

METODI MATEMATICI PER LA FISICA

PROVA PARZIALE DEL 27 FEBBRAIO 2026

Si risolvano cortesemente i seguenti problemi, sapendo che il punteggio assegnato a ciascuna procedura di risoluzione può variare tra lo zero e il massimo indicato ed è stabilito valutando:

1. la correttezza del risultato ottenuto e della procedura utilizzata;
2. la completezza dei passaggi riportati;
3. il livello di esemplificazione con cui sono espressi i risultati (ad esempio un risultato numerico reale non deve contenere l'unità immaginaria);
4. la correttezza del formalismo utilizzato;
5. la chiarezza dell'esposizione e la leggibilità del testo;
6. la bellezza e l'armonia del tutto.

PRIMO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 3,5/30)

Si calcoli l'integrale *Turbo Terrific*

$$\text{Turbo Terrific} = \int_0^{\infty} \frac{e^{\cos(t)} \sin(\sin(t))}{t} dt.$$

Curiosità. Il primo dei 34 episodi, da 10 minuti ciascuno, della serie di cartoni animati *Wacky Races* è andato in onda per la prima volta negli Stati Uniti il 14 settembre del 1968. Ogni episodio racconta una gara di un campionato automobilistico cui partecipano 11 stranissime e bizzarre vetture. Le auto con gli equipaggi sono rappresentate nella figura, in cui sono indicati anche i nomi originali e in italiano dei veicoli.



Il debutto italiano sul primo canale della Rai risale al 24 marzo del 1980. Venne trasmessa la serie completa, anche se in episodi doppi, cosicché le puntate furono 14 da 20 minuti ciascuno.

SOLUZIONE DEL PRIMO PROBLEMA

La funzione integranda è simmetrica, ovvero è invariante rispetto allo scambio $t \rightarrow -t$, ed è meromorfa, essendo il rapporto di funzioni intere. Ha nell'origine una singolarità eliminabile, infatti ha il valore limite finito

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{\cos(t)} \sin(\sin(t))}{t} = e \lim_{t \rightarrow 0} \cos(t) \cos(\sin(t)) = e.$$

In virtù della simmetria possiamo estendere l'intervallo d'integrazione a tutto l'asse reale

$$\text{Turbo Terrific} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\cos(t)} \sin(\sin(t))}{t} dt.$$

Per la funzione seno a numeratore usiamo la formula di Eulero

$$\text{sin}(t) = \frac{1}{4i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\cos(t)} (e^{i\sin(t)} - e^{-i\sin(t)})}{t} dt = \frac{1}{4i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\cos(t)+i\sin(t)} - e^{\cos(t)-i\sin(t)}}{t} dt,$$

inoltre, le combinazioni di funzioni coseno e seno negli esponenti sono scrivibili come fasi, cioè

$$\text{sin}(t) = \frac{1}{4i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{e^{it}} - e^{e^{-it}}}{t} dt.$$

Sviluppiamo in serie di Taylor gli esponenziali a numeratore

$$\text{sin}(t) = \frac{1}{4i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{ikt} - e^{-ikt}}{k!} dt,$$

la serie converge uniformemente e può essere estratta dall'integrale, inoltre il primo termine, per $k = 0$, è nullo, quindi

$$\text{sin}(t) = \frac{1}{4i} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikt} - e^{-ikt}}{t} dt.$$

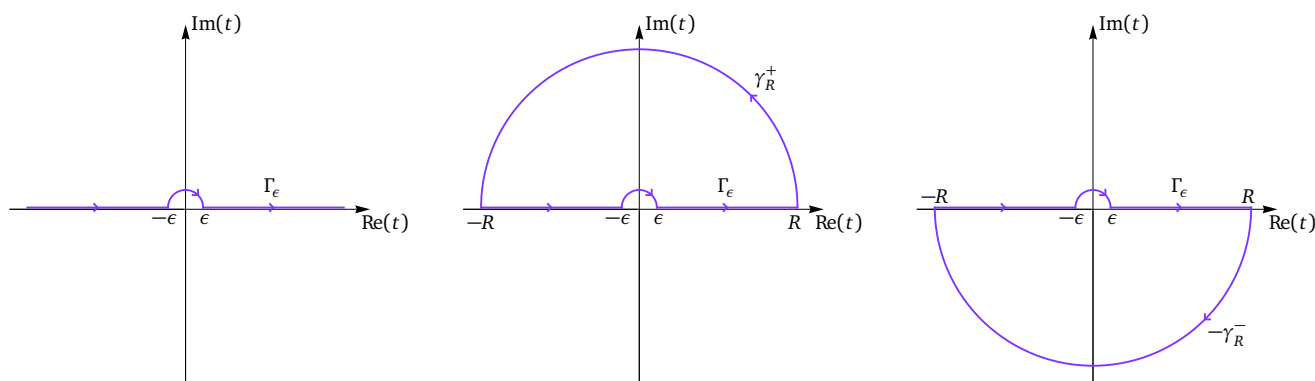
Poiché l'origine è una singolarità eliminabile, possiamo deformare il percorso d'integrazione, "dentandolo" intorno a essa, senza alterare il valore dell'integrale, quindi si ha

