Metodi Matematici per la Fisica

Prova scritta - 27 febbraio 2012

Esercizio 1 (6 punti)
Calcolare il valore principale di Cauchy dell'integrale

$$J = \text{P.V.}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{(x-a)^2 - b^2}\, dx$$

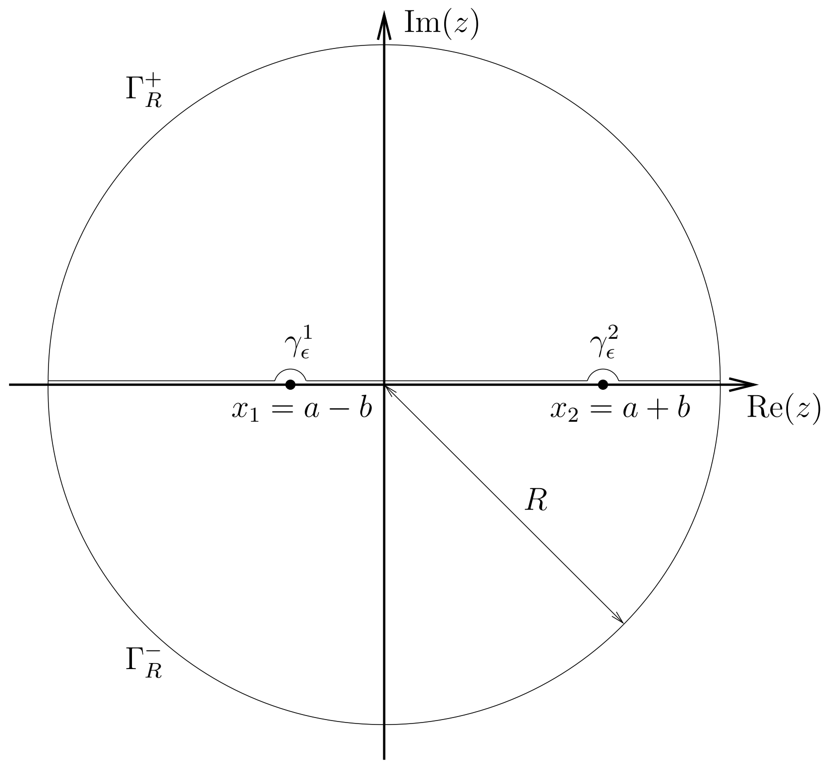
con a e b reali e $a, b > 0$.

. . . .

Soluzione
L'integrale può essere scomposto come

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2i}\text{P.V.}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{(x-x_1)(x-x_2)}\, dx \\ &= \frac{1}{2i}\left(\text{P.V.}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{(x-x_1)(x-x_2)}\, dx - \text{P.V.}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ix}}{(x-x_1)(x-x_2)}\, dx\,,\right) \\ &\equiv J_1 - J_2 \end{aligned}$$

dove gli zeri del denominatore sono: $x_1 = a - b$ e $x_2 = a + b$.



Si ha che, per il lemma di Jordan,

$$J_1 = \frac{1}{2i}\lim_{R\to\infty}\lim_{\epsilon\to 0}\left(\int_{\Gamma_R^+} \frac{e^{iz}}{z-x_1)(z-x_2)}\, dz - \int_{\gamma_\epsilon^1 \cup \gamma_\epsilon^2} \frac{e^{iz}}{(z-x_1)(z-x_2)}\, dz\right)\,,$$

dove Γ_R^+ è il cammino chiuso che si estende nel semipiano delle parti immaginarie positive e non contiene le singolarità x_1 e x_2, come mostrato in figura. Gli integrali sui cammini infinitesimi che aggirano tali singolarità devono essere sottratti al fine di ottenere il valore principale. si intendono percorsi in senso antiorario. Il primo integrale è nullo per il teorema dei residui, quindi

$$J_1 = -\frac{1}{2i} \lim_{\epsilon\to 0} \int_{\gamma_\epsilon^1 \cup \gamma_\epsilon^2} \frac{e^{iz}}{(z-x_1)(z-x_2)}\, dz\,.$$

