Metodi Matematici per la Fisica

Prima prova parziale - 27 febbraio 2020

Si risolvano cortesemente i seguenti problemi, sapendo che verranno valutati:

1. la correttezza del risultato ottenuto e della procedura utilizzata;
2. la completezza dei passaggi riportati;
3. il livello di esemplificazione con cui sono espressi i risultati (ad esempio un risultato numerico reale non deve contenere l'unità immaginaria);
4. la correttezza del formalismo utilizzato;
5. la chiarezza dell'esposizione e la leggibilità del testo.

Primo problema (punteggio: 3/30)

Si dimostri che $\forall\, w \in \mathbb{C}$, tale che $\pi/4 < |\arccos(w)| < \pi/2$

$$\arccos(w) = \frac{1}{2i\pi}\oint_\gamma \frac{\operatorname{sen}(z)\,z}{w-\cos(z)}dz\,,$$

con $\gamma = \left\{z : z = \arccos(w) + \rho e^{i\theta},\ \theta \in [0, 2\pi],\ \rho \in (0, \pi/2)\right\}$.

Soluzione del primo problema

L'insieme delle singolarità della funzione integranda è

$$\left\{z_k^-, z_k^+\right\}_{k\in\mathbb{Z}}\,, \qquad \text{con: } z_k^\pm = \pm\arccos(w) + 2k\pi\,,$$

dove, per la parità della funzione coseno, per ogni valore di $k \in \mathbb{Z}$ si hanno due singolarità, che differiscono per il segno della funzione arco coseno. Queste singolarità sono dei poli semplici, infatti

$$\lim_{z\to z_k^\pm}\frac{\operatorname{sen}(z)\,z}{w-\cos(z)}\left(z-z_k^\pm\right) = \operatorname{sen}\left(z_k^\pm\right) z_k^\pm \lim_{z\to z_k^\pm}\frac{1}{\operatorname{sen}(z)} = z_k^\pm\,, \qquad k \in \mathbb{Z}\,.$$

Ciò significa anche che i residui coincidono con gli stessi poli, quindi se il percorso di integrazione avvolgesse una coppia di poli opposti, l'integrale sarebbe nullo.
La circonferenza γ ha centro in $z = z_0^+ = \arccos(w)$, consideriamo la distanza tra questa e un altro generico polo z_k^+, con $k \neq 0$, si ha

$$\left|z_0^+ - z_k^+\right| = \left|z_0^+ - \left(z_0^+ + 2k\pi\right)\right| = 2|k|\pi \geq 2\pi\,.$$

La distanza da un generico polo z_k^- è, invece,

$$\left|z_0^+ - z_k^-\right| = \left|z_0^+ - \left(-z_0^+ + 2k\pi\right)\right| = \left|2z_0^+ - 2k\pi\right| \geq 2\left|\left|z_0^+\right| - |k|\pi\right|,$$

consideriamo alcuni possibili valori di k, usando la condizione $\pi/4 < |z_0^\pm| = |\arccos(w)| < \pi/2$,

$$\left|z_0^+ - z_k^-\right| \geq 2\left||z_0^+| - |k|\pi\right| = \begin{cases} 2|z_0^+| \in (\pi/2, \pi) & k = 0 \\ 2\left(\pi - \left|z_0^+\right|\right) \in (\pi, 3\pi/2) & k = \pm 1 \\ 2\left(2\pi - \left|z_0^+\right|\right) \in (3\pi, 7\pi/2) & k = \pm 2 \\ \vdots & \vdots \\ 2\left(|k|\pi - \left|z_0^+\right|\right) \in ((2|k|-1)\pi, (4|k|-1)\pi/2) & k \\ \vdots & \vdots \end{cases},$$

ne consegue che

$$\left|z_0^+ - z_k^\pm\right| > \frac{\pi}{2}\,,$$

dove il valore $\pi/2$ è il più piccolo dei limiti inferiori, che si ottiene con il polo z_0^-.
La circonferenza γ, che rappresenta il percorso di integrazione, che ha centro nel polo z_0^+ e raggio strettamente

minore di $\pi/2$, non può contenere altri poli diversi dallo stesso z_0^+. Il polo più vicino a z_0^+ è, coma appena dimostrato, z_0^- la cui distanza, però è strettamente maggiore del raggio ρ, infatti

$$\rho < \frac{\pi}{2} < \left| z_0^+ - z_k^\pm \right| .$$

Alla luce di questo risultato possiamo usare il teorema dei residui per calcolare l'integrale, avendo inoltre che i residui dei poli semplici dell'insieme $\left\{ z_k^-, z_k^+ \right\}_{k\in\mathbb{Z}}$ coincidono con gli stessi poli, si ha

$$\frac{1}{2i\pi} \oint_\gamma \frac{\operatorname{sen}(z) z}{w - \cos(z)} dz = \operatorname{Res}\left[\frac{\operatorname{sen}(z) z}{w - \cos(z)}, z_0^+ \right] = z_+^0 = \arccos(w) ,$$

ovvero si è ottenuta l'identità richiesta.

