2}}{3z_1^2}\\&=\frac{\sqrt{|1/2-i\sqrt{3}/2||3/2+i\sqrt{3}/2|}\,e^{i(-\pi/3+\pi/6)/2}}{3e^{2i\pi/3}}\\&=\frac{3^{1/4}\,e^{-i\pi/12}}{3e^{2i\pi/3}}=3^{-3/4}\,e^{-3i\pi/4}=(-3)^{-3/4}\,.\end{aligned}$$

Il residuo in $z_2=e^{5i\pi/3}=1/2-i\sqrt{3}/2$ è invece

$$\begin{aligned}\text{Res}\left[f(z),z_2\right]&=\lim_{z\to z_1}\frac{\sqrt{1-z^2}}{1+z^3}(z-z_2)=\frac{\sqrt{1-z_2^2}}{3z_2^2}=\frac{\sqrt{|1-z_2||1+z_2|}\,e^{i(\theta_1+\theta_2)/2}}{3z_1^2}\\&=\frac{\sqrt{|1/2+i\sqrt{3}/2||3/2-i\sqrt{3}/2|}\,e^{i(\pi/3+11\pi/6)/2}}{3e^{10i\pi/3}}\\&=\frac{3^{1/4}\,e^{13i\pi/12}}{3e^{16i\pi/12}}=3^{-3/4}\,e^{-i\pi/4}=(3e^{i\pi/3})^{-3/4}\,.\end{aligned}$$

Il risultato finale è

$$J=i\pi\sum_{k=1,2}\text{Res}\left[f(z),z_k\right]=i\pi 3^{-3/4}\left(e^{-3i\pi/4}+e^{-i\pi/4}\right)=i\pi 3^{-3/4}e^{-i\pi/2}\left(e^{-i\pi/4}+e^{i\pi/4}\right)=\pi 3^{-3/4}2\cos(\pi/4)\,,$$

ovvero

$$J=2^{1/2}3^{-3/4}\pi\,.$$

Terzo problema (punteggio 3/30)

Si calcoli l'integrale in valore principale

$$K=\text{Pr}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\text{sen}(x)-x}{x^3(x-1)}dx\,.$$

Soluzione del terzo problema

L'integranda ha solo un polo semplice in $x = 1$, infatti allo zero di ordine tre del polinomio a denominatore corrisponde uno zero dello stesso ordine della funzione a numeratore, cosicché l'origine rappresenta una singolarità eliminabile. Si ha infatti, usando lo sviluppo in serie di Taylor, centrato nell'origine, della funzione seno, si ha il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}(x) - x}{x^3(x-1)} = \lim_{x\to 0} \frac{-x^3/3! + x^5/5! + O(x^7)}{x^3(x-1)} = \frac{1}{6}\,.$$

Possiamo quindi deformare il percorso, "dentando" l'asse reale con due archi immersi nel semipiano delle parti immaginari positive, ovvero

$$(-\infty,\infty) \longrightarrow L(\epsilon) = (-\infty,-\epsilon) \cup (-\gamma_0) \cup (\epsilon, 1-\epsilon) \cup (-\gamma_1) \cup (1+\epsilon,\infty)\,,$$

con gli archi, orientati in senso antiorario,

$$\gamma_0 = \{z : z = \epsilon e^{i\theta}\,, \theta \in (0,\pi)\}\,, \qquad \gamma_1 = \{z : z = 1 + \epsilon e^{i\theta}\,, \theta \in (0,\pi)\}\,.$$