$$\text{sin}(t) = \frac{1}{4i} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \int_{\Gamma_\epsilon} \frac{e^{ikt} - e^{-ikt}}{t} dt,$$

dove

$$\Gamma_\epsilon = (-\infty, -\epsilon] \cup (-\{t : t = \epsilon e^{i\theta}, \theta \in [0, \pi]\}) \cup [\epsilon, \infty),$$

come mostrato nel pannello di sinistra della figura sottostante, la dentatura è data da una arco di semi-circonferenza centrato nell'origine di raggio infinitesimo $\epsilon > 0$ e immersa nel semipiano della parti immaginarie positive. La scelta del semipiano è libera.



Separiamo i due integrali così

$$\text{sin}(t) = \frac{1}{4i} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\int_{\Gamma_\epsilon} \frac{e^{ikt}}{t} dt - \int_{\Gamma_\epsilon} \frac{e^{-ikt}}{t} dt \right) \equiv \frac{1}{4i} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} (C_k^+ - C_k^-),$$

dove

$$C_k^\pm = \int_{\Gamma_\epsilon} \frac{e^{\pm ikt}}{t} dt, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

e li calcoliamo uno alla volta usando il lemma di Jordan.

Per gli integrali C_k^+ , con $k \in \mathbb{N}$, poiché i valori dell'indice k sono strettamente positivi, usiamo il lemma di Jordan

chiudendo il percorso d'integrazione nel semipiano delle parti immaginarie positive con l'arco di semicirconferenza $\gamma_R^+ = \{t : t = Re^{i\theta}, \theta \in [0, \pi]\}$, ne consegue che il percorso chiuso completo, riportato nel pannello centrale della figura nella pagina precedente è

$$\Gamma_{\epsilon, R}^+ = [-R, -\epsilon] \cup \left(-\{t : t = \epsilon e^{i\theta}, \theta \in [0, \pi]\} \right) \cup [\epsilon, R] \cup \gamma_R^+.$$

Questo percorso, per ogni valore di R , tale che $R > \epsilon$, non avvolge l'unica singolarità al finito della funzione integranda, che è un polo semplice nell'origine. Quindi, usando il teorema dei residui si ha che tutti gli integrali, per ogni $k \in \mathbb{N}$ sono nulli e lo sono anche nel limite $R \rightarrow \infty$, cioè

$$C_k^+ = \int_{\Gamma_\epsilon} \frac{e^{ikt}}{t} dt = \lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{\Gamma_{\epsilon, R}^+} \frac{e^{ikt}}{t} dt = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Gli integrali C_k^- , con $k \in \mathbb{N}$, si calcolano usando ancora una volta il lemma di Jordan, ma chiudendo il percorso d'integrazione nel semipiano delle parti immaginarie negative, poiché il coefficiente della variabile t a esponente è $-k$, quindi è strettamente negativo. Consideriamo il percorso chiuso completo, riportato nel pannello di destra della figura della pagina precedente,

$$\Gamma_{\epsilon, R}^- = [-R, -\epsilon] \cup \left(-\{t : t = \epsilon e^{i\theta}, \theta \in [0, \pi]\} \right) \cup [\epsilon, R] \cup (-\gamma_R^-),$$

dove $\gamma_R^- = \{t : t = Re^{i\theta}, \theta \in [\pi, 2\pi]\}$. Questo percorso chiuso, per ogni $R > \epsilon$, avvolge una volta il polo semplice nell'origine ed è orientato in senso orario, cioè negativo. Gli integrali C_k^- si ottengono, nel limite $R \rightarrow \infty$, usando il teorema dei residui, si ha

$$C_k^- = \int_{\Gamma_\epsilon} \frac{e^{-ikt}}{t} dt = \lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{\Gamma_{\epsilon, R}^-} \frac{e^{-ikt}}{t} dt = -2i\pi \operatorname{Res} \left[\frac{e^{-ikt}}{t}, 0 \right] = -2i\pi, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Usando questi risultati, l'integrale  vale

$$\img alt="Boulder Mobile icon" data-bbox="218 508 301 523"/> = \frac{1}{4i} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k^+ - C_k^-}{k!} = \frac{1}{4i} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2i\pi}{k!} = \frac{\pi}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} = \frac{\pi}{2} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} - 1 \right),$$

dove si è aggiunta e sottratta l'unità, il primo termine della serie, che così rappresenta la serie di Taylor dell'esponenziale e^t valutata in $t = 1$, infatti

$$e^t \Big|_{t=1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \Big|_{t=1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e.$$

Segue in risultato finale

$$\img alt="Boulder Mobile icon" data-bbox="393 654 476 669"/> = \frac{\pi}{2} (e - 1).$$

SECONDO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 3/30)