Secondo problema (punteggio 3/30)

Si calcoli l'integrale

$$C = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{k-m}}{\cosh\left[(k+m)\ln(x)\right]} dx ,$$

con $k, m \in \mathbb{N}$ e $m > 0$.

Soluzione del secondo problema

Riscriviamo l'integrale come

$$C = 2\int_\infty^\infty \frac{x^{k-m}}{e^{(k+m)\ln(x)} + e^{-(k+m)\ln(x)}} = 2\int_\infty^\infty \frac{x^{k-m}}{x^{k+m} + x^{-k-m}} dx = 2\int_\infty^\infty \frac{x^{2k}}{1 + x^{2(k+m)}} dx = 2\int_\infty^\infty \frac{x^{2k}}{1+x^{2n}} dx ,$$

dove si è posto $n = k + m > k$. La condizione $n > k$, ovvero $n \geq k+1$, implica la convergenza dell'integrale, in quanto per i gradi dei polinomi a denominatore e numeratore della funzione integranda si ha: $2n \geq 2k+2$. Possiamo integrare usando il lemma di Jordan e il teorema dei residui. La funzione integranda ha nel piano complesso $2n$ poli semplici nei punti dell'insieme $\left\{ z_j = e^{(2j+1)i\pi/(2n)} \right\}_{j=0}^{2n-1}$, che rappresentano le $2n$ radici $2n$-esime di -1. Nessuna di esse appartiene all'asse reale, in particolare, le prime n radici, con $j = 0, 1, \ldots, n-1$, sono strettamente comprese nel semipiano delle parti immaginarie positive, mentre le seconde n, con $j = n, n+1, \ldots, 2n-1$, appartengono, invece, al semipiano delle parti immaginare strettamente negative.
"Chiudendo" il percorso nel semipiano delle parti immaginarie positive si ha

$$C = 2i\pi \sum_{j=0}^{n-1} \operatorname{Res}\left[\frac{2z^{2k}}{1+z^{2n}}, z_j \right] = 4i\pi \sum_{j=0}^{n-1} \frac{z_j^{2k}}{2n z_j^{2n-1}} = -\frac{2i\pi}{n} \sum_{j=0}^{n-1} z_j^{2k+1} ,$$

dove abbiamo usato l'identità $z_j^{2n} = -1$. Inserendo l'espressione esplicita di z_j, ovvero $z_j = e^{(2j+1)i\pi/(2n)}$, si ha

$$\begin{aligned} C &= -\frac{2i\pi}{n} \sum_{j=0}^{n-1} e^{(2j+1)(2k+1)i\pi/(2n)} = -\frac{2i\pi e^{(2k+1)i\pi/(2n)}}{n} \sum_{j=0}^{n-1} e^{j(2k+1)i\pi/n} = -\frac{2i\pi e^{(2k+1)i\pi/(2n)}}{n} \frac{1 - e^{j(2k+1)i\pi}}{1 - e^{(2k+1)i\pi/n}} \\ &= -\frac{2i\pi}{n} \frac{2}{e^{-(2k+1)i\pi/(2n)} - e^{(2k+1)i\pi/(2n)}} , \end{aligned}$$

da cui il risultato finale

$$C = \frac{2\pi}{n} \frac{1}{\operatorname{sen}\left[(2k+1)\pi/(2n)\right]} .$$

Un'altra possibile procedura di risoluzione del secondo problema

Partendo dalla forma

$$C = 2\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{2k}}{1+x^{2n}} dx = 4\int_0^\infty \frac{x^{2k}}{1+x^{2n}} dx ,$$

con $n = k + m > k \geq 0$ e dove si è sfruttata la parità della funzione integranda, facciamo la sostituzione $w = x^{2n}$, per cui $x = w^{1/(2n)}$,

$$C = \frac{1}{2n} \int_0^\infty \frac{w^{k/n + 1/(2n) - 1}}{1+w} dw = \frac{1}{2n} \int_0^\infty \frac{w^\alpha}{1+w} dw , = \frac{1}{2n} \int_0^\infty w^\alpha R(w) dw ,$$

dove si è posto

$$\alpha = \frac{k}{n} + \frac{1}{2n} - 1 = \frac{2k+1}{2n} - 1\,, \qquad R(w) = \frac{1}{1+w}\,.$$

La funzione integranda è polidroma, ha un polo semplice in $w = -1$ e quindi non appartenente al semiasse reale positivo, che rappresenta il percorso d'integrazione. Studiamo il comportamento della parte razionale $R(w)$ della stessa funzione integranda nei punti estremi $w \to 0^+$ e $w \to \infty$. Si hanno

$$R(w) = \frac{1}{1+w} \underset{w\to 0^+}{\sim} w^l\,, \qquad \text{con } l = 0\,,$$
$$R(w) = \frac{1}{1+w} \underset{w\to \infty}{\sim} w^h\,, \qquad \text{con } h = -1\,.$$