Si invece che

$$J_2 = \frac{1}{2i} \lim_{R\to\infty} \lim_{\epsilon\to 0} \left(\int_{\Gamma_R^-} \frac{e^{-iz}}{(z-x_1)(z-x_2)}\, dz - \int_{\gamma_\epsilon^1 \cup \gamma_\epsilon^2} \frac{e^{-iz}}{(z-x_1)(z-x_2)}\, dz \right),$$

in questo caso Γ_R^- contiene le due singolarità polari per cui

$$\begin{aligned} J_2 &= -\pi\,\mathrm{Res}[x_1] - \pi\,\mathrm{Res}[x_2] - \frac{1}{2i} \lim_{\epsilon\to 0} \int_{\gamma_\epsilon^1 \cup \gamma_\epsilon^2} \frac{e^{-iz}}{(z-x_1)(z-x_2)}\, dz \\ &= \frac{\pi}{2b} e^{i(a-b)} - \frac{\pi}{2b} e^{i(a+b)} - \frac{1}{2i} \lim_{\epsilon\to 0} \int_{\gamma_\epsilon^1 \cup \gamma_\epsilon^2} \frac{e^{-iz}}{(z-x_1)(z-x_2)}\, dz \\ &= -\frac{i\pi}{b} e^{ia} \sin b - \frac{1}{2i} \lim_{\epsilon\to 0} \int_{\gamma_\epsilon^1 \cup \gamma_\epsilon^2} \frac{e^{-iz}}{(z-x_1)(z-x_2)}\, dz\,. \end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} J &= J_1 - J_2 = \frac{i\pi}{b} e^{ia} \sin b + \lim_{\epsilon\to 0} \int_{\gamma_\epsilon^1 \cup \gamma_\epsilon^2} \frac{\sin z}{(z-x_1)(z-x_2)}\, dz \\ &= \frac{i\pi}{b} \cos a \sin b - \frac{\pi}{b} \sin a \sin b + \lim_{\epsilon\to 0} \int_{\gamma_\epsilon^1 \cup \gamma_\epsilon^2} \frac{\sin z}{(z-x_1)(z-x_2)}\, dz\,. \end{aligned}$$

Per il lemma d'integrazione su archi infinitesimi si ha che se una funzione analitica $g(z)$ è tale che:

$$\lim_{z\to z_0} g(z)(z-z_0) \overset{\text{unif.}}{=} A\,,$$

allora, detto γ_ρ un arco che sottende un angolo α, centrato in z_0, di raggio ρ, si ha

$$\lim_{\rho\to 0} \int_{\gamma_\rho} g(z) = i\,\alpha\,A\,.$$

Abbiamo due casi, la funzione è sempre

$$g(z) = \frac{\sin z}{(z-x_1)(z-x_2)}\,,$$

ma i centri degli archi infinitesimi sono due: x_1 e x_2; quindi

$$\lim_{z\to x_{1,2}} g(z)(z-x_{1,2}) \overset{\text{unif.}}{=} \pm\frac{\sin x_{1,2}}{x_1 - x_2} = \mp\frac{\sin(a \mp b)}{2b}\,.$$

L'angolo sotteso a entrambi gli archi è $\alpha = -\pi$, essendo percorsi in senso orario. Infine abbiamo

$$
\begin{aligned}
\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\gamma_\epsilon^1\cup\gamma_\epsilon^2} \frac{\sin z}{(z-x_1)(z-x_2)}\,dz &= \lim_{\epsilon\to 0}\left[\int_{\gamma_\epsilon^1} \frac{\sin z}{(z-x_1)(z-x_2)}\,dz + \int_{\gamma_\epsilon^2} \frac{\sin z}{(z-x_1)(z-x_2)}\,dz\right] \\
&= -i\,\pi\left[-\frac{\sin(a-b)}{2b} + \frac{\sin(a+b)}{2b}\right] \\
&= \frac{i\,\pi}{2b}\left[\sin a\cos b - \cos a\sin b - \sin a\cos b - \cos a\sin b\right] \\
&= -\frac{i\,\pi}{b}\,\cos a\sin b\,.
\end{aligned}
$$

Ma avevamo che

$$
\begin{aligned}
J &= \frac{i\pi}{b}\cos a\sin b - \frac{\pi}{b}\sin a\sin b + \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\gamma_\epsilon^1\cup\gamma_\epsilon^2} \frac{\sin z}{(z-x_1)(z-x_2)}\,dz \\
&= \frac{i\pi}{b}\cos a\sin b - \frac{\pi}{b}\sin a\sin b - \frac{i\,\pi}{b}\,\cos a\sin b \\
&= -\frac{\pi}{b}\sin a\sin b\,.
\end{aligned}
$$

....

Esercizio 2 (5 punti)
Si calcoli con il metodo dei residui l'integrale

$$
I = \int_{|z|=1} \frac{dz}{(e^z-1)z^2}\,.
$$

....

