Metodi Matematici per la Fisica

Prova scritta - 26 settembre 2012

Esercizio 1 (6 punti)
Calcolare l'integrale

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{1 + 4\cos^2(x)} \,.$$

....

Soluzione
Con la sostituzione $z = e^{ix}$, quindi: $x = -i\ln(z)$ e $dx = -idz/z$, l'integrale diventa

$$I = \int_\gamma \frac{dz/z}{1 + (z + 1/z)^2} = -i \int_\gamma \frac{zdz}{z^2 + (z^2+1)^2} \,,$$

dove la curva $\gamma = \{z : z = e^{i\theta}, \theta \in [-\pi, \pi]\}$ è la circonferenza unitaria. L'integranda ha quattro poli, si ottengono come soluzioni delle due equazioni di secondo grado:

$$z^{\pm 2} \pm iz^{\pm} + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} z_1^+ &= i\,\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \\ z_2^+ &= i\,\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ z_1^- &= i\,\frac{+1-\sqrt{5}}{2} \\ z_2^- &= i\,\frac{+1+\sqrt{5}}{2} \end{cases} \,,$$

i moduli sono

$$\begin{cases} |z_1^+| &= \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 1 \\ |z_2^+| &= \frac{-1+\sqrt{5}}{2} < 1 \\ |z_1^-| &= \frac{-1+\sqrt{5}}{2} < 1 \\ |z_2^-| &= \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 1 \end{cases} \,,$$

quindi solo z_2^+ e z_1^- sono nel cerchio unitario. Applicando il teorema dei residui si ottiene

$$I = 2\pi\Big(\mathrm{Res}[f(z), z_2^+] + \mathrm{Res}[f(z), z_1^-]\Big) \,,$$

con

$$f(z) = \frac{zdz}{z^2 + (z^2+1)^2} \,.$$

Poiché tutti i poli sono semplici i residui si ottengono come:

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}[f(z), z_2^+] &= \lim_{z \to z_2^+} (z - z_2^+) f(z) \\ &= z_2^+ \lim_{z \to z_2^+} \frac{1}{2z + 4z(z^2+1)} \\ &= \frac{1}{2 + 4(z_2^{+2} + 1)} \\ &= \frac{1}{2 + 4\left[-(6 - 2\sqrt{5})/4 + 1\right]} = \frac{1}{2\sqrt{5}} \,, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Res}[f(z), z_1^-] &= \lim_{z \to z_1^-} (z - z_1^-) f(z) \\
&= \frac{1}{2 + 4(z_1^{-2} + 1)} \\
&= \frac{1}{2 + 4\left[-(6 - 2\sqrt{5})/4 + 1\right]} = \frac{1}{2\sqrt{5}} \,.
\end{aligned}
$$

Finalmente l'integrale è

$$
I = 2\pi \Big(\mathrm{Res}[f(z), z_2^+] + \mathrm{Res}[f(z), z_1^-] \Big) = \frac{2\pi}{\sqrt{5}} \,.
$$

. . . .

Esercizio 2 (6 punti)
Si calcoli l'integrale

$$
J = \int_0^\infty \frac{\sin^2(x)}{1 + x^4} dx \,.
$$

. . . .

Soluzione
L'integranda è una funzione pari, possiamo riscrivere l'integrale estendendo l'intervallo a tutto l'asse reale come

$$
J = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \frac{\sin^2(x)}{1 + x^4} dx \,,
$$

inoltre, scomponendo il seno in termini degli esponenziali, si ha

$$
\begin{aligned}
J = -\frac{1}{8} \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{2iz} + e^{-2iz} - 2}{1 + z^4} dz &= -\frac{1}{8} \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{2iz}}{1 + z^4} dz - \frac{1}{8} \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-2iz}}{1 + z^4} dz + \frac{1}{4} \int_{-\infty}^\infty \frac{dz}{1 + z^4} \\
&= -J_1 - J_2 + J_3 \,.
\end{aligned}
$$

