Metodi Matematici per la Fisica

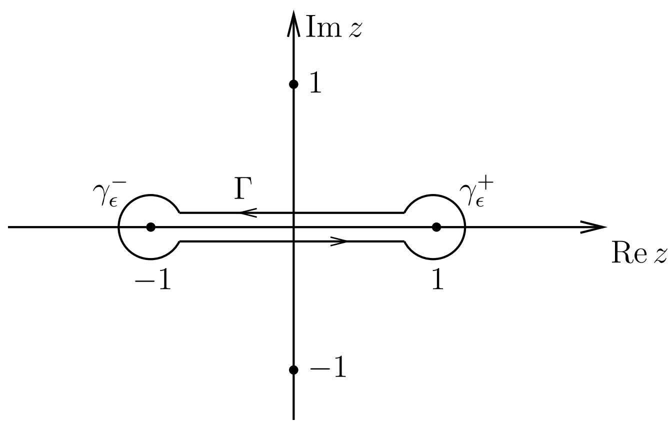
Prova scritta - 26 Luglio 2011

Esercizio 1 (4 punti)
Usando il teorema dei residui si calcoli l'integrale

$$I = \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{(x^2 - 2x + 5)\sqrt{1 - x^2}} \,.$$

. . . .

Soluzione
Si considera il cammino Γ che circonda il segmento reale $[-1, 1]$ come mostrato in figura. I contributi sugli archetti centrati in -1 ed 1 sono infinitesimi al tendere a zero del raggio.



Infatti, posto

$$f(z) = \frac{1}{(z^2 - 2z + 5)\sqrt{1 - z^2}} \,,$$

si ha che, indicando con $\gamma_\epsilon^\pm$ l'archetto di raggio ϵ centrato in $z = \pm 1$, il limite della funzione $(z \mp 1) f(z)$ su tale archetto al tendere a zero del raggio è

$$\lim_{\epsilon \to 0} (z \mp 1) f(z) = \lim_{z \to \pm 1} \frac{\sqrt{1 \mp z}}{(z^2 - 2z + 5)\sqrt{1 \pm z}} \overset{\text{unif.}}{=} 0 \,,$$

da cui il limite dell'integrale

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{\gamma_\epsilon^\pm} f(z) dz = 0 \,.$$

Si ottiene quindi che

$$\begin{aligned} J = \lim_{\epsilon \to 0^+} \oint_\Gamma f(z) dz &= \lim_{\epsilon \to 0^+} \left(\int_{1+i\epsilon}^{-1+i\epsilon} f(z) dz + \int_{-1-i\epsilon}^{1-i\epsilon} f(z) dz + \int_{\gamma^-} f(z) dz + \int_{\gamma^+} f(z) dz \right) \\ &= \lim_{\epsilon \to 0^+} \left(\int_{1+i\epsilon}^{-1+i\epsilon} f(z) dz + \int_{-1-i\epsilon}^{1-i\epsilon} f(z) dz \right) \,. \end{aligned}$$

Ma J è anche uguale a l'opposto della somma dei residui esterni

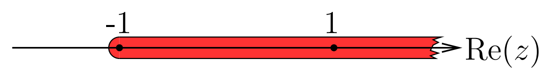
$$J = -2\pi i \sum_{z_k \text{ esterni}} \text{Res}\left[f(z), z_k\right] .$$

I poli sono:

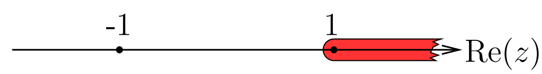
$$z_{1,2} = 1 \pm 2\, i\, ,$$

sono entrambi semplici ed esterni al percorso Γ. Al fine di ottenere un valore non nullo è necessario definire la funzione $f(z)$ in modo che abbia una discontinuità nell'intervallo reale $[-1, 1]$. La funzione $f(z)$ è polidroma, i punti di diramazione al finito sono $z = -1$ e $z = 1$, scegliendo la rappresentazione dell'argomento della radice è possibile definire il taglio in modo che coincida con l'intervallo d'integrazione, ovvero $[-1, 1]$. Se il taglio fosse definito altrimenti e la funzione risultasse quindi analitica per $z \in [-1, 1]$ non potremmo applicare questa procedura. Studiamo l'argomento della radice $1 - z^2 = r_-(z) r_+(z)$, definendo i due fattori come