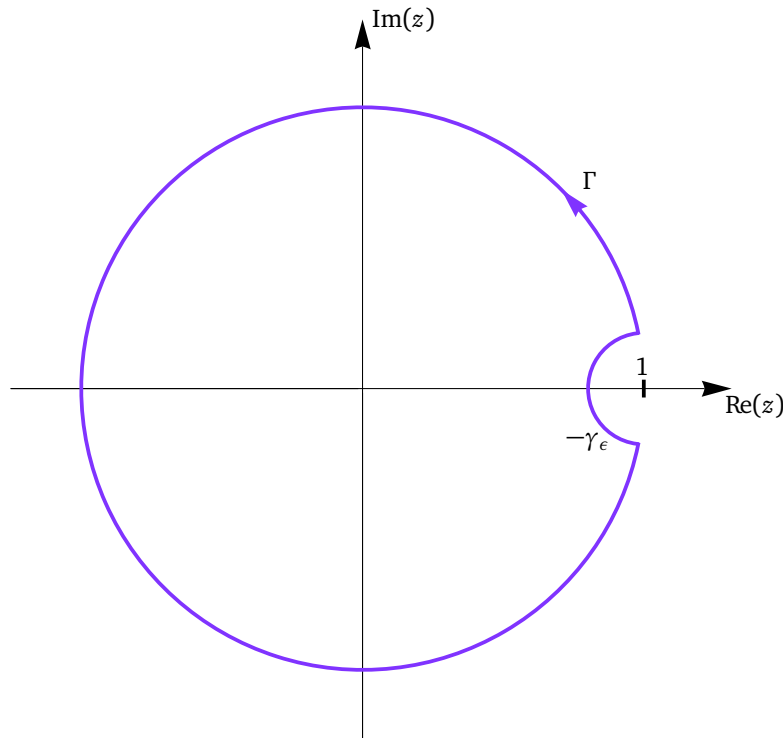
Si calcoli l'integrale in valore principale *Boulder Mobile*

$$\img alt="Boulder Mobile icon" data-bbox="382 778 415 811"/> = \operatorname{Pr} \oint_{|z|=1} \frac{z+1}{z \operatorname{sen}(z\pi)} dz.$$

SOLUZIONE DEL SECONDO PROBLEMA

La funzione integranda è il rapporto di funzioni intere ed è quindi meromorfa, ha, al finito i poli semplici nei punti dell'insieme $\{z_k = k\}_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 0\}}$ e un polo doppio nell'origine. Inoltre, come indicato, non il polo in $z_{-1} = -1$, poiché è una singolarità eliminabile, infatti si ha il limite finito

$$\lim_{z \rightarrow -1} \frac{z+1}{z \operatorname{sen}(z\pi)} = \frac{1}{\pi}.$$



Il valore principale si calcola sulle singolarità che appartengono al percorso d'integrazione, la circonferenza unitaria, ce n'è una sola, il polo semplice in $z_1 = 1$. Consideriamo allora il percorso chiuso e dentato internamente intorno all'unità Γ , mostrato in figura. L'aggiramento del polo semplice in $z_1 = 1$ è effettuato con un arco centrato nello stesso polo e di raggio infinitesimo, $\epsilon \rightarrow 0^+$.

L'integrale della stessa funzione integranda sul percorso chiuso Γ può essere espressa sia come somma dei due contributi che con il teorema dei residui, si ha

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \oint_{\Gamma} \frac{z+1}{z \operatorname{sen}(z\pi)} dz &= \operatorname{Pr} \oint_{|z|=1} \frac{z+1}{z \operatorname{sen}(z\pi)} dz - \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \oint_{\gamma_{\epsilon}} \frac{z+1}{z \operatorname{sen}(z\pi)} dz \equiv \text{🐼} - \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \oint_{\gamma_{\epsilon}} \frac{z+1}{z \operatorname{sen}(z\pi)} dz \\ &= 2i\pi \operatorname{Res} \left[\frac{z+1}{z \operatorname{sen}(z\pi)}, z_0 = 0 \right], \end{aligned}$$

dall'ultima identità si ottiene l'integrale in valore principale 🐼 come

$$\text{🐼} = 2i\pi \operatorname{Res} \left[\frac{z+1}{z \operatorname{sen}(z\pi)}, z_0 = 0 \right] + \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\gamma_{\epsilon}} \frac{z+1}{z \operatorname{sen}(z\pi)} dz.$$