Si ha

$$\begin{aligned}
\lim_{\epsilon\to 0} \int_{L(\epsilon)} \frac{\text{sen}(z) - z}{z^3(z-1)} dz &= \text{Pr}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen}(x) - x}{x^3(x-1)} dx + \lim_{\epsilon\to 0} \int_{-\gamma_1} \frac{\text{sen}(z) - z}{z^3(z-1)} dz \\
&= \text{Pr}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen}(x) - x}{x^3(x-1)} dx - \lim_{\epsilon\to 0} \int_{\gamma_1} \frac{\text{sen}(z) - z}{z^3(z-1)} dz\,,
\end{aligned}$$

da cui

$$\text{Pr}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen}(x) - x}{x^3(x-1)} dx = \lim_{\epsilon\to 0} \int_{L(\epsilon)} \frac{\text{sen}(z) - z}{z^3(z-1)} dz + \lim_{\epsilon\to 0} \int_{\gamma_1} \frac{\text{sen}(z) - z}{z^3(z-1)} dz\,,$$

il valore principale non contiene il contributo dell'arco infinitesimo che aggira la singolarità. Il secondo integrale può essere calcolato usano il lemma per l'integrazione su archi infinitesimi e vale

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_{\gamma_1} \frac{\text{sen}(z) - z}{z^3(z-1)} dz = i\pi \lim_{\epsilon\to 0} \frac{\text{sen}(z) - z}{z^3(z-1)}(z-1) = i\pi \lim_{\epsilon\to 0} \frac{\text{sen}(z) - z}{z^3} = i\pi\,(\text{sen}(1) - 1)\,.$$

Il primo può essere calcolato sfruttando il lemma di Jordan, infatti

$$\begin{aligned}
\int_{L(\epsilon)} \frac{\text{sen}(z) - z}{z^3(z-1)} dz &= \frac{1}{2i} \int_{L(\epsilon)} \frac{e^{iz} - e^{-iz} - 2iz}{z^3(z-1)} dz \\
&= \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2i} \int_{(L(\epsilon)\cap[-R,R])\cup C_R^+} \frac{e^{iz} - 2iz}{z^3(z-1)} dz - \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2i} \int_{(L(\epsilon)\cap[-R,R])\cup(-C_R^-)} \frac{e^{-iz}}{z^3(z-1)} dz \\
&= 0 + \pi\left(\text{Res}\left[\frac{e^{-iz}}{z^3(z-1)}, 0\right] + \text{Res}\left[\frac{e^{-iz}}{z^3(z-1)}, 1\right]\right)
\end{aligned}$$

dove $C_R^{+(-)}$ è la semi-circonferenza di raggio R, centrata nell'origine e orientata in senso antiorario, immersa nel semipiano della parti immaginarie positive (negative). Il primo percorso di integrazione non contiene singolarità, quindi l'integrale corrispondente è nullo, il secondo, invece, contiene il polo triplo nell'origine e il polo semplice in $z = 1$. I residui sono

$$\begin{aligned}
\text{Res}\left[\frac{e^{-iz}}{z^3(z-1)}, 0\right] &= \frac{1}{2}\frac{d^2}{dz^2}\frac{e^{-iz}}{z-1}\bigg|_{z=0} = \frac{1}{2}\frac{(1-z)(z-1)^2 - 2(z-1)(-iz+i-1)}{(z-1)^4}e^{-iz}\bigg|_{z=0} = \frac{2i-1}{2}\,; \\
\text{Res}\left[\frac{e^{-iz}}{z^3(z-1)}, 1\right] &= \frac{e^{-iz}}{z^3}\bigg|_{z=1} = e^{-i} = \cos(1) - i\,\text{sen}(1)\,.
\end{aligned}$$

In definitiva, mettendo insieme i risultati ottenuti, si ha

$$
\begin{aligned}
K = \mathrm{Pr}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{sen}(x)-x}{x^3(x-1)}dx &= \lim_{\epsilon\to 0}\int_{L(\epsilon)} \frac{\mathrm{sen}(z)-z}{z^3(z-1)}dz + \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\gamma_1} \frac{\mathrm{sen}(z)-z}{z^3(z-1)}dz\,,\\
&= \pi\left(\frac{2i-1}{2}+\cos(1)-i\,\mathrm{sen}(1)\right)+i\pi\left(\mathrm{sen}(1)-1\right),
\end{aligned}
$$

da cui

$$
K = \pi\left(\cos(1)-\frac{1}{2}\right).
$$

Quarto problema (punteggio 3/30)