Affinché l'integranda sia integrabile è necessario che valgano le condizioni

$$-1 - l < \operatorname{Re}(\alpha) < -1 - h \quad \Rightarrow \quad -1 < \frac{2k+1}{2n} - 1 < 0 \quad \Rightarrow \quad 0 < \frac{2k+1}{2n} < 1 \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{2} < k < n - \frac{1}{2}\,,$$

ma si ha $0 \le k < n$ e quindi la condizione è verificata. La formula risolutiva è

$$C = -\frac{1}{2n}\frac{\pi e^{-i\pi\alpha}}{\operatorname{sen}(\pi\alpha)}\sum_j^{\text{tot}} \operatorname{Res}\left[w^\alpha R(w), w_j\right] = -\frac{1}{2n}\frac{\pi e^{-i\pi\alpha}}{\operatorname{sen}(\pi\alpha)} \operatorname{Res}\left[w^\alpha R(w), w = -1\right]\,,$$

l'unico residuo è quello nel polo semplice $w = -1$ e vale

$$\operatorname{Res}\left[w^\alpha R(w), w = -1\right] = \lim_{w\to -1} \frac{w^\alpha}{1+w}(w+1) = (-1)^\alpha = e^{i\pi\alpha}\,.$$

La determinazione è $\arg(w) \in (0, 2\pi)$ ed è imposta dalla procedura risolutiva, che si basa sulla presenza della discontinuità per la funzione polidroma lungo il percorso d'integrazione, ovvero il semiasse reale positivo. Ciò fa sì che si abbia $-1 = e^{i\pi}$, senza ambiguità, infatti la scelta $-1 = e^{-i\pi}$ non è permessa in quanto la fase $-\pi$ non appartiene all'intervallo $(0, 2\pi)$.
In definitiva si ha

$$C = -\frac{1}{2n}\frac{\pi e^{-i\pi\alpha}}{\operatorname{sen}(\pi\alpha)} e^{i\pi\alpha} = -\frac{1}{2n}\frac{\pi}{\operatorname{sen}\left[(2k+1)\pi/(2n) - \pi\right]} = \frac{\pi}{2n}\frac{1}{\operatorname{sen}\left[(2k+1)\pi/(2n)\right]}\,.$$

Terzo problema (punteggio 3/30)

Si ottengano i coefficienti della serie di Laurent centrata nell'origine $z = 0$ della funzione

$$O(z) = e^{w(z^2 - 1/z^2)}\,, \qquad z, w \in \mathbb{C}\,.$$

Si dimostri inoltre che il k-esimo coefficiente $C_k(w)$ rappresenta una funzione intera nella variabile $w \in \mathbb{C}$.

Soluzione del terzo problema

La funzione $O(z)$ ha una singolarità essenziale nell'origine dovuta all'esponenziale e^{-w/z^2}, per ottenerne la serie di Laurent possiamo usare la serie nota dell'esponenziale per entrambi i fattori, ovvero

$$O(z) = e^{wz^2} e^{-w/z^2} = \sum_{j,l=0}^{\infty} \frac{\left(wz^2\right)^j}{j!}\frac{\left(-w/z^2\right)^l}{l!} = \sum_{j,l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{w^{j+l} z^{2(j-l)}}{j!\,l!}\,.$$

L'espressione formale della serie di Laurent è

$$O(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k(w) z^k\,,$$

dove, come suggerito, abbiamo indicato con $C_k(w)$ il k-esimo coefficiente di Laurent, con $k \in \mathbb{Z}$. A partire dalla doppia serie per i due esponenziali, si ha che il coefficiente della potenza k-esimo di z può essere scritto in forma di serie, inserendo una delta di Kronecker, ovvero

$$C_k(w) = \sum_{j,l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{w^{j+l}}{j!\,l!}\delta_{2(j-l),k} = \begin{cases} 0 & \text{per } |k| \text{ dispari} \\ \displaystyle\sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{w^{k/2+2l}}{(k/2+l)!\,l!} & \text{per } k \ge 0 \text{ e } |k| \text{ pari} \\ \displaystyle\sum_{l=|k|/2}^{\infty} (-1)^l \frac{w^{k/2+2l}}{(k/2+l)!\,l!} = \sum_{l'=0}^{\infty} (-1)^{l'-k/2} \frac{w^{l'-k/2}}{l'!\,(l'-k/2)!} & \text{per } k < 0 \text{ e } |k| \text{ pari} \end{cases}.$$

