Metodi Matematici per la Fisica

Prova scritta - 26 luglio 2016

Si risolvano cortesemente i seguenti problemi.

Primo problema (punteggio: 6/30)

Si determini la forma esplicita e il dominio di analiticit della funzione $f(z)$ definita dalla rappresentazione integrale

$$f(z) = \int_{-1}^{1} \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^z \frac{dx}{x^2+x+1}\,.$$

Soluzione del primo problema

Il dominio di convergenza dell'integrale e quindi della rappresentazione si ottiene studiando il comportamento dell'integranda nell'intervallo di integrazione. Si osserva che per $x \in (-1,1)$ non si hanno singolarit . Agli estremi, il termine elevato a z pu avere singolarit polari. In particolare, per l'integrabilit , nei limiti $x \to \pm 1$, si deve avere

$$\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^z \frac{1}{x^2+x+1} = o(1/(1\mp x))\,,$$

ovvero,

$$\lim_{x\to\pm 1}\left|\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^z \frac{1}{x^2+x+1}\right|(1\mp x) = 0\,.$$

La richiesta di annullamento dei due limiti d la condizione su z, infatti

$$\lim_{x\to\pm 1}\left|\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^z \frac{1}{x^2+x+1}\right|(1\mp x) = \frac{2^{\mp \mathrm{Re}(z)}}{2\pm 1}\lim_{x\to\pm 1}|1\mp x|^{\pm\mathrm{Re}(z)+1}$$

da cui: $\pm\mathrm{Re}(z)+1>0$, quindi $-1<\mathrm{Re}(z)<1$. Il dominio di convergenza dell'integrale $D_0=\{z:-1<\mathrm{Re}(z)<1\}$, il rettangolo infiniti, parallelo all'asse immaginario, delle parti reali comprese tra -1 e 1.
Al fine di calcolare l'integrale, definiamo il percorso ad "osso", mostrato in figura come: $O_\epsilon = L_+\cup L_-\cup\gamma_-\cup\gamma_+$, con

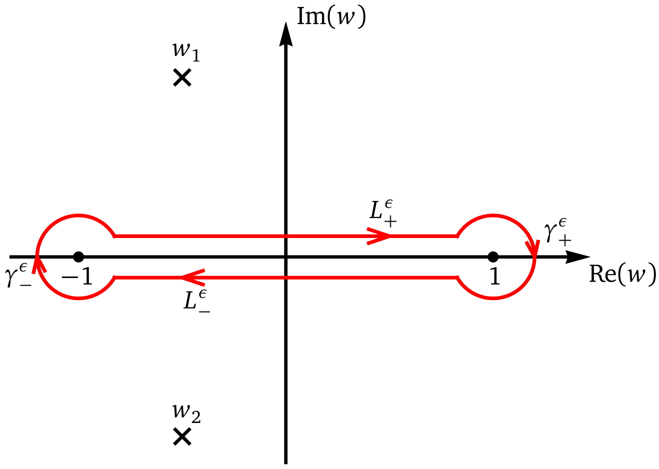
$$\begin{aligned}
L^\epsilon_\pm &= \{z : z = x \pm i\epsilon\mathrm{sen}(\epsilon), x\in(-1+\eta,1-\eta), \eta=\epsilon\cos(\epsilon)\}\\
\gamma^\epsilon_\pm &= \{z : z=\pm 1 \mp \epsilon e^{\mp i\theta}, \theta\in(\epsilon,2\pi-\epsilon)\}\,.
\end{aligned}$$

L'integranda ha nel piano complesso w due poli semplici, indicati in figura con il simbolo $\times$, in

$$w_{1,2} = -\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{\pm 2i\pi/3}\,,$$

e due punti di diramazione in $w=\pm 1$.
L'integrale sul percorso chiuso O_ϵ indipendente da ϵ e si ottiene con il teorema dei residui come

$$\oint_{O_\epsilon}\left(\frac{1-w}{1+w}\right)^z\frac{dw}{w^2+w+1} = 2i\pi\left(\mathrm{Res}\left[\left(\frac{1-w}{1+w}\right)^z\frac{1}{w^2+w+1},w_1\right]+\mathrm{Res}\left[\left(\frac{1-w}{1+w}\right)^z\frac{1}{w^2+w+1},w_2\right]\right)\,.$$



Per mettere questo integrale in relazione con quello che si desidera calcolare, $f(z)$, definiamo per la funzione integranda un taglio in corrispondenza del segmento reale di integrazione $[-1,1]$. Scegliamo quindi le fasi per il numeratore e denominatore della funzione elevata a z come

$$\begin{aligned} 1-w &= |1-w|e^{i\theta_1}\,, &\qquad \theta_1 &\in (-\pi,\pi)\,,\\ 1+w &= |1+w|e^{i\theta_2}\,, &\qquad \theta_2 &\in (0,2\pi)\,. \end{aligned}$$

In questo modo, sopra il taglio, ovvero su L_+^ϵ, con $w = x + i\epsilon$, $x \in (-1+\epsilon, 1-\epsilon)$, avremo $\theta_{1,2} \to 0^\mp$, quindi

$$\left(\frac{1-w}{1+w}\right)^z = \left|\frac{1-w}{1+w}\right|^z e^{iz(\theta_1-\theta_2)} = \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^z e^{iz(0-0)} = \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^z .$$