Si determini lo sviluppo di Mittag-Leffler della funzione

$$
\phi(z) = \frac{1}{\mathrm{sen}(z)(1-\cos(z))}\,.
$$

Soluzione del quarto problema

I poli della funzione sono nei punti $z = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$. In particolare nei multipli dispari di $\pm\pi$ si hanno poli semplici, in quanto della funzione a denominatore si annulla solo la funzione seno, che ha in questi punti degli zeri semplici; nei multipli pari si hanno invece poli tripli, infatti, allo zero semplice della funzione seno va "aggiunto" lo zero doppio della funzione $(1-\cos(z))$. Alla luce di ciò lo sviluppo è

$$
\phi(z) = \phi_0(z) + \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{R_k}{z-(2k+1)\pi} + \sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(\frac{T_{-3,k}}{(z-2k\pi)^3}+\frac{T_{-2,k}}{(z-2k\pi)^2}+\frac{T_{-1,k}}{z-2k\pi},\right)
$$

dove $\phi_0(z)$ è la parte intera, i numeri R_k sono i residui dei poli pari $2k\pi$, le terne $\{T_{-3,k}, T_{-2,k}, T_{-1,k}\}$, $k \in \mathbb{Z}$ rappresentano i coefficienti della parte principale della serie di Laurent nei poli dispari $(2k+1)\pi$. I coefficienti R_k si ottengono con la formula del residuo di un polo semplice, ovvero

$$
R_k = \lim_{z\to(2k+1)\pi} \frac{z-(2k+1)\pi}{\mathrm{sen}(z)(1-\cos(z))} = \frac{1}{2\cos((2k+1)\pi)} = -\frac{1}{2}\,, \qquad k\in\mathbb{Z}\,.
$$

I coefficienti $\{T_{-3,k}, T_{-2,k}, T_{-1,k}\}$ si ottengono sfruttando gli sviluppi noti delle funzione seno e coseno, ad esempio in $z_{2k} = 2k\pi$ si ha

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\mathrm{sen}(z)(1-\cos(z))} &= \left((z-z_{2k})-\frac{(z-z_{2k})^3}{3!}+O((z-z_{2k})^5)\right)^{-1}\left(\frac{(z-z_{2k})^2}{2}-\frac{(z-z_{2k})^4}{4!}+O((z-z_{2k})^6)\right)^{-1}\\
&= \frac{2}{(z-z_{2k})^3}\left[1+\left(\frac{(z-z_{2k})^2}{3!}+O((z-z_{2k})^4)\right)+\left(\frac{(z-z_{2k})^2}{3!}+O((z-z_{2k})^4)\right)^2+\dots\right]\\
&\quad\left[1+\left(\frac{2(z-z_{2k})^2}{4!}+O((z-z_{2k})^4)\right)+\left(\frac{2(z-z_{2k})^2}{4!}+O((z-z_{2k})^4)\right)^2+\dots\right]\\
&= \frac{2}{(z-z_{2k})^3}+\frac{2}{z-z_{2k}}\left(\frac{1}{3!}+\frac{2}{4!}\right)+O(z-z_{2k})\\
&= \frac{2}{(z-z_{2k})^3}+\frac{1}{2(z-z_{2k})}+O((z-z_{2k})),
\end{aligned}
$$

ovvero

$$
T_{-3,k} = 2\,, \qquad T_{-2,k} = 0\,, \qquad T_{-1,k} = \frac{1}{2}\,.
$$

Il secondo coefficiente è nullo in quanto la funzione è dispari. Si ha quindi

$$
\phi(z) = \phi_0(z) - \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{1}{z-(2k+1)\pi} + \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(\frac{4}{(z-2k\pi)^3}+\frac{1}{z-2k\pi}\right).
$$