Nell'ultimo caso, per valori di k negativi con $|k|$ pari, si è fatta la sostituzione $l = l' + |k|/2 = l' - k/2$. È immediato osservare che in tutti e tre i casi trattati, le funzioni $C_k(w)$, nella variabile complessa w, sono intere, infatti, a parte il caso banale $C_k(w) = 0$ per valori dispari di $|k|$, le serie che rappresentano i coefficienti hanno solo potenze positive di w. In particolare, per $k \geq 0$ la serie ha solo potenze, con la parità di $k/2$, a partire dalla stessa potenza minima $w^{k/2}$. Nel caso in cui k sia strettamente negativo, quindi $-k$ è pari e $-k \geq 2$, la serie ha una potenza minima strettamente positiva $w^{-k/2} = w^{|k|/2}$. Infine, è facile osservare che il raggio di convergenza delle serie è infinito, infatti $\forall\, R \in (0, \infty)$, possiamo utilizzare l'M-test di Weierstrass per maggiorare il modulo della serie, ovvero $\forall\, w$, tale che $|w| < R$, si hanno

$$\forall\, k \geq 0 \text{ e } |k| \text{ pari:} \qquad 0 \leq \left| \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{w^{k/2+2l}}{(k/2+l)!l!} \right| < \sum_{l=0}^{\infty} \frac{R^{k/2+2l}}{(k/2+l)!l!} \leq R^{k/2} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{R^{2l}}{l!} = R^{k/2} e^{R^2} ,$$

$$\forall\, k < 0 \text{ e } |k| \text{ pari:} \qquad 0 \leq \left| \sum_{l'=0}^{\infty} (-1)^{l'-k/2} \frac{w^{l'-k/2}}{l'(l'-k/2)!} \right| < \sum_{l'=0}^{\infty} \frac{R^{l'-k/2}}{(l'-k/2)!l'!} \leq R^{|k|/2} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{R^{l'}}{l'!} = R^{k/2} e^{R} .$$

Potremmo calcolare i raggi di convergenza R_1 e R_2, rispettivamente per i due casi con $|k|$ pari non negativi e negativi, con la formula di Cauchy-Hadamard, avremmo

$$R_1^{-1} = \limsup_{l \to \infty} \left| \frac{1}{(k/2+l)!l!} \right|^{1/l} = 0 , \qquad R_2^{-1} = \limsup_{l' \to \infty} \left| \frac{1}{l'!(l'-k/2)} \right|^{1/l'} = 0 ,$$

entrambi i raggi sono infiniti.
Un metodo alternativo consiste nel calcolare i coefficienti di Laurent usando l'espressione integrale, ovvero

$$C_k(w) = \frac{1}{2i\pi} \oint_{|z|=1} \frac{e^{w(z^2-1/z^2)}}{z^{k+1}} dz , \qquad k \in \mathbb{Z} ,$$

dove il percorso di integrazione è la circonferenza unitaria, avremmo potuto scegliere un qualsiasi curva chiusa continua che avvolgesse una sola volta l'origine che rappresenta l'unica singolarità della funzione $O(z)$. Usiamo la parametrizzazione reale $\gamma(t) = e^{it}$, con $t \in [-\pi, \pi]$, si ha

$$\begin{aligned} C_k(w) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{w\left(e^{2it} - e^{-2it}\right)} e^{-itk} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{2iw\,\mathrm{sen}(2t)} e^{-itk} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(2w\,\mathrm{sen}(2t) - tk)} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Big[\cos(2w\,\mathrm{sen}(2t) - tk) + i\,\mathrm{sen}(2w\,\mathrm{sen}(2t) - tk) \Big] dt . \end{aligned}$$

Il secondo termine, che contiene la funzione seno, dà contributo nullo, in quanto si tratta dell'integrale di una funzione dispari rispetto allo scambio $t \to -t$ sull'intervallo reale, simmetrico rispetto all'origine $[-\pi, \pi]$, quindi si ha

$$C_k(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(2w\,\mathrm{sen}(2t) - tk)\, dt , \qquad k \in \mathbb{Z} .$$

Queste funzioni sono analitiche nella variabile w in quanto la funzione integranda, $\forall\, w \in \mathbb{C}$, non ha singolarità nel percorso di integrazione. È interessante osservare che l'espressione precedente dà, come deve, ovviamente, valori nulli per tutti i valori dispari di $|k|$. Per verificarlo usiamo la formula di somma per la funzione coseno e le serie di Taylor per le funzioni $\cos(2w\,\mathrm{sen}(2t))$ e $\mathrm{sen}(2w\,\mathrm{sen}(2t))$, si ha

$$\begin{aligned} C_k(w) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Big[\cos(2w\,\mathrm{sen}(2t)) \cos(tk) + \mathrm{sen}(2w\,\mathrm{sen}(2t))\, \mathrm{sen}(tk) \Big] dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \left[\frac{(2w)^{2j}}{(2j)!} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{sen}^{2j}(2t) \cos(tk)\, dt + \frac{(2w)^{2j+1}}{(2j+1)!} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{sen}^{2j+1}(2t)\, \mathrm{sen}(tk)\, dt \right] , \end{aligned}$$

compaiono integrali del tipo

$$T_1(m,k) = \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{sen}^m(2t) \cos(tk)\, dt , \qquad T_2(m,k) = \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{sen}^m(2t)\, \mathrm{sen}(tk)\, dt ,$$

con $m \in \mathbb{N}$ e $k \in \mathbb{Z}$. Li calcoliamo usando la formule di Eulero per le funzione seno e coseno,