Sotto il taglio, lungo L_-^ϵ, si ha $w = x - i\epsilon$, $x \in (-1+\epsilon, 1-\epsilon)$, e $\theta_1 \to 0^+$, $\theta_2 \to 2\pi^-$, cio

$$\left(\frac{1-w}{1+w}\right)^z = \left|\frac{1-w}{1+w}\right|^z e^{iz(\theta_1-\theta_2)} = \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^z e^{iz(0-2\pi)} = \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^z e^{-2iz\pi}.$$

Gli integrali sugli archi infinitesimi $\gamma_\pm^\epsilon$ si annullano nel limite $\epsilon \to 0^+$, infatti si hanno i limiti uniformi

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \left(\frac{1-w}{1+w}\right)^z \frac{1}{w^2+w+1}(w\pm 1) = 0\,.$$

In definitiva

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon\to 0^+} \oint_{O_\epsilon} \left(\frac{1-w}{1+w}\right)^z \frac{dw}{w^2+w+1} &= \lim_{\epsilon\to 0^+} \left[\int_{L_+^\epsilon} \left(\frac{1-w}{1+w}\right)^z \frac{dw}{w^2+w+1} + \int_{L_-^\epsilon} \left(\frac{1-w}{1+w}\right)^z \frac{dw}{w^2+w+1}\right] \\ &= \lim_{\epsilon\to 0^+} \left[\int_{-1+\epsilon}^{1-\epsilon} \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^z \frac{dx}{x^2+x+1} + e^{-2iz\pi} \int_{1-\epsilon}^{-1+\epsilon} \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^z \frac{dx}{x^2+x+1}\right] \\ &= 2i\, e^{-iz\pi} \mathrm{sen}(z\pi) \int_{-1}^{1} \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^z \frac{dx}{x^2+x+1} \\ &= 2i\, e^{-iz\pi} \mathrm{sen}(z\pi) f(z)\,. \end{aligned}$$

D'altro canto l'integrale a primo membro pu   essere calcolato come somma dei residui in $w_{1,2}$, quindi

$$2i\, e^{-iz\pi}\text{sen}(z\pi)\, f(z) = 2i\pi\left(\text{Res}\left[\left(\frac{1-w}{1+w}\right)^z \frac{1}{w^2+w+1}, w_1\right] + \text{Res}\left[\left(\frac{1-w}{1+w}\right)^z \frac{1}{w^2+w+1}, w_2\right]\right)$$

$$f(z) = \pi\frac{e^{i\pi z}}{\text{sen}(z\pi)}\left(\text{Res}\left[\left(\frac{1-w}{1+w}\right)^z \frac{1}{w^2+w+1}, w_1\right] + \text{Res}\left[\left(\frac{1-w}{1+w}\right)^z \frac{1}{w^2+w+1}, w_2\right]\right).$$

Il residuo in $w_1 = -1/2 + i\sqrt{3}/2$

$$\begin{aligned}
\text{Res}\left[\left(\frac{1-w}{1+w}\right)^z \frac{1}{w^2+w+1}, w_1\right] &= \left(\frac{1-w_1}{1+w_1}\right)^z \frac{1}{w_1-w_2} \\
&= \left(\frac{3-i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}\right)^z \frac{1}{i\sqrt{3}} \\
&= 3^{z/2}\exp\left[iz\left(-\arctan(1/\sqrt{3}) - \arctan(\sqrt{3})\right)\right]\frac{1}{i\sqrt{3}} \\
&= 3^{z/2}\exp\left[iz\left(-\pi/6 - \pi/3\right)\right]\frac{1}{i\sqrt{3}} \\
&= -i\, 3^{z/2-1/2} e^{-iz\pi/2}.
\end{aligned}$$

Di conseguenza, il residuo in $w_2 = -1/2 - i\sqrt{3}/2$

$$\begin{aligned}
\text{Res}\left[\left(\frac{1-w}{1+w}\right)^z \frac{1}{w^2+w+1}, w_2\right] &= \left(\frac{1-w_2}{1+w_2}\right)^z \frac{1}{w_2-w_1} \\
&= \left(\frac{3+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}\right)^z \frac{1}{-i\sqrt{3}} \\
&= 3^{z/2}\exp\left[iz\left(\arctan(1/\sqrt{3}) - \arctan(-\sqrt{3})\right)\right]\frac{1}{-i\sqrt{3}} \\
&= 3^{z/2}\exp\left[iz\left(\pi/6 - 5\pi/3\right)\right]\frac{1}{-i\sqrt{3}} \\
&= i\, 3^{z/2-1/2} e^{-3iz\pi/2}.
\end{aligned}$$

Usando questi risultati si ottiene l'espressione analitica di $f(z)$ come

$$\begin{aligned}
f(z) &= \pi\frac{e^{i\pi z}}{\text{sen}(z\pi)}\left(\text{Res}\left[\left(\frac{1-w}{1+w}\right)^z \frac{1}{w^2+w+1}, w_1\right] + \text{Res}\left[\left(\frac{1-w}{1+w}\right)^z \frac{1}{w^2+w+1}, w_2\right]\right) \\
&= -i\pi\frac{e^{i\pi z}}{\text{sen}(z\pi)} 3^{z/2-1/2}\left(e^{-iz\pi/2} - e^{-3iz\pi/2}\right) \\
&= -i\pi\frac{3^{z/2-1/2}}{\text{sen}(z\pi)}\left(e^{iz\pi/2} - e^{-iz\pi/2}\right) \\
&= -i\pi\frac{3^{z/2-1/2}}{2\text{sen}(z\pi/2)\cos(z\pi/2)} 2i\text{sen}(z\pi/2) \\
f(z) &= \pi\frac{3^{z/2-1/2}}{\cos(z\pi/2)}.
\end{aligned}$$