La funzione non ha singolarità all'infinito, quindi la parte $\phi_0(z)$ è costante, indichiamo il suo valore semplicemente con ϕ_0. Per calcolare ϕ_0 consideriamo il limite

$$\lim_{z\to 0}\left(\phi(z)-\frac{2}{z^3}-\frac{1}{2z}\right)=T_{0,0}\,,$$

che tende al coefficiente "zero" della serie di Laurent nell'origine della funzione. Ma, come già visto, la funzioni è dispari, quindi i coefficienti zero delle serie di Laurent relative ad ogni polo sono nulli, ovvero

$$0=\phi_0-\frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{1}{-(2k+1)\pi}+\frac{1}{2}\sum_{k\neq 0}\left(\frac{4}{(-2k\pi)^3}+\frac{1}{-2k\pi}\right),$$

da cui si ha $\phi_0=0$, infatti tutti i termini delle serie sono dispari rispetto all'indice che copre un intervallo simmetrico, cioè

$$\phi_0=-\frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(2k+1)\pi}+\frac{1}{2}\sum_{k\neq 0}\left(\frac{4}{(2k\pi)^3}+\frac{1}{2k\pi}\right)=0\,.$$

Lo sviluppo di Mittag-Leffler assume la forma

$$\begin{aligned}\phi(z)&=-\frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{1}{z-(2k+1)\pi}+\frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(\frac{4}{(z-2k\pi)^3}+\frac{1}{z-2k\pi}\right)\\&=-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z}{z^2-(2k+1)^2\pi^2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{4\left(z^3+12zk^2\pi^2\right)}{\left(z^2-(2k\pi)^2\right)^3}+\frac{z}{z^2-(2k\pi)^2}\right)+\frac{2}{z^2}+\frac{1}{2z}\,.\end{aligned}$$

Quinto problema (punteggio 3/30)

Si ottengano l'espressione formale dei coefficienti della parte principale e quella esplicita dei coefficienti della parte regolare della serie di Laurent, centrata nell'origine, della funzione

$$\sigma(z)=\frac{\mathrm{sen}(1/z)\cos(1/z)}{z^2+3}\,.$$

Soluzione del quinto problema

La funzione $\sigma(z)$ ha un singolarità essenziale nell'origine e due poli semplici in $z_{1,2}=\pm i\sqrt{3}$. La serie di Laurent centrata nell'origine converge nella corona circolare $0<|z|<\sqrt{3}$. Sfruttando la formula di duplicazione della funzione seno si ha

$$\sigma(z)=\frac{\mathrm{sen}(2/z)}{2(z^2+3)}\,.$$

Usando la serie geometrica e la serie di Taylor della funzione otteniamo

$$\sigma(z)=\frac{1}{6}\sum_{k,m=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(2/z)^{2k+1}}{(2k+1)!}(-1)^m3^{-m}z^{2m}=\sum_{k,m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+m}2^{2k}3^{-m-1}}{(2k+1)!}z^{2(m-k)-1}\,.$$

Si hanno solo potenze dispari $2(m-k)-1$, posto $n=m-k$, i coefficienti C_{2n-1} sono

$$C_{2n-1}=\sum_{k,m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+m}2^{2k}3^{-m-1}}{(2k+1)!}\delta_{m,n+k}=\sum_{k=k_{\min}}^{\infty}\frac{(-1)^{2k+n}2^{2k}3^{-n-k-1}}{(2k+1)!}=\frac{(-1)^n3^{-n}}{2\sqrt{3}}\sum_{k=k_{\min}}^{\infty}\frac{2^{2k+1}\sqrt{3}^{-2k-1}}{(2k+1)!}\,.$$

Il valore $k_{\min}$ dipende da n, infatti $k=m-n$ e, poiché $m\geq 0$, si ha $k\geq -n$. In definitiva

$$k_{\min}=\max\{0,-n\}=\begin{cases}0 & \text{se: } n\geq 0\\ -n=|n| & \text{se: } n<0\end{cases}\,.$$

