Metodi Matematici per la Fisica

Prova scritta - 27 settembre 2011

Esercizio 1 (6 punti)
Si calcoli l'integrale

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{sen}(x)}{\mathrm{senh}(x)} dx \,.$$

. . . .

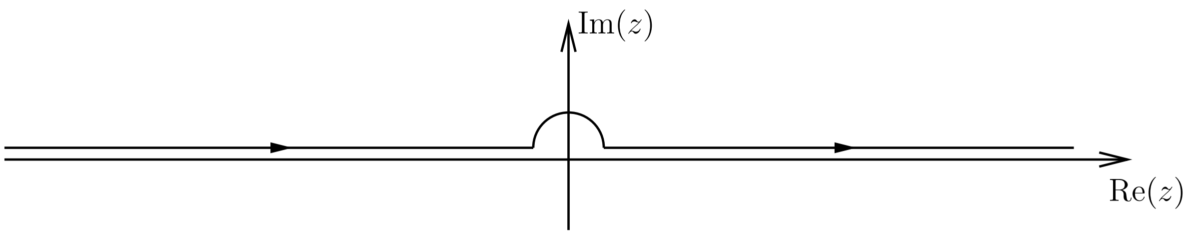
Soluzione
Ci sono due metodi, di seguito il primo. Ci sono infiniti poli semplici infatti il seno iperbolico si annulla in ogni $z_k = ik\pi$ con $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Il punto z_0 è una singolarità eliminabile, infatti

$$\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{sen}(x)}{\mathrm{senh}(x)} = 1 \,.$$

L'integrale può essere decomposto come

$$I = \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{\mathrm{senh}(x)} dx - \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ix}}{\mathrm{senh}(x)} dx \,,$$

applicando il lemma di Jordan nel semipiano superiore ed inferiore rispettivamente sul cammino mostrato in figura si ha:



$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{2i} \lim_{R \to \infty} \left[\oint_{C_R^+} \frac{e^{iz}}{\mathrm{senh}(z)} dz - \oint_{C_R^-} \frac{e^{-iz}}{\mathrm{senh}(z)} dz \right] \\
&= \pi \left[\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{Res}\left(\frac{e^{iz}}{\mathrm{senh}(z)} \,, z = z_k \right) + \sum_{k=-\infty}^{0} \mathrm{Res}\left(\frac{e^{-iz}}{\mathrm{senh}(z)} \,, z = z_k \right) \right] \\
&= \pi \left[\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{Res}\left(\frac{e^{iz}}{\mathrm{senh}(z)} \,, z = z_k \right) + \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{Res}\left(\frac{e^{-iz}}{\mathrm{senh}(z)} \,, z = -z_k \right) \right] \,,
\end{aligned}$$

dove $C_R^{\pm}$ è il cammino chiuso nel semipiano superiore o inferiore e il segno del secondo termine tiene conto del fatto che C_R^- è orientato in senso orario. I residui sono

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}\left(\frac{e^{\pm iz}}{\mathrm{senh}(z)} \,, z = z_k \right) &= \lim_{z \to ik\pi} \frac{e^{\pm iz}}{\mathrm{senh}(z)} (z - ik\pi) \\
&= \frac{e^{\mp k\pi}}{\cosh(ik\pi)} = \frac{e^{\mp k\pi}}{\cos(k\pi)} = (-1)^k e^{\mp k\pi} = (-e^{\mp\pi})^k \,.
\end{aligned}$$

Le due serie saranno:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \text{Res}\left(\frac{e^{iz}}{\text{senh}(z)}\,, z = z_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty}(-e^{-\pi})^k = \frac{1}{1-(-e^{-\pi})} - 1 = \frac{-e^{-\pi}}{1+e^{-\pi}} = \frac{-1}{1+e^{\pi}}\,,$$
$$\sum_{k=0}^{\infty} \text{Res}\left(\frac{e^{-iz}}{\text{senh}(z)}\,, z = -z_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty}(-e^{-\pi})^k = \frac{1}{1-(-e^{-\pi})} = \frac{e^{\pi}}{1+e^{\pi}}\,.$$

Il valore dell'integrale è quindi:

$$I = \pi\left(\frac{-1}{1+e^{\pi}} + \frac{e^{\pi}}{1+e^{\pi}}\right) = \pi\frac{e^{\pi}-1}{e^{\pi}+1} = \pi\frac{e^{\pi/2}-e^{-\pi/2}}{e^{\pi/2}+e^{-\pi/2}} = \pi \tanh\left(\frac{\pi}{2}\right)\,.$$

. . . .