La funzione, che potremmo riscrivere come

$$f(z) = \frac{\pi}{\sqrt{3}}\frac{e^{z\ln(\sqrt{3})}}{\cos(z\pi/2)},$$

una meromorfa, ha infiniti poli semplici reali nei dispari positivi e negativi, ovvero ha come dominio di analiticit l'insieme

$$D = \{z : z \neq 2k+1\,, k \in \mathbb{Z}\}\,.$$

Secondo problema (punteggio 6/30)

Si calcoli il residuo all'infinito della funzione polidroma

$$g(z) = \frac{z^4\sqrt{1-z^2}}{z^2+z+1}\,.$$

$\sqrt{x-1} = i - \frac{i}{2}x - \frac{i}{8}x^2 - \frac{i}{16}x^3 + O(x^4)$

Soluzione del secondo problema

Il residuo all'infinito della funzione $g(z)$ coincide con quello nell'origine della funzione $\tilde{g}(w) = -g(1/w)/w^2$, ovvero

$$\text{Res}\left[g(z), z=\infty\right] = \text{Res}\left[\tilde{g}(w), w=0\right] = -\frac{1}{2i\pi}\oint_{\gamma_0} \frac{1/w^4\sqrt{1-1/w^2}}{1/w^2+1/w+1}\frac{dw}{w^2} = -\frac{1}{2i\pi}\oint_{\gamma_0}\frac{\sqrt{w^2-1}}{w^5(1+w+w^2)}dw\,,$$

l'integranda ha un polo di ordine 5 nell'origine e due poli semplici in $w_{1,2} = e^{\pm i\pi/3}$. I punti di diramazione sono in $w = \pm 1$. Scegliendo, per le funzioni $(w\pm 1)$, che rappresentano i fattori sotto radice, le fasi come

$$w \pm 1 = |w\pm 1| e^{i\theta_{1,2}}\,, \qquad \begin{array}{l}\theta_1 \in (-\pi, \pi) \\ \theta_2 \in (0, 2\pi)\end{array}$$

si ha il taglio $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ e la funzione   analitica in un intorno dell'origine, ne consegue che l'integrale

$$\text{Res}\left[g(z), z=\infty\right] = -\frac{1}{2i\pi}\oint_{\gamma_0}\frac{\sqrt{w^2-1}}{w^5(1+w+w^2)}dw = -\frac{1}{4!}\left.\frac{d^4}{dw^4}\frac{\sqrt{w^2-1}}{1+w+w^2}\right|_{w=0}\,.$$

Il calcolo della derivata quarto   piuttosto complesso,   preferibile usare gli sviluppi in serie noti.
Partiamo da quello della radice $\sqrt{w^2-1}$, nell'origine, che possiamo dedurre da quello della funzione $\sqrt{x-1}$. Le derivate sono:

$$\begin{aligned}
\frac{d^0}{dx^0}(x-1)^{1/2} &= (x-1)^{1/2} \\
\frac{d}{dx}(x-1)^{1/2} &= \frac{1}{2}(x-1)^{-1/2} \\
\frac{d^2}{dx^2}(x-1)^{1/2} &= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)(x-1)^{-3/2} \\
\frac{d^3}{dx^3}(x-1)^{1/2} &= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)(x-1)^{-5/2} \\
\cdots \quad & \quad \cdots \\
\frac{d^n}{dx^n}(x-1)^{1/2} &= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2n-3}{2}\right)(x-1)^{-(2n-1)/2} \\
&= (-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{2^n}(x-1)^{-n+1/2}\,, \qquad n \geq 2\,.
\end{aligned}$$

I cui valori nell'origine sono

$$\left.\frac{d^0}{dx^0}(x-1)^{1/2}\right|_{x=0} = (-1)^{1/2} = i$$
$$\left.\frac{d}{dx}(x-1)^{1/2}\right|_{x=0} = \frac{1}{2}(-1)^{-1/2} = -\frac{i}{2}\,,$$

per le prime due derivate, mentre dalla seconda in poi si ha

$$\left.\frac{d^n}{dx^n}(x-1)^{1/2}\right|_{x=0} = (-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{2^n}(-1)^{-n+1/2} = -\frac{(2n-3)!!}{2^n}(-1)^{1/2} = -\frac{(2n-3)!!}{2^n}\,i\,, \qquad n \geq 2\,.$$

Ne consegue che lo sviluppo di Taylor nell'origine della funzione $\sqrt{w^2-1}$

$$\sqrt{w^2-1} = i - \frac{i}{2}w^2 - \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(2n-3)!!\,i}{2^n\,n!}\,w^{2n} = i - \frac{i}{2}w^2 - \frac{i}{8}w^4 - \frac{i}{16}w^6 + O(w^8)\,.$$