Calcoliamo i due contributi, il residuo e il limite dell'integrale sull'arco γ_{ϵ} . Il residuo del polo doppio nell'origine si può calcolare come coefficienti di Laurent C_{-1} della serie centrata nell'origine, che si ottiene dalle serie di Taylor nota della funzione seno e usando la formula di somma della serie geometrica. Nel limite $z \rightarrow 0$, si ha

$$\begin{aligned} \frac{z+1}{z \operatorname{sen}(z\pi)} &= \left(1 + \frac{1}{z}\right) \frac{1}{z\pi - (z\pi)^3/3! + \mathcal{O}(z^5)} = \left(1 + \frac{1}{z}\right) \frac{1}{z\pi (1 - (z\pi)^2/3! + \mathcal{O}(z^4))} \\ &= \left(1 + \frac{1}{z}\right) \frac{1}{z\pi} \left[1 + \left(\frac{(z\pi)^2}{3!} - \frac{(z\pi)^4}{5!} + \mathcal{O}(z^6) \right) + \left(\frac{(z\pi)^2}{3!} - \frac{(z\pi)^4}{5!} + \mathcal{O}(z^6) \right)^2 + \dots \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{1}{z^2} + \frac{1}{\pi} \frac{1}{z} + \frac{\pi}{6} + \mathcal{O}(z), \end{aligned}$$

si evince, allora, che, come già dichiarato, il polo nell'origine è doppio, il coefficiente C_{-1} , che coincide con il residuo è

$$C_{-1} = \operatorname{Res} \left[\frac{z+1}{z \operatorname{sen}(z\pi)}, z_0 = 0 \right] = \frac{1}{\pi}.$$

Il secondo contributo si ottiene usando il lemma d'integrazione sugli archi infinitesimi è

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\gamma_\epsilon} \frac{z+1}{z \operatorname{sen}(z\pi)} dz = i\pi \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{z+1}{z \operatorname{sen}(z\pi)} (z-1) = i\pi \underbrace{\lim_{z \rightarrow 1} \frac{z+1}{z \operatorname{sen}(z\pi)} (z-1)}_{\stackrel{U.}{=} -2/\pi} = -2i.$$

In definitiva si ha

$$\text{🐼} = 2i\pi \operatorname{Res} \left[\frac{z+1}{z \operatorname{sen}(z\pi)}, z_0 = 0 \right] + \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\gamma_\epsilon} \frac{z+1}{z \operatorname{sen}(z\pi)} dz = 2i\pi \frac{1}{\pi} - 2i,$$

quindi l'integrale è nullo, cioè

$$\text{🐼} = 0.$$

TERZO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 3,5/30)

Si ottengano i coefficienti non nulli della serie di Laurent con centro in $z = 1$, convergente in $c = 1 + i\operatorname{sen}(\pi/(2n))$ della funzione *Buzz Wagon*

$$\text{🐼}(z) = \frac{z^2}{(z^2 - 1)(z^{2n} - 1)}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

SOLUZIONE DEL TERZO PROBLEMA

La funzione $\text{🐼}(z)$ è meromorfa, ha poli negli zeri del polinomio di grado $2n+2$ che ne rappresenta il denominatore. I due poli del primo fattore, il polinomio di secondo grado $z^2 - 1$, sono $z_{\pm} = \pm 1$, quelli del secondo polinomio $z^{2n} - 1$, di grado $2n \in \mathbb{N}$ sono le $2n$ radici $2n$ -esime dell'unità, cioè

$$z_k = e^{ik\pi/n}, \quad \forall k \in \{0, 1, \dots, 2n-1\}.$$

Per ciascuno dei due polinomi, gli zeri sono semplici, ma, poiché l'unità e il suo opposto sono zeri di entrambi, il loro ordine è due, sono cioè sono zeri doppi. Quindi l'insieme dei poli è $\{z_k = e^{i\pi k/n}\}_{k=0}^{2n-1}$ e quello delle molteplicità è $\{m_k = 1 + \delta_{k0} + \delta_{kn}\}_{k=0}^{2n-1} \subset \mathbb{N}$, ovvero, gli zeri $z_0 = 1$ e $z_n = -1$ sono doppi. Al fine di estrarre i binomi dello zero $z_0 = 1$, centro della serie di Laurent del problema, riscriviamo il primo polinomio come

$$z^2 - 1 = (z-1)(z+1).$$

Per il secondo, usiamo la formula di somma della serie geometrica di ragione z . In particolare, la somma parziale $(2n-1)$ -esima può essere riscritta moltiplicando e dividendo per $(z-1)$ nella forma

$$\sum_{k=0}^{2n-1} z^k = 1 + z + z^2 + \dots + z^{2n-1} = 1 + z + z^2 + \dots + z^{2n-1} \frac{z-1}{z-1} = \frac{z^{2n}-1}{z-1},$$

da cui si ottiene un'espressione per il polinomio di grado $2n$ a denominatore della funzione data,

$$z^{2n} - 1 = (z-1) \sum_{k=0}^{2n-1} z^k,$$

in cui si è estratto il binomio del polo in $z_0 = 1$. Usando questi risultati, la funzione può essere scritta come