$$\begin{aligned}
T_1(m,k) &= \frac{1}{(2i)^m}\sum_{l=0}^{m}\binom{m}{l}(-1)^{m-l}\int_{-\pi}^{\pi} e^{2it(2l-m)}\cos(tk)dt \\
&= \frac{1}{(2i)^m}\sum_{l=0}^{m}\binom{m}{l}(-1)^{m-l}\int_{-\pi}^{\pi} \Big[\cos(2t(2l-m)) + i\,\mathrm{sen}(2t(2l-m))\Big]\cos(tk)dt \\
&= \frac{1}{(2i)^m}\sum_{l=0}^{m}\binom{m}{l}(-1)^{m-l}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(2t(2l-m))\cos(tk)dt \\
&= \frac{\pi}{(2i)^m}\sum_{l=0}^{m}\binom{m}{l}(-1)^{m-l}\delta_{2|2l-m|,|k|}\,; \\
T_2(m,k) &= \frac{1}{(2i)^m}\sum_{l=0}^{m}\binom{m}{l}(-1)^{m-l}\int_{-\pi}^{\pi} e^{2it(2l-m)}\,\mathrm{sen}(tk)dt \\
&= \frac{1}{(2i)^m}\sum_{l=0}^{m}\binom{m}{l}(-1)^{m-l}\int_{-\pi}^{\pi} \Big[\cos(2t(2l-m)) + i\,\mathrm{sen}(2t(2l-m))\Big]\mathrm{sen}(tk)dt \\
&= \frac{i}{(2i)^m}\sum_{l=0}^{m}\binom{m}{l}(-1)^{m-l}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{sen}(2t(2l-m))\,\mathrm{sen}(tk)dt \\
&= \frac{\pi}{(2i)^m}\sum_{l=0}^{m}\binom{m}{l}(-1)^{m-l}\delta_{2|2l-m|,|k|}\,\mathrm{segno}(k(2l-m))\,;
\end{aligned}$$

nelle espressioni finali abbiamo usato la condizione di ortogonalità del sistema delle funzioni trigonometriche, ovvero $\forall\,, s, t \in \mathbb{N}$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{sen}(sx)\cos(tx)dx = 0\,, \qquad \int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{sen}(sx)\,\mathrm{sen}(tx)dx = \int_{-\pi}^{\pi}\cos(sx)\cos(tx)dx = \pi\delta_{s,t}\,,$$

generalizzato al caso in cui $s, t \in \mathbb{Z}$, facendo uso delle parità delle stesse funzioni trigonometriche. La presenza della delta di Kronecker $\delta_{2|2l-m|,|k|}$, essendo il primo dei due interi, $2|2l-m|$, necessariamente pari, assicura l'annullamento di tutti i coefficienti di Laurent con indice k tale che $|k|$ sia dispari.

Quarto problema (punteggio 3/30)

Si dimostri che il numero complesso

$$z_0 = \frac{1}{2i\pi}\oint_{\partial C_{1/2}}\frac{7z^7 + 30z^5 + 3z}{z^7 + 6z^5 + 3z + 1}dz$$

rappresenta l'unico zero interno al cerchio $C_{1/2} = \{z : |z| < 1/2\}$ del polinomio di settimo grado

$$R(z) = z^7 + 6z^5 + 3z + 1\,.$$

Soluzione del quarto problema

Al fine di verificare che nel cerchio $C_{1/2}$ ci sia un solo zero del polinomio, usiamo il teorema di Rouché. Ovvero, dovremmo scrivere il polinomio come somma di due opportuni sotto-polinomi, cioè

$$R(z) = R_1(z) + R_7(z)$$

tali che: $R_1(z)$ sia di primo grado e che abbia l'unico zero nel cerchio $C_{1/2}$; sia verificata la condizione

$$|R_1(z)| > |R_7(z)|\,, \qquad \forall z \in \partial C_{1/2}\,.$$

Questo implica che i due polinomi $R_1(z)$ e $R_1(z)+R_7(z) = R(z)$ abbiano in $C_{1/2}$ lo stesso numero di zeri, ovvero uno. Scegliamo

$$R_1(z) = 3z + 1\,, \qquad R_7(z) = z^7 + 6z^5\,,$$

il polinomio di primo grado ha uno zero reale in $z = 1/3 \in C_{1/2}$. Verifichiamo la condizione di ordinamento dei moduli per $z = 1/2$, ovvero sulla frontiera di $C_{1/2}$. Usiamo la diseguaglianza triangolare partendo dal modulo di $R_1(z)$

$$|R_1(z)| = |3z + 1| \geq |3|z| - 1| = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}\,, \qquad \Rightarrow \qquad |R_1(z)| \geq \frac{1}{2}\,,$$

dovremmo provare che il modulo di $R_7(z)$ sia strettamente minore di $1/2$ se $|z|=1/2$, procediamo come segue

$$|R_7(z)| = \left|z^7+6z^5\right| \leq |z|^7+6|z|^5 = \frac{1}{2^7}+\frac{6}{2^5} = \frac{25}{2^7} = \frac{25}{128} < \frac{1}{2} \leq |R_1(z)|\,.$$