Per l'integranda completa si ha, nell'origine,

$$\begin{aligned}
-\frac{\sqrt{w^2-1}}{w^5(1+w+w^2)} &= -\frac{1}{w^5}\left(i - \frac{i}{2}w^2 - \frac{i}{8}w^4 + \dots\right)\\
&\quad\times\left[1-\left(w+w^2\right)+\left(w+w^2\right)^2-\left(w+w^2\right)^3+\left(w+w^2\right)^4+\dots\right]\\
&= -\frac{1}{w^5}\left(i - \frac{i}{2}w^2 - \frac{i}{8}w^4 + \dots\right)\left(1-w+w^3-w^4+\dots\dots\right),
\end{aligned}$$

consideriamo soli il coefficiente di $1/w$, che coincide con il residuo,

$$-\frac{\sqrt{w^2-1}}{w^5(1+w+w^2)} = -\frac{1}{w^5}\left[\dots + w^4\left(-i-\frac{i}{8}\right)+\dots\right] = \dots + \frac{9i}{8}\frac{1}{w} + \dots\,.$$

Il residuo cercato

$$\mathrm{Res}\left[g(z), z=\infty\right] = \frac{9i}{8}\,.$$

Terzo problema (punteggio 6/30)

Data la funzione

$$f(z) = \frac{1}{e^z-1}\,,$$

si calcolino le parti principali delle sue prime due serie di Laurent centrate nell'origine, ovvero di quelle i cui domini di convergenza hanno superfici minori.

Soluzione del terzo problema

La funzione ha poli semplici nei punti $z_k = 2ik\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$. Le prime due serie di Laurent sono quelle convergenti nelle corone:

$$D_0 = \{z : 0 < |z| < 2\pi\}\,, \qquad D_1 = \{z : 2\pi < |z| < 4\pi\}\,.$$

La corna D_0 avvolge la sola singolarit   nell'origine, mentre D_1 avvolge anche $z_{\pm 1} = \pm 2i\pi$. Nel primo caso possiamo sfruttare lo sviluppo in serie dell'esponenziale come

$$\begin{aligned}
f(z) = \frac{1}{e^z - 1} &= \frac{1}{z + z^2/2! + z^3/3! + \ldots} = \frac{1}{z}\,\frac{1}{1 + z/2! + z^2/3! + \ldots} \\
&= \frac{1}{z}\left[1 - \left(\frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \ldots\right) + \left(\frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \ldots\right)^2 + \ldots\right] \\
&= \frac{1}{z} - \frac{1}{2} + \frac{z}{12} + \ldots\,.
\end{aligned}$$

In questo caso la parte principale   semplicemente $1/z$, come conseguenza della presenza di un polo semplice.
In termini della definizione integrale dei coefficienti di Laurent si ha, per $k < 0$,

$$C_k^{(0)} = \frac{1}{2i\pi}\oint_{|z|=r} \frac{dz}{(e^z - 1)z^{k+1}} = \begin{cases} 1 & k = -1 \\ 0 & k < -1 \end{cases}\,,$$

il percorso di integrazione   una circonferenza centrata nell'origine e contenuta nella corona D_0, ovvero di raggio r, tale che $0 < r < 2\pi$.
Nella corona D_1 avremo, sempre con $k < 0$ e usando il teorema dei residui,

$$\begin{aligned}
C_k^{(1)} = \frac{1}{2i\pi}\oint_{|z|=R} \frac{dz}{(e^z - 1)z^{k+1}} &= \operatorname{Res}\left[\frac{1}{(e^z - 1)z^{k+1}}, z = 0\right]\delta_{k,-1} \\
&+ \operatorname{Res}\left[\frac{1}{(e^z - 1)z^{k+1}}, z = 2i\pi\right] + \operatorname{Res}\left[\frac{1}{(e^z - 1)z^{k+1}}, z = -2i\pi\right]\,,
\end{aligned}$$

con $2\pi < R < 4\pi$. Il residuo nell'origine coincide con il coefficiente k-esimo ottenuto in D_0, cio

$$\operatorname{Res}\left[\frac{1}{(e^z - 1)z^{k+1}}, z = 0\right] = C_k^{(0)}\,.$$

Quelli in $\pm 2i\pi$, poli semplici per l'integranda, sono

$$\operatorname{Res}\left[\frac{1}{(e^z - 1)z^{k+1}}, z = \pm 2i\pi\right] = \frac{1}{(\pm 2i\pi)^{k+1}}\,.$$

Per la somma si ha ($k < 0$)

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}\left[\frac{1}{(e^z - 1)z^{k+1}}, z = 2i\pi\right] + \operatorname{Res}\left[\frac{1}{(e^z - 1)z^{k+1}}, z = -2i\pi\right] &= \frac{1}{(2i\pi)^{k+1}} + \frac{1}{(-2i\pi)^{k+1}} \\
&= \begin{cases} \dfrac{2}{(2i\pi)^{k+1}} = 2(-1)^{\frac{-k-1}{2}}(2\pi)^{-k-1} & \text{se } -k \quad \text{dispari} \\ 0 & \text{se } -k \quad \text{pari} \end{cases}\,.
\end{aligned}$$

In definitiva i coefficienti di Laurent della parte principale sono ($k < 0$)

$$C_k^{(1)} = \begin{cases} 2(-1)^{\frac{-k-1}{2}}(2\pi)^{-k-1} & \text{se } k \le -3 \text{ e } -k \quad \text{dispari} \\ 1 + 2(-1)^{\frac{-k-1}{2}}(2\pi)^{-k-1} = 3 & k = -1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} .$$

Quarto problema (punteggio 6/30)