Tutte le integrande hanno gli stessi quattro poli semplici

$$
z_k = e^{i(1+2k)\pi/4} \,, \qquad k = 0, 1, 2, 3 \,.
$$

Possiamo usare il lemma di Jordan però, mentre per J_1 e J_2 la scelta del percorso è obbligata dal segno del coefficiente di iz ad esponente, per J_3 possiamo scegliere indifferentemente di *chiudere sopra o sotto*, essendo questo il caso di coefficiente nullo. Abbiamo quindi

$$
\begin{aligned}
J_1 &= \frac{1}{8} \lim_{R \to \infty} \int_{\Gamma_R^+} \frac{e^{2iz}}{1 + z^4} dz = \frac{i\pi}{4} \Big(\mathrm{Res}[f_1(z), z_0] + \mathrm{Res}[f_1(z), z_1] \Big) \,, \\
J_2 &= \frac{1}{8} \lim_{R \to \infty} \int_{\Gamma_R^-} \frac{e^{-2iz}}{1 + z^4} dz = -\frac{i\pi}{4} \Big(\mathrm{Res}[f_2(z), z_2] + \mathrm{Res}[f_2(z), z_3] \Big) \,, \\
J_3 &= \frac{1}{4} \lim_{R \to \infty} \int_{\Gamma_R^+} \frac{dz}{1 + z^4} = \frac{i\pi}{2} \Big(\mathrm{Res}[f_3(z), z_0] + \mathrm{Res}[f_3(z), z_1] \Big) \,,
\end{aligned}
$$

dove i percorsi sono

$$\Gamma_R^+ = \{z : z = Re^{i\theta}, \theta \in [0,\pi]\} \cup [-R,R]$$
$$\Gamma_R^- = -\{z : z = Re^{i\theta}, \theta \in [\pi,2\pi]\} \cup [-R,R]\,,$$

il segno "-" in J_2 è conseguenza del verso di percorrenza di Γ_R^- che è orario. I residui sono

$$\mathrm{Res}[f_1(z), z_j] = \lim_{z\to z_0}(z-z_j)f_1(z) = \frac{e^{2iz_j}}{4z_j^3}\,, \qquad j=0,1\,,$$

$$\mathrm{Res}[f_2(z), z_j] = \lim_{z\to z_0}(z-z_j)f_2(z) = \frac{e^{-2iz_j}}{4z_j^3}\,, \qquad j=2,3\,,$$

$$\mathrm{Res}[f_3(z), z_j] = \lim_{z\to z_0}(z-z_j)f_3(z) = \frac{1}{4z_j^3}\,, \qquad j=0,1\,.$$

L'integrale completo è

$$\begin{aligned} J &= -J_1 - J_2 + J_3 \\ &= \frac{i\pi}{4}\left[-\sum_{j=0}^{1}\frac{e^{2iz_j}}{4z_j^3} + \sum_{j=2}^{3}\frac{e^{-2iz_j}}{4z_j^3} + 2\sum_{j=0,1}\frac{1}{4z_j^3}\right]\,, \end{aligned}$$

osservando che $z_2 = z_1^*$ e $z_3 = z_0^*$, possiamo compattare e ottenere il risultato finale