Nel cerchio unitario l'integranda ha solo un polo in $z=0$, quindi

$$
I = \int_{|z|=1} \frac{dz}{(e^z-1)z^2} = 2i\pi\,\mathrm{Res}\left[\frac{1}{(e^z-1)z^2}, 0\right]\,.
$$

Per calcolare tale residuo possiamo sfruttare il fatto che esso coincida con il primo coefficiente singolare, C_{-1}, della serie di Laurent in $z=0$ della stessa integranda. Sviluppando l'integranda intorno a $z=0$ si ha

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{(e^z-1)z^2} &= \frac{1}{z^2(z+z^2/2!+z^3/3!+\ldots)} \\
&= \frac{1}{z^3(1+z/2!+z^2/3!+\ldots)} \\
&= \frac{1}{z^3}\left[1-\left(\frac{z}{2!}+\frac{z^2}{3!}+\ldots\right)+\left(\frac{z}{2!}+\frac{z^2}{3!}+\ldots\right)^2+\ldots\right] \\
&= \frac{1}{z^3}+\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{z^2}+\left(-\frac{1}{6}+\frac{1}{4}\right)\frac{1}{z}+\ldots\,,
\end{aligned}
$$

da cui si ottengono i coefficienti singolari come:

$$C_{-3} = 1\,, \qquad C_{-2} = -\frac{1}{2}\,, \qquad C_{-1} = \frac{1}{12}\,.$$

L'integrale iniziale è

$$\begin{aligned} I = \int_{|z|=1} \frac{dz}{(e^z-1)z^2} &= 2i\pi\,\mathrm{Res}\left[\frac{1}{(e^z-1)z^2}, 0\right] \\ &= 2i\pi\, C_{-1} \\ &= \frac{i\pi}{6}\,. \end{aligned}$$

. . . .

Esercizio 3 (5 punti)
Si verifichi la disuguaglianza

$$\left|\int_{|z|=R} \ln(z^n)\, dz\right| \leq \left|\int_{|z|=1} R\, \ln[(-R)^n]\, \frac{dz}{z}\right|\,,$$

con n intero positivo e con il logaritmo in determinazione principale.

. . . .

Dalla disuguaglianza di Darboux si ha

$$\left|\int_{|z|=R} \ln(z^n)\, dz\right| \leq 2\pi R \max_{|z|=R} |\ln(z^n)|\ .$$

Ma, per $|z| = R$, si ha

$$\begin{aligned} |\ln(z^n)| &= n\,|\ln(z)| \\ &= n\left[\ln|z|^2 + \arg(z)^2\right]^{1/2} \\ &= n\left[\ln(R)^2 + \arg(z)^2\right]^{1/2} \\ &\leq n\left[\ln(R)^2 + \pi^2\right]^{1/2} \\ &= n\,|\ln(-R)| \\ &= |\ln[(-R)^n]|\ . \end{aligned}$$

Quindi

$$\left|\int_{|z|=R} \ln(z^n)\, dz\right| \leq 2\pi R\, |\ln[(-R)^n]|\ ,$$

inoltre avendo che

$$\left|\int_{|z|=1} \frac{dz}{z}\right| = 2\pi$$

si ha la disuguaglianza iniziale.

. . . .

Esercizio 4 (6 punti)
Si sviluppi in serie di Laurent intorno a $z = 0$ fino all'ordine z^2 compreso la funzione

$$f(z) = \frac{1}{\sin(z)\sinh(z)}\,.$$

. . . .

Si possono considerare gli sviluppi noti, intorno a $z = 0$, delle funzioni a denominatore:

$$\begin{aligned} \sin z &= z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots\,, \\ \sinh z &= z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots\,, \end{aligned}$$

da cui si ottengono quelli per le inverse

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin z} &= \frac{1}{z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots} \\ &= \frac{1}{z}\frac{1}{1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \dots} \\ &= \frac{1}{z}\left[1 + \left(\frac{z^2}{3!} - \frac{z^4}{5!} + \dots\right) + \left(\frac{z^2}{3!} - \frac{z^4}{5!} + \dots\right)^2 + \dots\right]\,, \\ \frac{1}{\sinh z} &= \frac{1}{z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots} \\ &= \frac{1}{z}\frac{1}{1 + \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \dots} \\ &= \frac{1}{z}\left[1 - \left(\frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \dots\right) + \left(\frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \dots\right)^2 + \dots\right]\,. \end{aligned}$$

La funzione completa è pari e ha il seguente sviluppo in serie

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin(z)\sinh(z)} &= \frac{1}{z^2}\left[1 + \left(\frac{z^2}{3!} - \frac{z^4}{5!} + \dots\right) + \left(\frac{z^2}{3!} - \frac{z^4}{5!} + \dots\right)^2 + \dots\right] \\ &\quad \times \left[1 - \left(\frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \dots\right) + \left(\frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \dots\right)^2 + \dots\right] \\ &= \frac{1}{z^2} + (0) + \left(-\frac{1}{5!} - \frac{1}{5!} - \frac{1}{(3!)^2} + \frac{1}{(3!)^2} + \frac{1}{(3!)^2}\right) z^2 + \dots \\ &= \frac{1}{z^2} + \left(-\frac{1}{60} + \frac{1}{36}\right) z^2 + \dots \\ &= \frac{1}{z^2} + \left(\frac{1}{90}\right) z^2 + \dots\,. \end{aligned}$$

. . . .