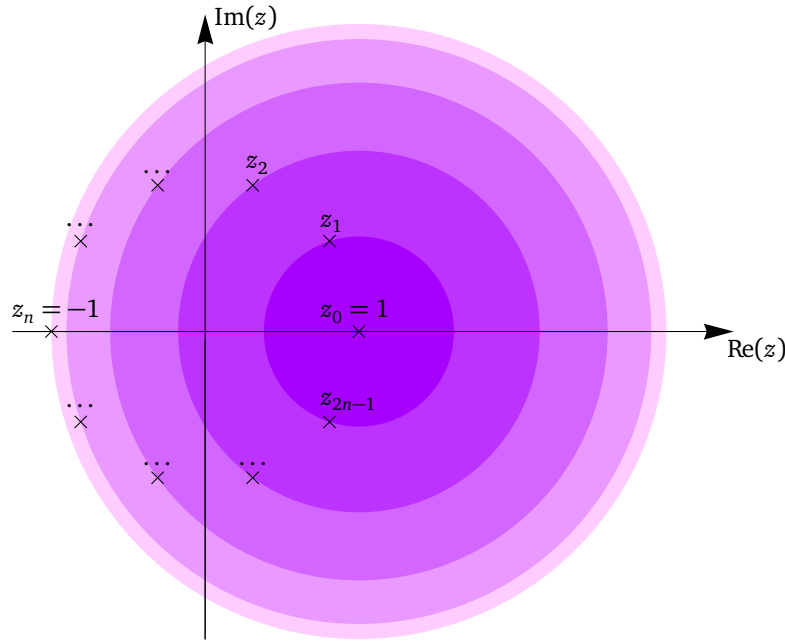
$$\text{🐼}(z) = \frac{z^2}{(z-1)^2 (z+1) \sum_{k=0}^{2n-1} z^k},$$

il polo doppio in $z_0 = 1$ è ora evidente.

In virtù della distribuzione dei poli, le $n + 1$ corone di convergenza delle serie di Laurent sono

$$D_k = \{z : |1 - z_k| < |z - 1| < |1 - z_{k+1}|\}, \quad \forall k \in \{0, 1, \dots, n-1\}, \quad D_n = \{z : |z - 1| > 2\},$$

sono mostrate in figura, nel caso $n = 6$, in tonalità diverse del viola, dalla più scura, più vicina al polo $z_0 = 1$, alla più chiara, più lontana dallo stesso, fino alla bianca, D_n , che si estende all'infinito. Nella stessa figura sono riportati i poli semplici, indicati con il simbolo $\times$ e i due doppi con il simbolo $*$.



I valori espliciti dei raggi delle corone circolari D_k , con $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ sono

$$|1 - z_k| = |1 - e^{ik\pi/n}| = \left| e^{\frac{ik\pi}{2n}} \left(e^{-\frac{ik\pi}{2n}} - e^{\frac{ik\pi}{2n}} \right) \right| = \left| -2i \operatorname{sen} \left(\frac{k\pi}{2n} \right) \right| = 2 \operatorname{sen} \left(\frac{k\pi}{2n} \right), \quad \forall k \in \{0, 1, \dots, n\}.$$

Ne consegue che la prima corona circolare è

$$D_0 = \{z : |1 - z_0| < |z - 1| < |1 - z_1|\} = \{z : 0 < |z - 1| < 2 |\operatorname{sen}(\pi/(2n))|\}$$

e che il punto $c = 1 + i \operatorname{sen}(\pi/(2n))$, dato dal problema, è contenuto in essa. Infatti la sua distanza dal centro $z_0 = 1$,

$$|1 - c| = |1 - 1 - i \operatorname{sen}(\pi/(2n))| = |\operatorname{sen}(\pi/(2n))|$$

è strettamente compresa tra il raggio minore, 0, e quello maggiore $2 |\operatorname{sen}(\pi/(2n))|$, che è il doppio di essa. Quindi, i coefficienti da determinare sono quelli della parte principale della serie di Laurent convergente nella corona circolare D_0 .

Il coefficiente j -esimo della serie di Laurent è

$$C_j = \frac{1}{2i\pi} \oint_{|z-1|=r} \frac{z^2 dz}{(z+1)(z-1)^{j+3} \sum_{k=0}^{2n-1} z^k}, \quad \forall j \in \mathbb{Z},$$

con $r \in (0, 2 |\operatorname{sen}(\pi/(2n))|)$. La circonferenza su cui sono definiti gli integrali avvolge una sola eventuale singolarità della funzione integranda, il polo in $z_0 = 1$ di ordine $j + 3$, solo per valori di $j \in \mathbb{Z}$, tali che $j \geq -2$. Infatti per valori strettamente minori di -2 , cioè da -3 a $-\infty$, la funzione integranda non ha singolarità nella avvolta dalla circonferenza d'integrazione e, per il teorema di Cauchy, l'integrale e i coefficienti corrispondenti sono nulli, cioè

$$C_j = 0, \quad \forall j \in \mathbb{Z} \cap (-\infty, -3].$$

Il primo coefficiente potenzialmente non nullo della parte principale è quindi, C_{-2} e si ha

$$C_{-2} = \frac{1}{2i\pi} \oint_{|z-1|=r} \frac{z^2 dz}{(z+1)(z-1) \sum_{k=0}^{2n-1} z^k} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z^2}{(z+1) \sum_{k=0}^{2n-1} z^k} = \frac{1}{2(2n)} = \frac{1}{4n}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