Si ha quindi la condizione di ordinamento dei moduli richiesta dal teorema, abbiamo dimostrato che il polinomio $R(z)$ ha uno solo dei sui 7 zeri all'interno del cerchio $C_{1/2}$.
Usiamo il teorema dell'indice per ottenere il valore di questo polo. Infatti, indicando il polo con z_0, che essendo isolato e unico, è necessariamente semplice, avremo che fattorizzando come

$$R(z) = (z-z_0)R_6(z)$$

il polinomio di sesto grado $R_6(z)$ non ha zeri in $C_{1/2}$, quindi la derivata logaritmica

$$\frac{\ln(R(z))}{dz} = \frac{1}{z-z_0}+\frac{R_6'(z)}{R_6(z)}\,,$$

ha in $C_{1/2}$ una sola singolarità, un polo semplice in z_0 con residuo unitario. Quindi presa una generica funzione analitica nello stesso cerchio chiuso $\overline{C}_{1/2}$, $f(z)$ avremo

$$\frac{1}{2i\pi}\oint_{\partial C_{1/2}} f(z)\frac{\ln(R(z))}{dz}dz = f(z_0)\,,$$

come si evince direttamente dalla formula integrale di Cauchy. Per ottenere il valore z_0 basta considerare la funzione identità, per cui $f(z)=z$, quindi

$$\frac{1}{2i\pi}\oint_{\partial C_{1/2}} z\frac{\ln(R(z))}{dz}dz = z_0\,,$$

da cui, scrivendo esplicitamente la derivata logaritmica, si ha l'espressione richiesta, infatti

$$z_0 = \frac{1}{2i\pi}\oint_{\partial C_{1/2}} z\frac{R'(z)}{R(z)}dz = \frac{1}{2i\pi}\oint_{\partial C_{1/2}} z\frac{7z^6+30z^4+3}{z^7+6z^5+3z+1}dz = \frac{1}{2i\pi}\oint_{\partial C_{1/2}} \frac{7z^7+30z^5+3z}{z^7+6z^5+3z+1}dz\,.$$

Quinto problema (punteggio 3/30)

Si calcoli l'integrale

$$O = \int_{-\infty}^{\infty}\left(x\,\mathrm{sen}(x)+x^2\cos(x)\right)e^{-x^2}dx\,.$$

Soluzione del quinto problema

Usiamo le formule di Eulero per scrivere le funzioni trigonometriche in termini degli esponenziali

$$\begin{aligned}
O &= \frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{\infty}\left(xe^{ix}-xe^{-ix}+ix^2e^{ix}+ix^2e^{-ix}\right)e^{-x^2}dx\\
&= \frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{\infty}\left(xe^{ix-x^2}-xe^{-ix-x^2}+ix^2e^{ix-x^2}+ix^2e^{-ix-x^2}\right)dx\\
&= \frac{1}{2i}\left(U_1^+-U_1^-+iU_2^++iU_2^-\right)\,,
\end{aligned}$$

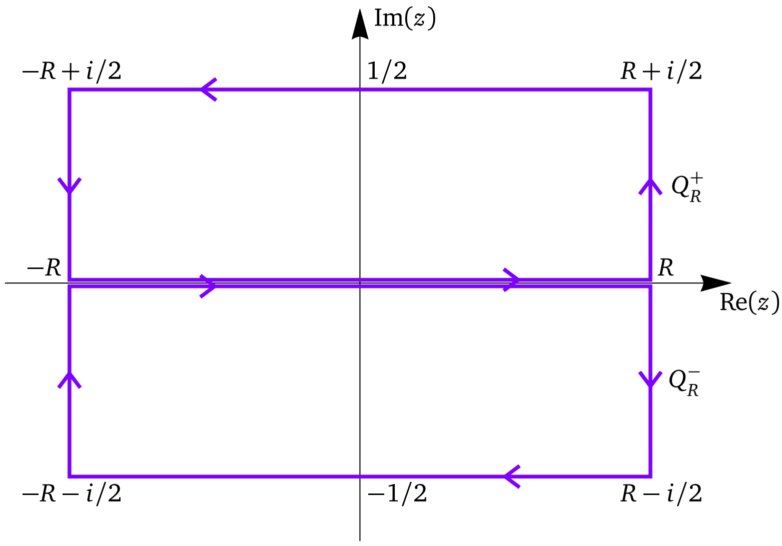
dove abbia definito gli integrali $U_{1,2}^{\pm}$ come

$$U_j^{\pm} = \int_{-\infty}^{\infty} x^j e^{\pm ix-x^2}dx\,, \qquad j=1,2\,.$$

Calcoliamo quelli con $j=1$, si ha

$$U_1^{\pm} = \int_{-\infty}^{\infty} xe^{\pm ix-x^2}dx = e^{-1/4}\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-(x\mp i/2)^2}dx\,,$$

abbiamo riportato la funzione integranda in forma di una gaussiana moltiplicando e dividendo per la costante $e^{1/4}$.