Si calcoli la sua trasformata di Fourier della funzione

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - w^2}, \qquad \text{con: } w = a + ib, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad b > 0,$$

e, avvalendosi del teorema della convoluzione, si verifichi che la trasformata di Fourier del suo modulo quadro $|f(x)|^2$

$$\mathscr{F}_k\left[|f|^2\right] = \frac{\pi}{8} \frac{e^{-b|k|}}{b^2 + a^2} \left(\frac{\cos(a|k|)}{b} + \frac{\text{sen}(a|k|)}{a} \right).$$

$\mathscr{F}_k[f \cdot g] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathscr{F}_k[f] * \mathscr{F}_k[g]$

Soluzione del quarto problema

La trasformata di Fourier della funzione $f(x)$

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikx}}{x^2 - w^2} dx,$$

si ottiene integrando direttamente, usando il lemma di Jordan e il teorema dei residui.
La funzione integranda ha i due poli semplici $z_{1,2} = \pm w$, che si trovano rispettivamente nel semipiano superiore e inferiore del piano complesso z, quindi

$$\begin{aligned} \tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikx}}{x^2 - w^2} dx &= i\sqrt{2\pi} \left(\text{Res}\left[\frac{e^{-ikz}}{z^2 - w^2}, z = w \right] \theta(-k) - \text{Res}\left[\frac{e^{-ikz}}{z^2 - w^2}, z = -w \right] \theta(k) \right) \\ &= i\sqrt{2\pi} \left(\frac{e^{-ikw}}{2w} \theta(-k) - \frac{e^{ikw}}{-2w} \theta(k) \right) \\ &= i\sqrt{2\pi} \frac{e^{i|k|w}}{2w} \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{i|k|\text{Re}(w) - |k|\text{Im}(w)}}{\text{Im}(w) - i\text{Re}(w)} \equiv \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{i|k|a - |k|b}}{b - ia}, \end{aligned}$$

dove la $\theta(x)$ la funzione a gradino di Heaviside, a e b sono la parte reale e immaginaria di w. Il comportamento asintotico ($|k| \to \infty$) della $\tilde{f}(k)$ determinato dall'esponenziale $e^{-|k|b}$, che, grazie alla condizione $\text{Im}(w) = b > 0$, convergente.
La trasformata di Fourier del modulo quadro pu essere ottenuta con il teorema della convoluzione scrivendo il modulo quadro come prodotto della funzione per il suo complesso coniugato. Si ha quindi

$$\mathscr{F}_k\left[|f|^2\right] = \mathscr{F}_k\left[f(x) f^*(x)\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathscr{F}_k[f] * \mathscr{F}_k[f^*].$$

La trasformata di Fourier della $f^*(x)$ coincide con il complesso coniugato della trasformata delle funzione $f(x)$, infatti, grazie alla simmetria della stessa funzione rispetto allo scambio $x \to -x$, si ha

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}_k\left[f^*\right] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ikx}}{(x^2-w^2)^*}dx\,, \qquad \text{con la sostituzione } x'=-x \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ikx'}}{(x'^2-w^2)^*}dx' \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ikx'}}{x'^2-w^2}dx'\right)^* \\
&= \left(\mathscr{F}_k\left[f\right]\right)^* \\
&= \tilde{f}^*(k)\,.
\end{aligned}$$

In definitiva

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}_k\left[|f|^2\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\tilde{f}(k)*\tilde{f}^*(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{\pi}{2}\,\frac{1}{b^2+a^2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{(ia-b)|k-k'|}\left(e^{(ia-b)|k'|}\right)^*dk' \\
&= \frac{\pi}{8}\,\frac{1}{b^2+a^2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{(ia-b)|k-k'|}e^{(-ia-b)|k'|}dk' \\
&= \frac{\pi}{8}\,\frac{1}{b^2+a^2}\left(\int_{-\infty}^{k}e^{(ia-b)(k-k')}e^{(-ia-b)|k'|}dk'+\int_{k}^{\infty}e^{-(ia-b)(k-k')}e^{(-ia-b)|k'|}dk'\right)\,.
\end{aligned}$$

Nel caso in cui $k>0$, possiamo ulteriormente separare gli integrali

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}_{k>0}\left[|f|^2\right] &= \frac{\pi}{8}\,\frac{1}{b^2+a^2}\left(\int_{-\infty}^{0}e^{(ia-b)(k-k')}e^{(ia+b)k'}dk'+\int_{0}^{k}e^{(ia-b)(k-k')}e^{(-ia-b)k'}dk'+\int_{k}^{\infty}e^{-(ia-b)(k-k')}e^{(-ia-b)k'}dk'\right) \\
&= \frac{\pi}{8}\,\frac{1}{b^2+a^2}\left(e^{(ia-b)k}\int_{-\infty}^{0}e^{2bk'}dk'+e^{(ia-b)k}\int_{0}^{k}e^{-2iak'}dk'+e^{-(ia-b)k}\int_{k}^{\infty}e^{-2bk'}dk'\right) \\
&= \frac{\pi}{8}\,\frac{1}{b^2+a^2}\left(e^{(ia-b)k}\frac{1}{2b}+e^{(ia-b)k}\frac{e^{-2iak}-1}{-2ia}+e^{-(ia-b)k}\frac{-e^{-2bk}}{-2b}\right) \\
&= \frac{\pi}{8}\,\frac{1}{b^2+a^2}\left(e^{-bk}\frac{e^{iak}}{2b}+e^{-bk}\frac{e^{-iak}-e^{iak}}{-2ia}+e^{-bk}\frac{e^{-iak}}{2b}\right) \\
&= \frac{\pi}{8}\,\frac{e^{-bk}}{b^2+a^2}\left(\frac{\cos(ak)}{b}+\frac{\mathrm{sen}(ak)}{a}\right)\,,
\end{aligned}$$