$$\begin{aligned} J &= \frac{i\pi}{16}\sum_{j=0}^{1}\left[-\frac{e^{2iz_j}}{z_j^3} + \frac{e^{-2iz_j^*}}{z_j^{*3}} + \frac{2}{z_j^3}\right] \\ &= \frac{i\pi}{16}\sum_{j=0}^{1} e^{-2\mathrm{Im}(z_j)}\left[-e^{i[2\mathrm{Re}(z_j)-3(2j+1)\pi/4]} + e^{-i[2\mathrm{Re}(z_j)-3(2j+1)\pi/4]}\right] + \frac{i\pi}{8}\left[e^{-3i\pi/4} + e^{-i\pi/4}\right] \\ &= \frac{\pi}{8}\sum_{j=0}^{1} e^{-2\mathrm{Im}(z_j)}\sin[2\mathrm{Re}(z_j) - 3(2j+1)\pi/4] + \frac{\pi}{4\sqrt{2}} \\ &= \frac{\pi}{8}e^{-\sqrt{2}}\sin\left(\sqrt{2} - 3\pi/4\right) - \frac{\pi}{4}e^{-\sqrt{2}}\sin\left(\sqrt{2} + \pi/4\right) + \frac{\pi}{4\sqrt{2}} \\ &= \frac{\pi}{8}e^{-\sqrt{2}}\left[-\sqrt{2}\sin\left(\sqrt{2}\right) - \sqrt{2}\cos\left(\sqrt{2}\right)\right] + \frac{\pi}{4\sqrt{2}} \\ &= \frac{\pi - e^{-\sqrt{2}}\pi\left[\sin\left(\sqrt{2}\right) + \cos\left(\sqrt{2}\right)\right]}{4\sqrt{2}}\,. \end{aligned}$$

. . . .

Esercizio 3 (5 punti)
Trovare la regione di convergenza della serie

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(z+2)^{k-1}}{k^2\,3^k}\,.$$

Si verifichi che in tale regione la convergenza è uniforme.

. . . .

Soluzione
Con la sostituzione $w = z + 2$ si ha

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{w^{k-1}}{k^2\, 3^k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{(n+1)^2\, 3^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n w^n \,,$$

il raggio di convergenza R si ottiene usando la formula di Cauchy-Hadamard per l'inverso

$$\begin{aligned} R^{-1} &= \limsup_{n\to\infty} |c_n|^{1/n} \\ &= \lim_{n\to\infty} (n+1)^{-2/n}\; 3^{-1-1/n} \\ &= \lim_{n\to\infty} e^{-2\ln(n+1)/n}\, 3^{-1-1/n} = \frac{1}{3}\,. \end{aligned}$$

La serie converge quando

$$|w| < R = 3 \quad \Rightarrow \quad |z+2| < 3\,,$$

ovvero converge nel cerchio di raggio 3 e centro $z = -2$.

. . . .

Esercizio 4 (5 punti)
Risolvere l'equazione

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(y) f(x-y) dy = \frac{x}{x^2 + a^2}$$

con a reale e $a > 0$.

. . . .

Soluzione
La trasformata di Fourier della convoluzione di funzione con se stessa è proporzionale al quadrato della trasformata di Fourier, ovvero

$$\mathcal{F}_k[f * f] = \sqrt{2\pi}\, \tilde{f}(k)^2 = -i\sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-a|k|} \mathrm{sign}(k)\,,$$

dove $\mathrm{sign}(x)$ è la funzione segno e vale 1 se $x \geq 0$, -1 per $x < 0$. Risolvendo rispetto a $\tilde{f}(k)$ si ottiene

$$\tilde{f}(k) = \sqrt{\frac{-i}{2}\,\mathrm{sign}(k)}\, e^{-a|k|/2}\,,$$

l'antitrasformata dà la soluzione

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k) e^{ikx} dk = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a + 2x}{a^2 + 4x^2}\,.$$

. . . .

Esercizio 5 (6 punti)
Determinare la funzione di Green dell'operatore differenziale

$$\hat{O}_x = \left(-i\frac{d}{dx}\right)^m + \mu^m\,,$$

con m intero, pari e non nullo, e μ reale e positivo.

. . . .