È effettivamente non nullo, questo significa che la funzione data ha in $z_0 = 1$ un polo doppio. Il secondo e unico altro coefficiente potenzialmente non nullo della parte principale è C_{-1} , che rappresenta anche il residuo della funzione nel punto $z_0 = 1$ e vale

$$\begin{aligned} C_{-1} &= \frac{1}{2i\pi} \oint_{|z-1|=r} \frac{z^2 dz}{(z+1)(z-1)^2 \sum_{k=0}^{2n-1} z^k} = \frac{d}{dz} \frac{z^2}{(z+1) \sum_{k=0}^{2n-1} z^k} \Big|_{z=1} \\ &= \frac{2z(z+1) \sum_{k=0}^{2n-1} z^k - z^2 \left(\sum_{k=0}^{2n-1} z^k + (z+1) \sum_{k=1}^{2n-1} k z^{k-1} \right)}{(z+1)^2 \left(\sum_{k=0}^{2n-1} z^k \right)^2} \Big|_{z=1} \\ &= \frac{8n - (2n + 2n(2n-1))}{4(2n)^2} = \frac{4n(2-n)}{4(2n)^2} = \frac{2-n}{4n}. \end{aligned}$$

È interessante osservare che nel caso $n = 2$, $C_{-1} = 0$, per tutti gli altri è diverso da zero e negativo.

QUARTO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 2,5/30)

Si ottenga in forma di serie il valore dell'integrale *Creepy Coupé*

$$\text{Creepy Coupé} = \oint_{|z|=1} \sinh(z) \cosh\left(\frac{1}{z}\right) dz.$$

SOLUZIONE DEL QUARTO PROBLEMA

La funzione integranda ha una singolarità essenziale isolata nell'origine dovuta alla funzione coseno iperbolico. Usando gli sviluppi in serie di Taylor delle funzioni iperboliche si ha

$$\text{Creepy Coupé} = \oint_{|z|=1} \sum_{k,m=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1-2m}}{(2k+1)!(2m)!} dz = \sum_{k,m=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!(2m)!} \oint_{|z|=1} z^{2k+1-2m} dz,$$

dove è stata considerata la convergenza uniforme delle serie per riscrivere l'integrale delle serie come le serie degli integrali. Gli integrali hanno come integranda la potenza $(2k+1-2m)$ -esima della variabile z e come percorso d'integrazione la circonferenza unitaria. L'unica potenza della z che ha integrale non nullo sulla circonferenza unitaria è la -1 , integrale che coincide con $2i\pi$ -volte il numero di avvolgimenti della stessa circonferenza unitaria attorno all'origine. Quindi si ha

$$\oint_{|z|=1} z^{2k+1-2m} dz = 2i\pi \delta_{2k+1-2m,-1} = 2i\pi \delta_{2k+2,2m}, \quad \forall k, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

La doppia serie dell'integrale  si riduce a una soltanto, che dà il risultato finale

$$\text{Creepy Coupé} = 2i\pi \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!(2k+2)!}.$$

QUINTO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 3/30)

Si calcoli l'integrale *Crimson Haybailer*

$$\text{Crimson Haybailer} = \int_0^{\infty} \frac{3^{\ln(x)}}{x^3 + x^2 + 4x + 4} dx.$$

SOLUZIONE DEL QUINTO PROBLEMA

L'integrale può essere calcolato con la formula d'integrazione delle funzioni polidrome. La funzione integranda è, infatti, polidroma, come si evince direttamente scrivendo la potenza $3^{\ln(x)}$ nella forma

$$3^{\ln(x)} = e^{\ln(3^{\ln(x)})} = e^{\ln(3)\ln(x)} = e^{\ln(x^{\ln(3)})} = x^{\ln(3)},$$

quindi si ha

$$\int_0^\infty \frac{x^{\ln(3)}}{x^3 + x^2 + 4x + 4} dx \equiv \int_0^\infty x^a R(x) dx,$$

dove abbiamo posto

$$a = \ln(3) \in (0, 1), \quad R(x) = \frac{1}{x^3 + x^2 + 4x + 4}.$$

Il comportamento della funzione razionale $R(x)$ agli estremi d'integrazione è

$$R(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{4} x^l \quad \Rightarrow \quad l = 0,$$

$$R(x) \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} x^h \quad \Rightarrow \quad h = -4,$$

ne consegue che la condizione di convergenza $-1 - l < \operatorname{Re}(a) < -1 - h$ è verificata, poiché si hanno: $-1 - l = -1$, $\operatorname{Re}(a) = \ln(3)$ e $-1 - h = 3$, quindi la condizione diventa: $-1 < \ln(3) < 3$ ed è vera.