Per valori negativi di k avremo

$$
\begin{aligned}
\mathscr{F}_{k<0}\left[|f|^2\right] &= \frac{\pi}{8}\,\frac{1}{b^2+a^2}\left(\int_{-\infty}^{k} e^{(ia-b)(k-k')}e^{(ia+b)k'}dk' + \int_{k}^{0} e^{-(ia-b)(k-k')}e^{(ia+b)k'}dk' + \int_{0}^{\infty} e^{-(ia-b)(k-k')}e^{(-ia-b)k'}dk'\right)\\
&= \frac{\pi}{8}\,\frac{1}{b^2+a^2}\left(e^{(ia-b)k}\int_{-\infty}^{k} e^{2bk'}dk' + e^{-(ia-b)k}\int_{k}^{0} e^{2iak'}dk' + e^{-(ia-b)k}\int_{0}^{\infty} e^{-2bk'}dk'\right)\\
&= \frac{\pi}{8}\,\frac{1}{b^2+a^2}\left(e^{(ia-b)k}\frac{e^{2bk}}{2b} + e^{-(ia-b)k}\frac{1-e^{2iak}}{2ia} + e^{-(ia-b)k}\frac{-1}{-2b}\right)\\
&= \frac{\pi}{8}\,\frac{1}{b^2+a^2}\left(e^{bk}\frac{e^{iak}}{2b} + e^{bk}\frac{e^{-iak}-e^{iak}}{2ia} + e^{bk}\frac{e^{-iak}}{2b}\right)\\
&= \frac{\pi}{8}\,\frac{e^{bk}}{b^2+a^2}\left(\frac{\cos(ak)}{b} - \frac{\operatorname{sen}(ak)}{a}\right),
\end{aligned}
$$

unendo i due risultati, sfruttando l'antisimmetria della funzione seno e la simmetria del coseno, si ha

$$
\mathscr{F}_{k}\left[|f|^2\right] = \frac{\pi}{8}\,\frac{e^{-b|k|}}{b^2+a^2}\left(\frac{\cos(a|k|)}{b} + \frac{\operatorname{sen}(a|k|)}{a}\right).
$$

Quinto problema (punteggio 7/30)

In uno spazio di Hilbert E_N, di dimensione finita $N>1$,   definito l'operatore lineare $\hat{A}$, per cui si hanno

$$
\left(\hat{A}-\alpha\hat{I}\right)^N = \hat{0}\,, \qquad \left(\hat{A}-\alpha\hat{I}\right)^n \neq \hat{0}\,, \qquad \forall\, n<N\,,
$$

dove $\hat{0}$ l'operatore nullo, ovvero $\hat{0}$ tale che: $\forall\,|a\rangle \in E_N$ si ha $\hat{0}|a\rangle = |0\rangle$.
Si dimostri che esiste un vettore $|a_1\rangle \in E_N$ tale che

$$
\left(\hat{A}-\alpha\hat{I}\right)^n|a_1\rangle \neq |0\rangle\,, \qquad \forall\, n\in\mathbb{N},\ n<N\,,
$$

e inoltre che i vettori dell'insieme $\{|a_k\rangle\}_{k=1}^N$, dove gli ultimi $N-1$ sono definiti dalla legge ricorsiva

$$
|a_k\rangle = (\hat{A}-\alpha\hat{I})|a_{k-1}\rangle\,, \qquad k=2,3,\ldots,N\,,
$$

sono linearmente indipendenti. Si ottenga, infine, la rappresentazione matriciale di $\hat{A}$ rispetto alla base $\{|a_k\rangle\}_{k=1}^N$ nell'ipotesi che sia ortonormale.

$A^k_m = \langle a_k|\hat{A}|a_m\rangle$

Soluzione del quinto problema

Per dimostrare l'esistenza del vettore $|a_1\rangle$, assumiamo per assurdo che non esista. In questo caso si deve avere che: $\forall\,|b\rangle \in E_N$, $\exists\, m\in\mathbb{N}$ con $m<N$, tale che

$$
(\hat{A}-\alpha\hat{I})^m|b\rangle = |0\rangle\,,
$$

il che implica la stessa equazione per tutte le potenze successive fino alla $(N-1)$-esima, cio

$$
(\hat{A}-\alpha\hat{I})^n|b\rangle = (\hat{A}-\alpha\hat{I})^{n-m}(\hat{A}-\alpha\hat{I})^m|b\rangle = (\hat{A}-\alpha\hat{I})^{n-m}|0\rangle = |0\rangle\,, \qquad n=m,m+1,\ldots,N-1\,.
$$

Per l'arbitrariet di $|b\rangle$, ci equivale ad affermare che si ha l'identit operatoriale

$$
(\hat{A}-\alpha\hat{I})^n = \hat{0}\,, \qquad n=m,m+1,\ldots,N-1\,,
$$

in contraddizione con l'asserto che afferma la validit di questa identit solo per la potenza N-esima. Deve, quindi, esistere almeno un vettore, che chiameremo $|a_1\rangle$, tale che

$$(\hat{A}-\alpha\,\hat{I})^m|a_1\rangle \neq |0\rangle\,, \qquad \forall\, m\in\mathbb{N}\,,\ m<N\,.$$