$$r_-(z) = 1 + z = |1 + z| e^{i\theta_-} \qquad \theta_- \in (0, 2\pi)\, ,$$



$$r_+(z) = 1 - z = |1 - z| e^{i\theta_+} \qquad \theta_+ \in (-\pi, \pi)\, ,$$



responsabili rispettivamente della polidromia in $z = -1$ e $z = 1$. Il taglio che si origina da $z = -1$ è in avanti, come mostrato nella prima figura, così come quello che si origina dal punto $z = 1$, seconda figura. Nel secondo caso, però, la fase è scelta tenendo conto del fatto che la z compare nell'espressione di $r_+(z)$ con il segno meno. Queste rappresentazioni fanno sì che il taglio risultante sia solo in $[-1, 1]$, infatti per valori reali minori di -1 non ci sono tagli, mentre al di sopra di 1 ce ne sono due che però si cancellano.
In particolare, sopra il taglio, ovvero per $z = x + i\epsilon$, con $x \in [-1, 1]$ e $\epsilon \to 0^+$ si ha

$$\left.\begin{aligned} r_-(z) &= |1 + z| e^{i\epsilon} = 1 + x \\[2ex] r_+(z) &= |1 - z| e^{-i\epsilon} = 1 - x \end{aligned}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{1 - z^2} = \sqrt{1 - x^2}\, ,$$

sotto, per $z = x - i\epsilon$, con $x \in [-1, 1]$ e $\epsilon \to 0^+$,

$$\left.\begin{aligned} r_-(z) &= |1 + z| e^{i(2\pi - \epsilon)} = (1 + x) e^{2i\pi} \\[2ex] r_+(z) &= |1 - z| e^{i\epsilon} = 1 - x \end{aligned}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{1 - z^2} = \sqrt{1 - x^2}\, e^{i\pi} = -\sqrt{1 - x^2}\, .$$

Gli integrali della funzione $f(z)$ sui tratti rettilinei sono uguali tra loro e pari all'opposto dell'integrale I che si vuole calcolare, infatti

$$\begin{aligned} \int_{1+i\epsilon}^{-1+i\epsilon} \frac{dz}{(z^2 - 2z + 5)\sqrt{1 - z^2}} &= \int_1^{-1} \frac{dx}{(x^2 - 2x + 5)\sqrt{1 - x^2}} \\ &= -\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(x^2 - 2x + 5)\sqrt{1 - x^2}} = -I\, , \\ \int_{-1-i\epsilon}^{1-i\epsilon} \frac{dz}{(z^2 - 2z + 5)\sqrt{1 - z^2}} &= -\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(x^2 - 2x + 5)\sqrt{1 - x^2}} = -I\, . \end{aligned} \tag{1}$$

Quindi

$$I = -\frac{1}{2} J = i\pi \sum_{k=1}^{2} \text{Res}\left[f(z), z_k\right].$$

Per calcolare i residui dobbiamo utilizzare la rappresentazione scelta. Si ha in generale che

$$\text{Res}\left[f(z), z_{1,2}\right] = \lim_{z \to z_{1,2}} (z - z_{1,2}) f(z) = \frac{1}{(z_{1,2} - z_{2,1})\sqrt{1 - z_{1,2}^2}} = \frac{1}{\pm 4i \sqrt{1 - z_{1,2}^2}},$$

tale valore dipende da quello della radice a denominatore. Nel caso di $z_1 = 1 + 2i$

$$\sqrt{1 - z_1^2} = \sqrt{\underbrace{(1 + z_1)}_{r_-(z_1)} \underbrace{(1 - z_1)}_{r_+(z_1)}} = \sqrt{2(1+i)(-2i)} = \sqrt{2|1+i||-2i|} e^{\frac{i(\theta_- + \theta_+)}{2}} = 2^{\frac{5}{4}} e^{\frac{i(\theta_- + \theta_+)}{2}},$$