Consideriamo i percorsi rettangolari chiusi, mostrati in figura,

$$Q_R^{\pm} = [-R, R] \cup [R, R \pm i/2] \cup [R \pm i/2, -R \pm i/2] \cup [-R \pm i/2, -R]\,,$$

dove con $[z_1, z_2]$ indichiamo il segmento di estremi z_1 e z_2, orientato da z_1 a z_2. All'interno di questi percorsi le funzioni integrande, che estese al piano complesso sono intere, non hanno ovviamente alcuna singolarità, ne consegue che, omettendo per ora il fattore $e^{-1/4}$

$$\begin{aligned}
0 = \oint_{Q_R^{\pm}} z e^{-(z \mp i/2)^2} dz &= \int_{[-R,R]} z e^{-(z \mp i/2)^2} dz + \int_{[R, R\pm i/2]} z e^{-(z \mp i/2)^2} dz \\
&\quad + \int_{[R\pm i/2, -R\pm i/2]} z e^{-(z \mp i/2)^2} dz + \int_{[-R\pm i/2, -R]} z e^{-(z \mp i/2)^2} dz \\
&= \int_{-R}^{R} x e^{-(x \mp i/2)^2} dx + \int_{R}^{-R} (x \pm i/2) e^{-x^2} dx \\
&\quad + \int_{[R, R\pm i/2]} z e^{-(z \mp i/2)^2} dz + \int_{[-R\pm i/2, -R]} z e^{-(z \mp i/2)^2} dz \\
&= \int_{-R}^{R} x e^{-(x \mp i/2)^2} dx \pm \frac{i}{2} \int_{R}^{-R} e^{-x^2} dx \\
&\quad + \int_{[R, R\pm i/2]} z e^{-(z \mp i/2)^2} dz + \int_{[-R\pm i/2, -R]} z e^{-(z \mp i/2)^2} dz\,,
\end{aligned}$$

nell'ultimo membro abbiamo cancellato il termine con integranda dispari proporzionale a $x e^{-x^2}$, poiché dà contributo nullo. Dimostriamo che nel limite $R \to \infty$ i valori degli ultimi due integrali, quelli sui tratti verticali, tendono a zero, ne consideriamo i moduli, ponendo $z = \pm R + iy$, con $y \in (0, \pm 1/2)$, dove il primo doppio segno si ha per i tratti di sinistra e destra, mentre l'ultimo è per $Q_R^{\pm}$,

$$\begin{aligned}
\left| \int_{[R, R\pm i/2]} (\pm R + iy)\, e^{-(z \mp i/2)^2} dz \right| &= \left| \int_0^{\pm 1/2} (\pm R + iy)\, e^{-(\pm R + iy \mp i/2)^2} dy \right| \\
&\le (R + 1/2) \int_0^{\pm 1/2} e^{-\mathrm{Re}\left[(\pm R + iy \mp i/2)^2\right]} dy = (R + 1/2) \int_0^{\pm 1/2} e^{-R^2 + (y \mp 1/2)^2} dy \\
&\le (R + 1/2)\, e^{-R^2 + 1/4} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0\,.
\end{aligned}$$

In definitiva si ha

$$0 = \lim_{R\to\infty} \oint_{Q_R^{\pm}} z e^{-(z \mp i/2)^2} dz = \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-(x \mp i/2)^2} dx \pm \frac{i}{2} \int_{\infty}^{-\infty} e^{-x^2} dx\,,$$

da cui

$$U_1^\pm = e^{-1/4}\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-(x\mp i/2)^2}dx = \pm\frac{ie^{-1/4}}{2}\int_{\infty}^{-\infty} e^{-x^2}dx = \pm\frac{ie^{-1/4}\sqrt{\pi}}{2}\,.$$

Ripetiamo lo stesso procedimento per gli integrali $U_2^\pm$, innanzitutto si ha

$$U_2^\pm = e^{-1/4}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-(x\mp i/2)^2}dx\,.$$

Integrando sui rettangoli $Q_R^\pm$ e facendo il limite $R\to\infty$, osservando che anche in questo caso si ha l'annullamento dei contributi dovuti ai tratti verticali dei percorsi $Q_R^\pm$, infatti

$$\left|\int_{[R,R\pm i/2]}(\pm R+iy)^2\,e^{-(z\mp i/2)^2}dz\right| \le (R+1/2)^2\,e^{-R^2+1/4}\xrightarrow[R\to\infty]{}0\,,$$

si ha

$$\begin{aligned}0 &= \lim_{R\to\infty}\oint_{Q_R^\pm} z^2e^{-(z\mp i/2)^2}dz = \int_{-\infty}^{\infty} x^2e^{-(x\mp i/2)^2}dx + \int_{\infty}^{-\infty}(x\pm i/2)^2e^{-x^2}dx\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2e^{-(x\mp i/2)^2}dx - \int_{-\infty}^{\infty}\left(x^2-\frac{1}{4}\right)e^{-x^2}dx\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2e^{-(x\mp i/2)^2}dx - \int_{-\infty}^{\infty} x^2e^{-x^2}dx + \frac{\sqrt{\pi}}{4}\,,\end{aligned}$$

in cui abbiamo cancellato l'integrale con integranda dispari proporzionale a xe^{-x^2}. Il secondo integrale può essere calcolato per parti e si ha