Ne consegue che per $n \geq 0$

$$C_{2n-1} = \frac{(-1/3)^n}{2\sqrt{3}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2/\sqrt{3})^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{(-1/3)^n}{2\sqrt{3}} \mathrm{senh}(2/\sqrt{3}) \, .$$

Questa è la forma esplicita di tutti coefficienti della parte regolare e il primo di quella principale, ovvero del residuo nell'origine della funzione $\sigma(z)$. Per ciò che riguarda i coefficienti della parte principale con potenze minori di -1, si ha la serie troncata

$$C_{2n-1} = \frac{(-1/3)^n}{2\sqrt{3}} \sum_{k=|n|}^{\infty} \frac{(2/\sqrt{3})^{2k+1}}{(2k+1)!} \, , \qquad\qquad n < 0 \, .$$

Sesto problema (punteggio 3/30)

Data la rappresentazione integrale

$$\eta(z) = \int_0^{\infty} e^{-t^2} t^{z^2-1} dt \, ,$$

se ne determini il dominio di convergenza e lo sviluppo di Mittag-Leffler.
Suggerimento. È utile suddividere l'intervallo di integrazione come $[0,\infty) = [0,1] \cup (1,\infty)$ e calcolare direttamente il primo integrale, che conterrà i poli, usando uno sviluppo in serie noto. Il secondo integrale rappresenta un funzione che ha singolarità al finito?

Soluzione del sesto Problema

L'integranda non ha singolrità all'interno dell'intervallo di integrazione, ne consegue che le condizioni di convergenza dell'integrale si ottengono studiando il comportamento negli estremi di integrazione. In $t \to \infty$ è la funzione esponenziale ad assicurare l'integrabilità, mentre nell'origine è la potenza t^{z^2-1} che determina il comportamento. È quindi necessario richiedere che $\mathrm{Re}(z^2-1) > -1$ e quindi si ha il dominio di convergenza

$$D = \{z : \mathrm{Re}(z^2) > 0\} \, .$$

Suddividendo l'integrale come suggerito e sfruttando lo sviluppo in serie dell'esponenziale si ha

$$\begin{aligned}
\eta(z) &= \int_0^1 e^{-t^2} t^{z^2-1} dt + \int_1^{\infty} e^{-t^2} t^{z^2-1} dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^1 t^{2k} t^{z^2-1} dt + \int_1^{\infty} e^{-t^2} t^{z^2-1} dt \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^1 t^{2k+z^2-1} dt + \int_1^{\infty} e^{-t^2} t^{z^2-1} dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left. \frac{t^{2k+z^2}}{2k+z^2} \right|_0^1 + \int_1^{\infty} e^{-t^2} t^{z^2-1} dt \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{1}{2k+z^2} + \int_1^{\infty} e^{-t^2} t^{z^2-1} dt \\
\eta(z) &= \frac{1}{z^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2i\sqrt{2k}\,k!} \left(\frac{1}{z - i\sqrt{2k}} - \frac{1}{z + i\sqrt{2k}} \right) + \eta_0(z) \, .
\end{aligned}$$

La funzione

$$\eta_0(z) = \int_1^{\infty} e^{-t^2} t^{z^2-1} dt$$

è intera, in quanto l'integrale che la rappresenta converge in ogni dominio finito, l'integranda non ha, infatti, singolarià nell'intervallo di integrazione. I poli nei punti $z_k = \mathrm{segno}(k) i \sqrt{2|k|}$, con $k \in \mathbb{Z}$ e $k \neq 0$, sono semplici e hanno residui

$$R_k = \mathrm{signo}(k) \frac{(-1)^k}{2i\sqrt{2|k|}\,|k|!} = \frac{(-1)^k}{2i\sqrt{2|k|}\,k\,(|k|-1)!} \, .$$

Nell'origine si ha un polo doppio con residuo nullo e coefficiente di Laurent $C_{-2} = 1$.