Altra condizione necessaria per l'applicabilità della formula è l'assenza di poli della funzione razionale nel semiasse reale positivo. Essendo l'inverso di un polinomio di terzo grado, la funzione razionale $R(x)$ ha tre poli in corrispondenza degli zeri del polinomio $1/R(x)$. Poiché i coefficienti del polinomio sono reali, si possono avere o tre zeri reali, ovvero uno zero reale e una coppia di zeri complessi coniugati. Si osserva che il punto $x_0 = -1$ è uno zero semplice, infatti: $1/R(x_0) = (-1)^3 + (-1)^2 + 4(-1) + 4 = 0$. Il polinomio di secondo grado che moltiplicato per il binomio $x - x_0 = x + 1$ dà il polinomio $1/R(x)$ si ottiene, imponendo l'identità

$$(x + 1)(x^2 + bx + 4) = x^3 + x^2(1 + b) + x + 4 = \frac{1}{R(x)} = x^3 + x^2 + 4x + 4,$$

abbiamo un solo coefficiente incognito, b . Infatti, quello della potenza massima x^2 è unitario in quanto è tale anche quello della x^3 del polinomio $1/R(x)$, allo stesso modo, è pari a 4 il termine noto che deve coincidere con quello di $1/R(x)$. Si deduce: $b = 0$, allora

$$\frac{1}{R(x)} = (x + 1)(x^2 + 4),$$

i tre zeri semplici di $1/R(x)$ sono: $x_0 = -1$ e $z_{\pm} = \pm 2i$, uno zero reale e una coppia di immaginari puri opposti, ovvero complessi coniugati.

La formula risolutiva è

$$\int_0^\infty \frac{x^a}{x^3 + x^2 + 4x + 4} dx = -\frac{\pi e^{-ia\pi}}{\operatorname{sen}(a\pi)} \sum_{z=x_0, z_-, z_+} \operatorname{Res} \left[\frac{z^a}{z^3 + z^2 + 4z + 4}, z \right].$$

Calcoliamo i tre residui,

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} \left[\frac{z^a}{z^3 + z^2 + 4z + 4}, x_0 = -1 \right] &= \lim_{z \rightarrow -1} \frac{z^a}{z^3 + z^2 + 4z + 4} (z + 1) = \frac{(-1)^a}{3(-1)^2 + 2(-1) + 4} = \frac{e^{ia\pi}}{5}, \\ \operatorname{Res} \left[\frac{z^a}{z^3 + z^2 + 4z + 4}, z_- = -2i \right] &= \lim_{z \rightarrow -2i} \frac{z^a}{z^3 + z^2 + 4z + 4} (z + 2i) = \frac{(-2i)^a}{3(-2i)^2 + 2(-2i) + 4} = \frac{2^a e^{3ia\pi/2}}{-8 - 4i}, \\ \operatorname{Res} \left[\frac{z^a}{z^3 + z^2 + 4z + 4}, z_+ = 2i \right] &= \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{z^a}{z^3 + z^2 + 4z + 4} (z - 2i) = \frac{(2i)^a}{3(2i)^2 + 2(2i) + 4} = \frac{2^a e^{ia\pi/2}}{-8 + 4i}, \end{aligned}$$

dove si è usata la determinazione principale $\arg(z) \in (0, 2\pi)$, da cui si hanno: $-1 = e^{i\pi}$, $-i = e^{3i\pi/2}$ e $i = e^{i\pi/2}$. Il risultato è

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{x^a}{x^3 + x^2 + 4x + 4} dx &= -\frac{\pi}{\operatorname{sen}(a\pi)} \left(\frac{1}{5} + \frac{2^a e^{i\pi a/2}}{-8 - 4i} + \frac{2^a e^{-i\pi a/2}}{-8 + 4i} \right) = -\frac{\pi}{\operatorname{sen}(a\pi)} \left(\frac{1}{5} + \operatorname{Re} \left(\frac{2^{a-1} e^{i\pi a/2}}{-2 - i} \right) \right) \\ &= -\frac{\pi}{\operatorname{sen}(a\pi)} \left(\frac{1}{5} + 2^{a-1} \left(\frac{-2 \cos(a\pi/2) - \operatorname{sen}(a\pi/2)}{5} \right) \right), \end{aligned}$$

da cui

$$\text{🚁} = \frac{\pi}{5\sin(a\pi)} (1 + 2^{a-1} (2\cos(a\pi/2) + \sin(a\pi/2))),$$

o anche, usando la formula di bisezione per $\sin(a\pi) = 2\sin(a\pi/2)\cos(a\pi/2)$,

$$\text{🚁} = \frac{\pi}{5} \left(-\frac{1}{\sin(a\pi)} + \frac{2^{a-1}}{\sin(a\pi/2)} + \frac{2^{a-2}}{\cos(a\pi/2)} \right).$$

SESTO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 3/30)

Si determini il numero di zeri che il polinomio di quinto grado *Compact Pussycat*

$$\text{🐈} (z) = z^5 + z^3 + 2z + 5,$$

ha nella corona circolare

$$C_{12}(0) = \{z : 1 < |z| < 2\},$$

centrata nell'origine e avente raggio interno 1 ed esterno 2.