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2e^{-x^2}dx = -\left.\frac{x}{2}e^{-x^2}\right|_{-\infty}^{\infty} + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,,$$

quindi, dalla precedente,

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2e^{-(x\mp i/2)^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4}\,.$$

Ne consegue che gli integrali U_2^+ e U_2^- hanno lo. stesso valore

$$U_2^\pm = e^{-1/4}\int_{-\infty}^{\infty} x^2e^{-(x\mp i/2)^2}dx = \frac{e^{-1/4}\sqrt{\pi}}{4}\,.$$

L'integrale cercato vale

$$O = \frac{1}{2i}\left(U_1^+ - U_1^- + iU_2^+ + iU_2^+\right) = \frac{e^{-1/4}}{2i}\left(i\sqrt{\pi}+i\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right) = \frac{3e^{-1/4}\sqrt{\pi}}{4}\,.$$

Sesto problema (punteggio 3/30)

Dopo aver dimostrato che la serie

$$N(A) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(nA+n\,\mathrm{sen}(A))}{3^n}$$

converge $\forall A\in\mathbb{R}$, se ne calcoli la somma.

Soluzione del sesto Problema

Per dimostrare che la serie converga usiamo il metodo dell'M-test di Weirstrass, verifichiamo, cioè, che il modulo del termine generico della serie sia uniformemente maggiorato dal termine costante in A di una serie numerica convergente. Poiché a numeratore del termine generico si trova una funzione coseno di argomento reale, si ha

$$0\le\left|\frac{\cos(nA+n\,\mathrm{sen}(A))}{3^n}\right|\le\frac{1}{3^n}\,,\qquad \forall\,(A,n)\in\mathbb{R}\times\mathbb{N}\,.$$

La serie con termine generico $1/3^n$ è geometrica e convergente, allora converge anche la serie $N(A)$, infatti si ha

$$0 \le |N(A)| = \left|\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(nA + n\,\mathrm{sen}(A))}{3^n}\right| \le \sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{\cos(nA + n\,\mathrm{sen}(A))}{3^n}\right| \le \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n} = \frac{1}{1-1/3} = \frac{3}{2}\,, \qquad \forall A \in \mathbb{R}\,.$$

Il numeratore del denominatore del termine generico può essere interpretato come la parte reale di un numero complesso, in particolare di una fase pura, ovvero

$$\cos(nA + n\,\mathrm{sen}(A)) = \mathrm{Re}\Big[\cos(nA + n\,\mathrm{sen}(A)) + i\,\mathrm{sen}(nA + n\,\mathrm{sen}(A))\Big] = \mathrm{Re}\left[e^{i(nA + n\,\mathrm{sen}(A))}\right] = \mathrm{Re}\left[\left(e^{i(A+\,\mathrm{sen}(A))}\right)^n\right]\,.$$

Alla luce di questo risultato, riscriviamo la somma nella forma

$$N(A) = \mathrm{Re}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{e^{i(A+\,\mathrm{sen}(A))}}{3}\right)^n\right]\,,$$

la serie è geometrica, la ragione $e^{i(A+\,\mathrm{sen}(A))}/3$, essendo A e quindi $(A+\,\mathrm{sen}(A))$ numeri reali, ha una fase pura a numeratore, allora

$$\left|\frac{e^{i(A+\,\mathrm{sen}(A))}}{3}\right| = \frac{1}{3} < 1\,,$$

e la serie converge e ha la somma

$$N(A) = \mathrm{Re}\left[\frac{1}{1 - e^{i(A+\,\mathrm{sen}(A))}/3}\right] = \mathrm{Re}\left[\frac{3}{3 - e^{i(A+\,\mathrm{sen}(A))}}\right]\,.$$

Calcoliamo la parte reale, moltiplicando e dividendo per il complesso coniugato del denominatore, si ha

$$N(A) = \mathrm{Re}\left[\frac{3}{3 - e^{i(A+\,\mathrm{sen}(A))}}\,\frac{3 - e^{-i(A+\,\mathrm{sen}(A))}}{3 - e^{-i(A+\,\mathrm{sen}(A))}}\right] = 3\mathrm{Re}\left[\frac{3 - \cos(A+\,\mathrm{sen}(A)) + i\,\mathrm{sen}(A+\,\mathrm{sen}(A))}{10 - 6\cos(A+\,\mathrm{sen}(A))}\right]\,,$$

da cui si ottiene l'espressione finale

$$N(A) = \frac{3}{2}\,\frac{3 - \cos(A+\,\mathrm{sen}(A))}{5 - 3\cos(A+\,\mathrm{sen}(A))}\,.$$