Esercizio 2 (5 punti)
Calcolare l'integrale

$$J = \int_C (z^3 - z^{*3})dz\,,$$

dove C è il cammino rettilineo del piano complesso che unisce i punti $z_1 = i$ e $z_2 = 2$.

. . . .

Soluzione
L'integrale si riscrive come

$$J = 2\,i\int_C \text{Im}[z^3]dz = 2\,i\int_C[-\text{Im}(z)^3 + 3\text{Re}(z)^2\text{Im}(z)]dz\,,$$

e il cammino d'integrazione può essere parametrizzato sapendo che $y = 1 - x/2$, con $x = \text{Re}(z)$ e $y = \text{Im}(z)$,

$$z(t) = t + i\left(1-\frac{t}{2}\right)\,, \quad dz = \left(1-\frac{i}{2}\right)dt\,, \quad z(0) = z_1 = i\,, \quad z(2) = z_2 = 2\,.$$

L'integrale diventa, quindi, una integrale di una funzione complessa a variabile reale t e si ha

$$\begin{aligned}
J &= 2i\left(1+\frac{1}{2i}\right)\int_0^2\left(1-\frac{t}{2}\right)\left[-\left(1-\frac{t}{2}\right)^2 + 3t^2\right]dt \\
&= (2i+1)\int_0^2\left(1-\frac{t}{2}\right)\left(\frac{11t^2}{4} + t - 1\right)dt \\
&= (2i+1)\int_0^2\left(-\frac{11t^3}{8} + \frac{9t^2}{4} + \frac{3t}{2} - 1\right)dt \\
&= (2i+1)\left(-\frac{11}{2} + 6 + 3 - 2\right) \\
&= (2i+1)\frac{-11+12+6-4}{2} = \frac{3}{2}(2i+1)\,.
\end{aligned}$$

. . . .

Esercizio 3 (5 punti)
Sia $L^2_p(a,b)$ la classe della funzioni a quadrato sommabili nell'intervallo $[a,b]$, con funzione peso $p(x)$.

- Si dimostri che: $\forall\, f(x) \in L^2_p(a,b) \Rightarrow f(x) \in L^1_p(a,b)$.
- Si verifichi, quindi che la funzione

$$g(x) = \exp\left[i \arctan(x) - \frac{x^2}{2}\right]$$

appartiene alla classe $L^1_1(-\infty,\infty)$.

. . . .

soluzione

- $\forall\, f(x) \in L^2_p(a,b)$ si ha

$$\int_a^b |f(x)|^2 p(x) < \infty\,.$$

Usiamo la disuguaglianza di Schwartz

$$|(g,f)|^2 \leq (g,g)(f,f)\,,$$

che vale $\forall\, f(x), g(x) \in L^2_p(a,b)$, nel caso di $g(x)=1$,

$$|(1,f)|^2 = \left|\int_a^b f(x)p(x)dx\right|^2 \leq \int_a^b |f(x)|^2 p(x)dx \int_a^b p(x)dx < \infty\,,$$

e quindi l'asserto.

- Per dimostrate che la funzione

$$g(x) = \exp\left[i \arctan(x) - \frac{x^2}{2}\right]$$

sia sommabile in $\mathbb{R}$ usiamo la disuguaglianza di Darboux, ovvero

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\arctan(x)-\frac{x^2}{2}}dx\right| \leq \int_{-\infty}^{\infty}\left|e^{i\arctan(x)-\frac{x^2}{2}}\right|dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \sqrt{2\pi} < \infty.$$

. . . .

Esercizio 4 (5 punti)
Si consideri il sistema $\{a_n\}$, ortonormale e completo nello spazio H. Si dimostri che il sistema $\{b_n\}$, definito dalla relazione

$$b_n = a_n + \beta\, a_k\,,$$

con $\beta \in \mathbb{C}$ e k fissato, è anch'esso completo in H.

. . . .