Definiamo l'insieme $\{|a_k\rangle\}_{k=1}^N$, come dato dal problema, ovvero

$$|a_k\rangle = (\hat{A}-\alpha\,\hat{I})^{k-1}|a_1\rangle\,, \qquad k=1,2,\ldots,N\,.$$

Per dimostrare che questi vettori sono linearmente indipendenti, ne prendiamo una combinazione coincidente con il vettore nullo e dimostriamo che ci implica che la combinazione quella banale. Scegliamo, quindi, l'insieme di coefficienti $\{c_k\}_{k=1}^N \subset \mathbb{C}$, in modo tale che

$$|0\rangle = \sum_{k=1}^{N} c_k|a_k\rangle\,,$$

usando la definizione dei vettori $|a_k\rangle$ si ha

$$|0\rangle = \sum_{k=1}^{N} c_k(\hat{A}-\alpha\,\hat{I})^{k-1}|a_1\rangle = c_1|a_1\rangle + c_2(\hat{A}-\alpha\,\hat{I})|a_1\rangle + c_3(\hat{A}-\alpha\,\hat{I})^2|a_1\rangle + \ldots + c_N(\hat{A}-\alpha\,\hat{I})^{N-1}|a_1\rangle\,.$$

Applichiamo su ambo i membri l'operatore $(\hat{A}-\alpha\hat{I})^{N-1}$

$$\begin{aligned}|0\rangle = (\hat{A}-\alpha\hat{I})^{N-1}|0\rangle &= c_1(\hat{A}-\alpha\hat{I})^{N-1}|a_1\rangle + c_2(\hat{A}-\alpha\,\hat{I})^{N}|a_1\rangle + c_3(\hat{A}-\alpha\,\hat{I})^{N+1}|a_1\rangle + \ldots + c_N(\hat{A}-\alpha\,\hat{I})^{2N-2}|a_1\rangle\\ &= c_1(\hat{A}-\alpha\hat{I})^{N-1}|a_1\rangle\\ &= c_1|a_N\rangle \qquad \Longrightarrow \qquad c_1 = 0\,.\end{aligned}$$

Tutti gli operatori ottenuti elevando alla potenza N o a una potenza superiore l'operatore $(\hat{A}-\alpha\,\hat{I})$ coincidono con l'operatore nullo, per cui rimane solo il primo termine. Inoltre, avendo che $|a_N\rangle \neq |0\rangle$, il primo coefficiente c_1 deve essere nullo.
Ripetiamo la procedura, applicando questa volta $(\hat{A}-\alpha\hat{I})^{N-2}$, avremo

$$\begin{aligned}|0\rangle = (\hat{A}-\alpha\hat{I})^{N-2}|0\rangle &= c_2(\hat{A}-\alpha\,\hat{I})^{N-1}|a_1\rangle + c_3(\hat{A}-\alpha\,\hat{I})^{N}|a_1\rangle + \ldots + c_N(\hat{A}-\alpha\,\hat{I})^{2N-3}|a_1\rangle\\ &= c_2(\hat{A}-\alpha\hat{I})^{N-1}|a_1\rangle\\ &= c_2|a_N\rangle \qquad \Longrightarrow \qquad c_2 = 0\,.\end{aligned}$$

Il che significa che applicando $(\hat{A}-\alpha\,\hat{I})^{N-m}$, con $m<N$, si ottiene l'annullamento del coefficiente c_m. Basta arrivare al coefficiente $(N-1)$-esimo, infatti una volta dimostrato che: $c_k=0$ per $k=1,2,\ldots,N-1$, rimane l'equazione

$$|0\rangle = c_n|a_N\rangle\,,$$

che implica banalmente $c_N=0$. Ne consegue che la combinazione quella banale e i vettori dell'insieme $\{|a_k\rangle\}_{k=1}^N$ sono linearmente indipendenti.
Assumiamo, come richiesto dal problema, che i vettori dell'insieme $\{|a_k\rangle\}_{k=1}^N$ siano anche ortonormali e otteniamo, rispetto ad essi, la rappresentazione dell'operatore $\hat{A}$. Partiamo da quella dell'operatore $(\hat{A}-\alpha\,\hat{I})$, il cui elemento di matrice ^m_k, con $m=1,2,\ldots,N$ e $k=1,2,\ldots,N-1$, si ottiene sfruttando la definizione degli stessi vettori $|a_k\rangle$, cio

$$A^m_k - \alpha\delta^m_k = \langle a_m|(\hat{A}-\alpha\,\hat{I})|a_k\rangle = \langle a_m|a_{k+1}\rangle = \delta^m_{k+1}\,,$$

mentre l'ultima colonna, ovvero gli elementi con $k=N$, sono tutti nulli, essendo nullo l'operatore $(\hat{A}-\alpha\,\hat{I})^N$, cio , per $m=1,2,\ldots,N$, si ha

$$A^m_N - \alpha\delta^m_N = \langle a_m|(\hat{A}-\alpha\,\hat{I})|a_N\rangle = \langle a_m|(\hat{A}-\alpha\,\hat{I})^N|a_1\rangle = \langle a_m|0\rangle = 0\,.$$