Soluzione
la funzione di Green è la soluzione dell'equazione impulsiva, cioè che ha come funzione d'ingresso una delta di Dirac

$$\hat{O}_x G(x) = \delta(x)\,.$$

Con il metodo delle trasformate di Fourier si ha

$$\Big[k^m + \mu^m\Big]\tilde{G}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,,$$

facendo l'antitrasformata si ottiene

$$G(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ikx}dk}{k^m+\mu^m}\,.$$

Poiché m è pari, poniamo $m = 2n$, $n = 1, 2, \ldots$, ci sono $2n = m$ poli semplici, con

$$k_j = e^{i\pi(1+2j)/m}\mu\,, \qquad j = 0, 1, \ldots, 2n-1 = m-1\,.$$

La prima metà dei poli è posta nel semipiano positivo, la seconda in quello negativo, non ci sono poli reali, infatti

$$\mathrm{Im}[k_j] = \mu\sin[\pi(1+2j)/m] = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1+2j}{m}\in\mathbb{N}\,,$$

quest'ultima non è mai vera essendo m pari. Consideriamo i primi $m/2$ poli, le parti immaginarie sono

$$\mathrm{Im}[k_j] > 0 \quad \Rightarrow \quad 1+2j < m \quad \Rightarrow \quad j < \frac{m}{2} - \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad j \le \frac{m}{2} - 1\,,$$

quindi gli $m/2$ poli k_j, con $j = 0, \ldots, m/2-1$, sono nel semipiano superiore, mentre quelli con $j = m/2, \ldots, m$, giacciono nel semipiano inferiore. La funzione di Green sarà

$$\begin{aligned}
G(x) &= \frac{1}{2\pi}2i\pi\left\{\theta(x)\sum_{j=0}^{m/2-1}\mathrm{Res}\,[k_j] - \theta(-x)\sum_{j=m/2}^{m}\mathrm{Res}\,[k_j]\right\}\\
&= i\left\{\theta(x)\sum_{j=0}^{m/2-1} e^{ik_jx}k_j^{1-m} - \theta(-x)\sum_{j=m/2}^{m} e^{ik_jx}k_j^{1-m}\right\}\\
&= i\mu\left\{\theta(x)\sum_{j=0}^{m/2-1} e^{ik_jx}e^{i\pi(1+2j)(1/m-1)} - \theta(-x)\sum_{j=m/2}^{m} e^{ik_jx}e^{i\pi(1+2j)(1/m-1)}\right\}\\
&= -i\mu\left\{\theta(x)\sum_{j=0}^{m/2-1} e^{i[k_j+\pi(1+2j)/m]} - \theta(-x)\sum_{j=m/2}^{m} e^{i[k_j+\pi(1+2j)/m]}\right\}\,.
\end{aligned}$$

Esercizio 6 (6 punti)
Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & -i/2 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ i/2 & 0 & 1/4 \end{pmatrix},$$

si determini la matrice B definita come

$$B = \sum_{k=0}^{\infty} A^k,$$

classificandola, e calcolandone autovalori ed autovettori.

. . . .

Soluzione
La matrice A è hermitiana, quindi anche B, poiché la somma di matrice hermitiane è ancora una matrice hermitiana e si ha, per n intero qualsiasi,

$$(A^n)^\dagger = \left(A^\dagger\right)^n = A^n,$$

ne consegue che $B = B^\dagger$.
Gli autovalori di A sono:

$$\alpha_1 = 3/4, \qquad \alpha_2 = -1/4, \qquad \alpha_3 = 1/4,$$

e gli autovettori

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice che diagonalizza A è

$$U = \begin{pmatrix} -i/\sqrt{2} & i/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Tutti gli autovalori di A verificano la condizione $|\alpha_l| < 1$, ne consegue che gli autovalori, β_l, di B si ottengono come

$$\beta_l = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_l^k = \frac{1}{1 - \alpha_l},$$

quindi

$$\beta_1 = 4, \qquad \beta_2 = 4/5, \qquad \beta_3 = 4/3.$$

Infine, B si ottiene come:

$$B = U \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4/5 & 0 \\ 0 & 0 & 4/3 \end{pmatrix} U^\dagger = \begin{pmatrix} 12/5 & 0 & -8i/5 \\ 0 & 4/3 & 0 \\ 8i/5 & 0 & 12/5 \end{pmatrix}.$$