poiché $r_-(z_1) = 2(1+i)$ appartiene al primo quadrante, la fase che deve variare tra 0 e 2π è $\theta_- = \pi/4$, mentre $r_+(z_1) = -2i$ si trova sul semiasse immaginario negativo, la fase θ_+, definita nell'intervallo $(-\pi, \pi)$, sarà $\theta_+ = -\pi/2$,

$$\sqrt{1 - z_1^2} = 2^{\frac{5}{4}} e^{-\frac{i\pi}{8}}.$$

Usando gli stessi argomenti avremo per $z_2 = 1 - 2i$,

$$\sqrt{1 - z_2^2} = \sqrt{\underbrace{(1 + z_2)}_{r_-(z_2)} \underbrace{(1 - z_2)}_{r_+(z_2)}} = \sqrt{2(1-i)(2i)} = \sqrt{2|1-i||2i|} e^{\frac{i(\theta_- + \theta_+)}{2}} = 2^{\frac{5}{4}} e^{\frac{i(\theta_- + \theta_+)}{2}},$$

la fase $\theta_- \in (0, 2\pi)$ di $2(1-i)$ è $\theta_- = 7\pi/4$, mentre $\theta_+ \in (-\pi, \pi)$ di $(2i)$ è $\theta_+ = \pi/2$, ne consegue che

$$\sqrt{1 - z_2^2} = 2^{\frac{5}{4}} e^{\frac{9i\pi}{8}}.$$

Quindi il risultato finale è

$$I = i\pi \sum_{k=1}^{2} \text{Res}\left[f(z), z_k\right] = \frac{\pi}{4} \frac{e^{i\pi/8} - e^{-9i\pi/8}}{2^{\frac{5}{4}}} = \frac{\pi e}{2^{9/4}} e^{-i\pi/2} \frac{e^{5i\pi/8} - e^{-5i\pi/8}}{2} = \frac{\pi}{2^{9/4}} \sin(5\pi/8)$$

. . . .

Esercizio 2 (6 punti)
Si calcoli l'integrale

$$P = \int_{|z|=\rho} z^{\sqrt{z}} \frac{\log z + 2}{2\sqrt{z}} dz,$$

considerando il ramo principale delle funzioni polidrome.

. . . .

Si parte osservando che

$$\frac{d}{dz} z^{\sqrt{z}} = \frac{d}{dz} e^{\sqrt{z}\ln z} = \left(\frac{\ln z}{2\sqrt{z}} + \frac{1}{\sqrt{z}} \right) z^{\sqrt{z}} = z^{\sqrt{z}} \, \frac{\log z + 2}{2\sqrt{z}} \, .$$

Il cammino d'integrazione è una circonferenza centrata nell'origine di raggio ρ. In rappresentazione principale sia per il logaritmo che per la radice si ha $z = |z|e^{i\theta}$, con$\theta \in (-\pi, \pi)$, quindi i tagli coincidono con il semiasse negativo.
Detta $F(z) = z^{\sqrt{z}}$ la primitiva, l'integrale può essere ottenuto come differenza tra il valore della stessa primitiva sopra, $\theta = \pi$, e quello sotto il taglio, $\theta = -\pi$, ovvero si ha

$$\begin{aligned} F(\rho e^{i\pi}) - F(\rho e^{-i\pi}) &= \exp[\sqrt{\rho}\, i\,(\ln\rho + i\pi)] - \exp[-\sqrt{\rho}\, i\,(\ln\rho - i\pi)] \\ &= e^{-\pi\sqrt{\rho}} \left[e^{i\sqrt{\rho}\ln\rho} - e^{-i\sqrt{\rho}\ln\rho} \right] \\ &= 2\, i\, e^{-\pi\sqrt{\rho}} \sin(\sqrt{\rho}\ln\rho)\, . \end{aligned}$$

. . . .

Esercizio 3 (4 punti)
Si calcoli lo sviluppo di Laurent della funzione

$$f(z) = \frac{1}{z(z^2+2)}$$

intorno al punto $z_0 = 0$, nelle due regioni: $0 < |z| < \sqrt{2}$ e $\sqrt{2} < |z| < \infty$.

. . . .