Possiamo riscrivere con una legge unica l'espressione per l'elemento della matrice A come

$$A^m_k = \delta^m_{k+1} + \alpha\,\delta^m_k\,, \qquad m,k = 1,2,\dots,N\,,$$

ovvero

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \alpha & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Sesto problema (punteggio 6/30)

Sia $\hat{H}$ un operatore hermitiano e limitato in uno spazio di Hilbert E_N di dimensione finita $N \in \mathbb{N}$, con determinante non nullo e con autovalori $\{\alpha_k\}_{k=1}^N$, si dimostri che

$$\hat{O} = \prod_{k=1}^{N} \left(\alpha_k \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2 \hat{H}^2} dx - \hat{I} \right)$$

l'operatore nullo.
Si verifichi l'identit precedente nel caso di un operatore $\hat{H}$, definito in E_3 e rappresentato, rispetto alla base canonica, dalla matrice

$$H = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Soluzione del sesto Problema

L'operatore hermitiano e quindi normale, ammette un insieme di autovettori ortonormali $\{|u_k\rangle\}_{k=1}^N$, con autovalori $\{\alpha_k\}_{k=1}^N$, ovvero si hanno le equazioni agli autovalori

$$\hat{H}|u_k\rangle = \alpha_k |u_k\rangle\,, \qquad k = 1,2,\dots,N\,.$$

Ovviamente l'insieme $\{|u_k\rangle\}_{k=1}^N$ rappresenta una base ortonormale dello spazio E_N. Ne consegue che, $\forall\, |a\rangle \in E_N$, si ha la decomposizione

$$|a\rangle = a^k |u_k\rangle\,, \qquad \text{con: } a^k = \langle u_k|a\rangle\,.$$

Inoltre, dalla condizione $\det(\hat{H}) \neq 0$, si ha che l'operatore non ha l'autovalore nullo. Per il teorema spettrale l'operatore

$$\hat{P} = P(\hat{H}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2 \hat{H}^2} dx\,,$$

dove $P(y)$ la funzione

$$P(y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2 y^2} dx = \frac{1}{y}\,,$$

ha gli stessi autovettori $\{|u_k\rangle\}_{k=1}^N$ di $\hat{H}$ e autovalori $\{P(\alpha_k) = 1/\alpha_k\}_{k=1}^N$, quindi

$$\hat{P} = P(\hat{H}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2 \hat{H}^2} dx = \hat{H}^{-1} .$$

Alla luce di questo risultato l'operatore $\hat{O}$ pu   scritto come

$$\hat{O} = \prod_{k=1}^{N} \left(\alpha_k \hat{H}^{-1} - \hat{I} \right) .$$

Applicandolo su un vettore generico $|a\rangle = a^j |u_j\rangle$, si ha

$$\hat{O}|a\rangle = \prod_{k=1}^{N} \left(\alpha_k \hat{H}^{-1} - \hat{I} \right) |a\rangle = \prod_{k=1}^{N} \left(\alpha_k \hat{H}^{-1} - \hat{I} \right) a^j |u_j\rangle = a^j \prod_{k=1}^{N} \left(\alpha_k \alpha_j^{-1} - 1 \right) |u_j\rangle = |0\rangle .$$

Si ottiene il vettore nullo poich   il j-esimo fattore di ogni prodotto   nullo,   quindi nullo ogni termine della somma sottintesa in j.
Gli autovalori della matrice data sono le soluzioni dell'equazione secolare

$$\det \begin{pmatrix} 1-\alpha & -1 & 1 \\ -1 & 1-\alpha & 1 \\ 1 & 1 & -1-\alpha \end{pmatrix} = 0$$
$$(1-\alpha)(\alpha^2 - 4) = 0 ,$$

da cui si hanno

$$\alpha_1 = 1 , \qquad \alpha_2 = -2 , \qquad \alpha_3 = 2 .$$

Gli autovettori corrispondenti sono

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} , \qquad u_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} , \qquad u_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

e quindi la matrice unitaria diagonalizzante

$$U = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0 \end{pmatrix} .$$

Non   necessario usare la matrice U,   sufficiente considerare le sole rappresentazioni diagonali.
Partendo da quella dell'operatore $\hat{P}$, che   l'inverso di $\hat{H}$,

$$P_d = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2 H_d^2} dx = H_d^{-1} = \text{diag}(1, -1/2, 1/2) .$$

si ottiene che quella dell'operatore $\hat{O}$ nulla, infatti

$$\begin{aligned} O_d &= \prod_{k=1}^{3} \Big[\alpha_k \text{diag}(1, -1/2, 1/2) - \text{diag}(1,1,1) \Big] \\ &= \Big[\text{diag}(1,-1/2,1/2) - \text{diag}(1,1,1) \Big] \Big[\text{diag}(-2,1,-1) - \text{diag}(1,1,1) \Big] \Big[\text{diag}(2,-1,1) - \text{diag}(1,1,1) \Big] \\ &= \text{diag}(0,-3/2,-1/2) \text{diag}(-3,0,-2) \text{diag}(1,-2,0) \\ &= \text{diag}(0,0,0) . \end{aligned}$$

A questo punto   banale verificare che $O = U O_d U^\dagger$ non pu   che essere la matrice nulla, quindi $\hat{O}$ l'operatore nullo.