Soluzione
Per dimostrare che $\{b_n\}$ è completo facciamo vedere che l'unico vettore normale a tutti i vettori b_n è il vettore nullo. Sia c un vettore ortogonale ad un b_n generico

$$(b_n, c) = 0 \quad \Rightarrow \quad (a_n + \beta a_k, c) = (a_n, c) + \beta(a_k, c) = 0 \quad \Rightarrow \quad (a_n, c) = -\beta(a_k, c)\,.$$

Indicando con c_n il coefficiente n-esimo, cioè $c_n = (a_n, c)$, si ha

$$c_n = -\beta c_k\,,$$

dall'arbitrarietà di n si evince che

$$-\beta c_k = c_1 = c_2 = \ldots = c_{k-1} = c_{k+1} = \ldots = c_n = \ldots = 0\,,$$

l'ultima identità vale poiché la serie dei coefficienti converge. Quindi, escludendo il caso banale $\beta = 0$ per cui l'asserto è vero essendo $\{b_n\} = \{a_n\}$, la precedente relazione implica che l'unico vettore ortogonale a tutti i b_n è quello nullo, ovvero il sistema $\{b_n\}$ è completo.

. . . .

Esercizio 5 (6 punti)
Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2i \\ -2i & 3 \end{pmatrix},$$

- si trovino autovalori e autovettori;
- si calcoli la matrice $\sqrt{A}$.

Soluzione
La matrice è hermitiana, infatti:

$$A = (A^*)^T = A^\dagger\,.$$

L'equazione secolare è

$$\det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 2i \\ -2i & 3-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0\,,$$

da cui si ottengono i due autovalori:

$$\lambda_1 = 1\,, \qquad \lambda_2 = 5\,.$$

Gli autovettori corrispondenti sono:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2i \\ -2i & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \beta_{1,2} \end{pmatrix} = \lambda_{1,2} \begin{pmatrix} 1 \\ \beta_{1,2} \end{pmatrix},$$

dalla prima si ha

$$\beta_{1,2} = \frac{\lambda_{1,2} - 3}{2i} = \begin{cases} i \\ -i \end{cases}.$$

Infine i due autovettori normalizzati sono

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} , \qquad u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} , \tag{1}$$

con $u_1^\dagger u_2 = 0$, infatti sono autovettori relativi ad autovalori distinti di una matrice hermitiana. Per ciò che riguarda la matrice $\sqrt{A}$ si ha che

$$\sqrt{A}\, u_{1,2} = \sqrt{\lambda_{1,2}}\, u_{1,2} \, ,$$

per cui la rappresentazione spettrale è

$$\sqrt{A}\,' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix} .$$

Tale rappresentazione è connessa a quella "normale" dalla trasformazione unitaria

$$\sqrt{A}\,' = U^\dagger \sqrt{A}\, U \, , \qquad U = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ i/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} \end{pmatrix} ,$$

dove le colonne di U sono i vettori u_1 e u_2 e, ovviamente, $UU^\dagger = U^\dagger U = I$.
Ne consegue che per riottenere la matrice di partenza $\sqrt{A}$ si deve considerare la trasformazione inversa:

$$\begin{aligned} \sqrt{A} = U\, \sqrt{A}\,'\, U^\dagger &= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ i/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & i/\sqrt{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ i/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} \\ \sqrt{5/2} & i\sqrt{5/2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (1+\sqrt{5})/2 & i(-1+\sqrt{5})/2 \\ i(1-\sqrt{5})/2 & (1+\sqrt{5})/2 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

. . . .

Esercizio 6 (5 punti)
Data l'equazione integrale

$$f(x) = x + \alpha \int_{-1}^{1} xy(1-xy) f(y) dy$$

- usando il metodo della serie di Neumann, si verifichi per quali valori reali di α esiste ed è unica la soluzione;
- la si determini per $\alpha = 1$.

. . . .