Nella corona circolare $0 < |z| < \sqrt{2}$ possiamo riscrive la $f(z)$ come

$$f(z) = \frac{1}{2z} \, \frac{1}{1 + z^2/2} \, ,$$

con $0 < |z^2/2| = |z|^2/2 < 1$. Usando la serie geometrica

$$\frac{1}{1+y} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n y^n \, , \qquad\qquad \text{per: } |y| < 1 \, ,$$

si ha

$$\frac{1}{1+z^2/2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z^2/2)^n \, .$$

Lo sviluppo completo è:

$$f(z) = \frac{1}{2z} \, \frac{1}{1+z^2/2} = \frac{1}{2z} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z^2/2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} \, z^{2n-1} = \sum_{k=-1}^{\infty} c_k z^k \, ,$$

i coefficienti di Laurent c_k sono definiti come

$$c_k = \begin{cases} \dfrac{(-1)^n}{2^{n+1}} & k = 2n-1\,,\, n \geq 0 \\ \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \, .$$

Analogamente, nella corona $\sqrt{2} < |z| < \infty$, poniamo

$$f(z) = \frac{1}{z^3} \frac{1}{1 + 2/z^2} \,,$$

avendo $0 < |2/z^2| = 2/|z^2| < 1$, si ha la serie geometrica

$$\frac{1}{1+2/z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2/z^2)^n \,,$$

e quindi la serie di Laurent

$$f(z) = \frac{1}{z^3} \frac{1}{1+2/z^2} = \frac{1}{z^3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2/z^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{z^{2n+3}} = \sum_{k=-\infty}^{-3} d_k z^k \,,$$

i coefficienti d_k sono definiti come

$$d_k = \begin{cases} (-2)^n & k = -2n-3 \,, n \geq 0 \\ \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \,.$$

. . . .

Esercizio 4 (4 punti)
Per quali valori di $z \in \mathbb{C}$ la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{z^k}{k!} + \frac{(k+1)^2}{z^k} \right]$$

converge?

. . . .

La condizione si ottiene richiedendo la convergenza simultanea delle due serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \,, \qquad\qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)^2}{z^k} \,.$$

La prima è semplicemente e^z e ha raggio di convergenza infinito. La seconda, invece, facendo la sostituzione $w = 1/z$, può essere scritta come serie di potenze positive, infatti

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^2 w^k \,.$$

Il raggio di convergenza R può essere determinato con la formula di Cauchy-Hadamard

$$R^{-1} = \limsup_{k \to \infty} |k+1|^{2/k} = \lim_{k \to \infty} e^{2 \ln(k+1)/k} = e^0 = 1 \,.$$

Per concludere, se la seconda serie converge per $|w| < 1$, quindi $|z| > 1$, la serie composta converge nella corona: $1 < |z| < \infty$.

Esercizio 5 (6 punti)

Siano $\hat{L}_x$, $\hat{L}_y$ e $\hat{L}_z$ le componenti dell'operatore momento angolare $\hat{\vec{L}}$. Si consideri la loro rappresentazione matriciale:

$$L_x = \hbar \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}, \quad L_y = \hbar \begin{pmatrix} 0 & \frac{-i}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-i}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}, \quad L_z = \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Si trovino gli autovalori e i corrispondenti autostati di L_z.
2. Si dimostri che i tre operatori non ammettono un insieme di autostati comuni.
3. Si trovino gli autostati di L_x e L_y.

. . . .

Soluzione

- La matrice L_z è già diagonale ciò significa che gli autovalori sono

$$\zeta_1 = \hbar\,, \qquad \zeta_2 = 0\,, \qquad \zeta_3 = -\hbar\,,$$

  e i corrispondenti autovettori

$$z_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad z_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad z_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- Le tre matrici sono hermitiane e quindi normali. Per dimostrare che non ammettono insiemi di autostati comuni dobbiamo verificare che i tre commutatori siano non nulli

$$\begin{aligned}[L_x, L_y] &= \hbar^2 \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{-i}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-i}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} - \hbar^2 \begin{pmatrix} 0 & \frac{-i}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-i}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \hbar^2 \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[L_x, L_z] &= \hbar^2 \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} - \hbar^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \hbar^2 \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
[L_y, L_z] &= \hbar^2 \begin{pmatrix} 0 & \frac{-i}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-i}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} - \hbar^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{-i}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-i}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \\
&= \hbar^2 \begin{pmatrix} 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} .
\end{aligned}
$$