Esercizio 5 (6 punti)
Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix},$$

con $a, b > 0$.

- Per quali valori di a e b la matrice A rappresenta un proiettore?
- Si determinino, in questo caso, autovalori e autovettori.

. . . .

L'equazione caratteristica è

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} a-\lambda & 0 & a \\ 0 & b-\lambda & 0 \\ a & 0 & a-\lambda \end{pmatrix} &= 0 \\ (a-\lambda)^2(b-\lambda) - a^2(b-\lambda) &= 0 \\ \lambda(\lambda-2a)(b-\lambda) &= 0\,, \end{aligned}$$

da cui gli autovalori

$$\lambda_1 = 0\,, \qquad \lambda_2 = 2a\,, \qquad \lambda_3 = b\,.$$

Per avere un proiettore dobbiamo richiedere che la matrice sia idempotente, ovvero che abbiamo autovalori o unitari o nulli, quindi

$$a = \frac{1}{2}\,, \qquad b = 1\,.$$

Gli autostati si ottengono risolvendo l'equazione agli autovalori

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \\ \gamma_i \end{pmatrix} = \lambda_i \begin{pmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \\ \gamma_i \end{pmatrix}, \qquad i = 1, 2, 3\,.$$

In particolare si ha

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} &\alpha_1 = 1 \\ &\gamma_1 = -\alpha_1 = -1 \\ &\beta_1 = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad u_1 = \frac{1}{\sqrt{|\alpha_1|^2 + |\beta_1|^2 + |\gamma_1|^2}} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{array}{l} \alpha_2 = 1 \\ \gamma_2 = \alpha_2 = 1 \\ \beta_2 = 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_3 \\ \beta_3 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_3 \\ \beta_3 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{array}{l} \alpha_3 = 0 \\ \gamma_3 = \alpha_3 = 0 \\ \beta_3 = 1 \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

. . . .

Esercizio 6 (6 punti)
Risolvere l'equazione integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\, e^{-(y-x)^2/a^2} dy = e^{-x^2/b^2}$$

con: $b > a > 0$.

. . . .

L'integrale del membro di sinistra è la convoluzione di due funzioni, ovvero:

$$\text{LHS} = f(x) * e^{-x^2/a^2} .$$

La trasformata di Fourier è

$$\mathcal{F}_k[\text{LHS}] = \mathcal{F}_k\left[f(x) * e^{-x^2/a^2}\right] = \sqrt{2\pi}\, \mathcal{F}_k[f(x)]\mathcal{F}_k\left[e^{-x^2/a^2}\right] .$$

La trasformata di Fourier della gaussiane è

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_k\left[e^{-x^2/a^2}\right] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/a^2} e^{-ikx} dx \\ &= \frac{e^{-k^2a^2/4}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x/a+ika/2)^2} dx \\ &= \frac{a\, e^{-k^2a^2/4}}{\sqrt{2}} , \end{aligned}$$

quindi

$$\mathcal{F}_k[\text{LHS}] = \mathcal{F}_k[f(x)]\sqrt{\pi}\, a\, e^{-k^2a^2/4} .$$

La trasformata di Fourier del membro di destra è

$$\mathcal{F}_k[\text{RHS}] = \mathcal{F}_k\left[e^{-x^2/b^2}\right] = \frac{b\, e^{-k^2b^2/4}}{\sqrt{2}} ,$$

uguagliando si ottiene la trasformata di Fourier della soluzione, ovvero

$$\mathcal{F}_k[f(x)] = \frac{b\, e^{-k^2b^2/4}}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{\pi}\, a\, e^{-k^2a^2/4}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{b}{a} e^{-(b^2-a^2)k^2/4} \,.$$

L'antitrasformata è

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{b}{a}\, \mathcal{F}_x \left[e^{-(b^2-a^2)k^2/4} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{b/a}{\sqrt{b^2-a^2}} e^{-x^2/(b^2-a^2)} \,. \end{aligned}$$