SOLUZIONE DEL SESTO PROBLEMA

Usiamo il teorema di Rouché, per ottenere i numeri di zeri che il polinomio $\text{🐈}(z)$ ha nei cerchi centrati nell'origine di raggi 2 e 1, la loro differenza rappresenta il numero di zeri appartenenti alla corona circolare del problema, $C_{1,2}(0)$. Consideriamo inizialmente il cerchio unitario, $C_1(0) = \{z : |z| < 1\}$, come dominio di applicazione del teorema di Rouché. È necessario definire una coppia di funzioni, sceglieremo dei polinomi, che chiameremo $P(z)$ e $Q(z)$, tali che

$$P(z) + Q(z) = \text{🐈}(z), \quad |P(z)| > |Q(z)|, \quad \forall z \in \partial C_1(0) = \{z : |z| = 1\}.$$

Definiamo i polinomi

$$P(z) = z^5 + 5, \quad Q(z) = z^3 + 2z,$$

la loro somma coincide con il polinomio dato, inoltre sulla frontiera del cerchio unitario, la circonferenza unitaria, i loro moduli verificano le disuguaglianze

$$\begin{aligned} |P(z)| &= |z^5 + 5| \geq ||z|^5 - 5| = 4 \\ |Q(z)| &= |z^3 + 2z| \leq ||z|^3 + 2|z|| = 3, \end{aligned}$$

ne consegue che, $\forall z \in \partial C_1(0)$,

$$|P(z)| \geq 4 > 3 \geq |Q(z)|.$$

Allora, per il teorema di Rouché, i polinomi $\text{🐈}(z)$ e $P(z)$ hanno lo stesso numero di zeri nel cerchio unitario. Gli zeri del polinomio $P(z)$ si possono calcolare facilmente risolvendo l'equazione

$$P(z) = z^5 + 5 = 0$$

e sono le cinque radici quinte di -5 , ovvero

$$z_k = 5^{1/5} e^{(2k+1)i\pi/5}, \quad \forall k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}.$$

Rappresentano i cinque vertici del pentagono regolare iscritto nella circonferenza centrata nell'origine di raggio $5^{1/5}$, che è strettamente maggiore dell'unità. Solo il vertice $z_2 = -5^{1/5}$, il terzo, è reale, gli altri quattro, disposti simmetricamente rispetto all'asse reale, sono due coppie di complessi coniugati e hanno parti immaginarie strettamente

diverse da zero. Hanno, però, tutti lo stesso modulo, cioè $|z_k| = 5^{1/5}$, $\forall k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, quindi nessuno appartiene al cerchio unitario. Segue che, così come il polinomio studiato $P(z)$, anche quello dato dal problema non ha zeri in $C_1(0)$. Indicando con N_1 il numero di zeri del polinomio dato appartenenti al cerchio $C_1(0)$, si ha $N_1 = 0$. Consideriamo il secondo dominio, il cerchio $C_2(0)$, centrato nell'origine e di raggio 2. Appliciamo il teorema di Rouché con la stessa coppia di polinomi del caso precedente. Sulla frontiera del cerchio $C_2(0)$, ovvero per valori di z , tali che $|z| = 2$, si hanno le disuguaglianze

$$\begin{aligned} |P(z)| &= |z^5 + 5| \geq ||z|^5 - 5| = 27 \\ |Q(z)| &= |z^3 + 2z| \leq |z|^3 + 2|z| = 12, \end{aligned}$$

da cui, $\forall z \in \partial C_2(0)$,

$$|P(z)| \geq 27 > 12 \geq |Q(z)|.$$

Tutti i cinque zeri del polinomio $P(z)$, elementi dell'insieme $\{z_k = 5^{1/5} e^{(2k+1)i\pi/5}\}_{k=0}^4$ sono contenuti nel cerchio $C_2(0)$, infatti $|z_k|^5 = 5 < 2^5 = 32$, $\forall k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Ne consegue che anche i cinque zeri del polinomio del problema,



(z) , sono contenuti nel cerchio $C_2(2)$. Indicando con N_2 il numero di zeri del polinomio dato appartenenti al cerchio $C_2(0)$, si ha $N_2 = 5$.

In definitiva, il numero di zeri che il polinomio  (z) ha nella corona circolare $C_{1,2}(0)$, che è data dalla sottrazione

$$C_{1,2}(0) = C_2(0) \setminus \bar{C}_1(0),$$

dove, al cerchio aperto $C_2(0)$ sottraiamo il cerchio chiuso $C_1(0)$, è

$$N_{12} = N_2 - N_1 = 5.$$

Si noti che, nel caso di assenza di zeri, l'estensione della tesi del teorema di Rouché al cerchio chiuso $\bar{C}_1(0)$ è lecita, poiché, per ipotesi dello stesso teorema, la frontiera non contiene zeri.