- Gli autovalori di L_x si ottengono come soluzioni dell'equazione secolare

  $$0 = \det(L_x - \xi I) = \hbar^3 \xi (1 - \xi^2)$$

  si hanno

  $$\xi_1 = -\hbar\,, \qquad \xi_2 = 0\,, \qquad \xi_3 = \hbar\,.$$

  Gli autovalori sono

  $$x_1 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/\sqrt{2} \\ 1/2 \end{pmatrix}, \qquad x_2 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \qquad x_3 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

  Gli autovalori di L_y si ottengono come soluzioni dell'equazione secolare

  $$0 = \det(L_y - \gamma I) = \hbar^3 \gamma (1 - \gamma^2)$$

  si hanno

  $$\gamma_1 = -\hbar\,, \qquad \gamma_2 = 0\,, \qquad \gamma_3 = \hbar\,.$$

  Gli autovalori sono

  $$y_1 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ i/\sqrt{2} \\ 1/2 \end{pmatrix}, \qquad y_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \qquad y_3 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -i/\sqrt{2} \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

....

Esercizio 6 (6 punti)
Risolvere l'equazione differenziale

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \omega_0^2 u = f(t)\,, \qquad \text{con: } f(t) = A\cos(\omega t)\,, \quad \omega \neq \omega_0\,,$$

con le condizioni al contorno:

$$u(0) = \frac{du}{dt}(0) = 0\,,$$

usando il metodo delle trasformate di Fourier.

....

La trasformata di Fourier (TF) dell'equazione è

$$(-k^2+\omega_0^2)\tilde{u}(k)=\tilde{f}(k)\,,$$

dove $\tilde{f}(k)$ e $\tilde{u}(k)$ sono le TF delle funzioni $f(t)$ ed $u(t)$ rispettivamente. La TF $\tilde{f}(k)$ si ottiene in termini della funzione delta di Dirac ed è:

$$\tilde{f}(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ikt}f(t)dt=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,A\big[\delta(k+\omega)+\delta(k-\omega)\big]\,.$$

La soluzione particolare sarà

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,A\int_{-\infty}^{\infty}e^{ikt}\frac{\big[\delta(k+\omega)+\delta(k-\omega)\big]}{-k^2+\omega_0^2}dk \\ &= \frac{A}{2}\,\frac{e^{-i\omega t}+e^{i\omega t}}{-\omega^2+\omega_0^2}=A\frac{\cos(\omega t)}{-\omega^2+\omega_0^2}\,. \end{aligned}$$

Questa soluzione particolare dell'equazione differenziale non verifica le condizioni al contorno e quindi non è soluzione del problema, infatti

$$\begin{aligned} u(0) &= \frac{A}{-\omega^2+\omega_0^2}\neq 0 \\ u'(0) &= A\frac{-\omega\sin(\omega t)}{-\omega^2+\omega_0^2}\bigg|_{t=0}=0\,, \end{aligned}$$

Consideriamo l'equazione omogenea:

$$\frac{d^2u_0}{dt^2}+\omega_0^2u_0=0\,,$$

che ammette la soluzione banale

$$u_0(t)=B\cos(\omega_0 t)\,.$$

Una qualsiasi combinazione lineare della precedente soluzione particolare e $u_0(t)$ sarà ancora soluzione. Possiamo fissare la costante generica B in modo che anche la prima condizione al contorno sia verificata. La nuova soluzione è la combinazione lineare:

$$U(t)=A\frac{\cos(\omega t)}{-\omega^2+\omega_0^2}+B\cos(\omega_0 t)\,,$$

dove i coefficienti A e B sono fissati richiedendo:

$$U(0)=0\qquad\Rightarrow\qquad B=-\frac{A}{-\omega^2+\omega_0^2}\,,$$

l'annullamento della derivata prima in $t=0$ è garantito dalla presenza di sole funzioni coseno. La soluzione completa è

$$U(t)=A\frac{\cos(\omega t)-\cos(\omega_0 t)}{-\omega^2+\omega_0^2}\,.$$