Soluzione
Per risolvere l'equazione con il metodo della serie di Neumann calcoliamo la successione di funzioni $\{f_n(x)\}$ con

$$\begin{aligned}
f_0(x) &= x \\
f_1(x) &= x + \alpha \int_{-1}^{1} xy(1-xy) f_0(y) dy = x + \frac{2}{3}\alpha\, x \\
f_2(x) &= x + \alpha \int_{-1}^{1} xy(1-xy) f_1(y) dy = x + \frac{2}{3}\alpha x + \frac{4}{9}\alpha^2 x \\
&\vdots \\
f_n(x) &= x + \alpha \int_{-1}^{1} xy(1-xy) f_{n-1}(y) dy = x + x \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{2}{3}\,\alpha\right)^k = x \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{2}{3}\,\alpha\right)^k
\end{aligned}$$

La successione tende alla serie geometrica ti termine $2\alpha/3$ che converge se $|\alpha| < 3/2$. In generale la condizione di convergenza è

$$|\alpha| < \frac{1}{||\hat{K}||}\,,$$

dove la norma del kernel, $K(x,y) = xy(1-xy)$, si ottiene come

$$||\hat{K}|| = \sqrt{\int_{-1}^{1} dx \int_{-1}^{1} dy |K(x,y)|^2} = \frac{2\sqrt{34}}{15}\,.$$

Quindi la richiesta

$$|\alpha| < \frac{1}{||\hat{K}||} = \frac{15}{2\sqrt{34}} < \frac{3}{2}\,,$$

garantisce la convergenza della serie geometrica. In questo caso la soluzione è

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = x \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\,\alpha\right)^k = \frac{3\,x}{3-2\alpha}\,.$$

La condizione sul parametro α, un volta sommata la serie, può essere rilassata, infatti l'espressione analitica ottenuta è bene definita per ogni $\alpha \neq 3/2$.
Nel caso $\alpha = 1$ la serie converge alla funzione

$$f(x) = 3\,x\,.$$

Si verifica facilmente che questa funzione è una soluzione,

$$\begin{aligned}
f(x) &= x + \int_{-1}^{1} xy(1-xy) 3y dy \\
&= x + 3x \int_{-1}^{1} (y^2 - xy^3) dy \\
&= x + 3x \left(\frac{y^3}{3} - x\frac{y^4}{4}\right)_{-1}^{1} \\
&= x + 3x\frac{2}{3} = 3x\,.
\end{aligned}$$

Si osserva inoltre che il nucleo è separabile, l'equazione può essere risolta come segue. Definiamo le funzioni

$$\begin{aligned} M_1(x) &= x\,, & N_1(y) &= y\,, \\ M_2(x) &= x^2\,, & N_2(y) &= -y^2\,, \end{aligned}$$

da cui si ottengono i coefficienti $B_{1,2}$ come

$$\begin{aligned} B_1 &= \int_{-1}^{1} N_1(x)x dx = \int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3}\,, \\ B_2 &= \int_{-1}^{1} N_2(x)x dx = -\int_{-1}^{1} x^3 dx = 0\,, \end{aligned}$$

e quelli A_{ij}, con $i, j = 1, 2$

$$\begin{aligned} A_{11} &= \int_{-1}^{1} N_1(x)M_1(x)dx = \int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3}\,, \\ A_{12} &= \int_{-1}^{1} N_1(x)M_2(x)dx = \int_{-1}^{1} x^3 dx = 0\,, \\ A_{21} &= \int_{-1}^{1} N_2(x)M_1(x)dx = -3\int_{-1}^{1} x^3 dx = 0\,, \\ A_{22} &= \int_{-1}^{1} N_2(x)M_2(x)dx = -\int_{-1}^{1} x^4 dx = -\frac{2}{5}\,. \end{aligned}$$

Risolviamo il sistema

$$\begin{pmatrix} 1-\alpha A_{22} & -A_{21} \\ -A_{21} & 1-\alpha A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1-2\alpha/3 & 0 \\ 0 & 1+2\alpha/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 0 \end{pmatrix}\,.$$

Si ha soluzione se

$$\det \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 7/5 \end{pmatrix} \neq 0$$
$$\alpha \neq \frac{3}{2}, -\frac{5}{2}\,.$$

Nel caso $\alpha = 1$

$$\begin{pmatrix} 1-2\alpha/3 & 0 \\ 0 & 1+2\alpha/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e soluzione si ottiene come

$$\begin{aligned} f(x) &= x + C_1 M_1(x) + C_2 M_2(x) \\ &= x + 2x = 3x\,. \end{aligned}$$