# Metodi Matematici per la Fisica

## Prima prova parziale - 26 febbraio 2021

Si risolvano cortesemente i seguenti problemi, sapendo che il punteggio assegnato a ciascuna procedura di risoluzione può variare tra lo zero e il massimo indicato ed è stabilito valutando:

1. la correttezza del risultato ottenuto e della procedura utilizzata;
2. la completezza dei passaggi riportati;
3. il livello di esemplificazione con cui sono espressi i risultati (ad esempio un risultato numerico reale non deve contenere l'unità immaginaria);
4. la correttezza del formalismo utilizzato;
5. la chiarezza dell'esposizione e la leggibilità del testo.

## Primo problema (punteggio massimo: 7,5/30)

Si calcoli l'integrale

$$I_1 = \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^{7/8}\left(x^2+1\right)^2}\,.$$

### Soluzione del primo problema

Usiamo la nota formula

$$\int_0^{\infty} x^{\alpha} R(x) dx = -\frac{\pi e^{-i\pi\alpha}}{\operatorname{sen}(\pi\alpha)} \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}\left[z^{\alpha} R(z), z_k\right],$$

dove $\{z_k\}_{k=1}^n$ è l'insieme dei poli della funzione razionale $R(z)$, $\alpha$ è numero complesso, in generale $\alpha \notin \mathbb{Z}$ per evitare casi banali, $R(z)$ è una funzione razionale che non ha poli sul semiasse reale positivo e tale che: $R(z) = O\left(z^l\right)$ per $z \to 0$ e $R(z) = O\left(z^h\right)$ per $z \to \infty$, con $l, h \in \mathbb{Z}$, e, infine la condizione di convergenza: $-l-1 < \operatorname{Re}(\alpha) < -h-1$. Nel caso in studio si hanno: $\alpha = -7/8$, $l = 0$, $h = -4$, quindi la condizione di convergenza è soddisfatta, infatti: $-1-l = -1 < \operatorname{Re}(\alpha) = 7/8 < -1-h = 3$. La funzione razionale ha due poli doppi in $z_1 = e^{i\pi/2} = i$ e $z_2 = e^{3i\pi/2} = -i$. Si noti la scelta della determinazione $(0, 2\pi)$, necessaria in quanto la formula risolutiva è stata ottenuta con questa determinazione. I residui sono

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}\left[\frac{z^{-7/8}}{\left(z^2+1\right)^2}, z_1\right] &= \frac{d}{dz}\frac{z^{-7/8}}{\left(z^2+1\right)^2}\left(z-z_1\right)^2\bigg|_{z=z_1} = \frac{d}{dz}\frac{z^{-7/8}}{\left(z-z_2\right)^2}\bigg|_{z=z_1} = -\frac{7}{8}\frac{z_1^{-7/8}}{z_1\left(z_1-z_2\right)^2} - 2\frac{z_1^{-7/8}}{\left(z_1-z_2\right)^3}\\
&= z_1^{-7/8}\left(-\frac{7}{8}\frac{1}{i(2i)^2} - 2\frac{1}{(2i)^3}\right) = i z_1^{-7/8}\left(-\frac{7}{32} - \frac{1}{4}\right) = -\frac{15i}{32}e^{-7i\pi/16};\\
\operatorname{Res}\left[\frac{z^{-7/8}}{\left(z^2+1\right)^2}, z_2\right] &= \frac{d}{dz}\frac{z^{-7/8}}{\left(z^2+1\right)^2}\left(z-z_2\right)^2\bigg|_{z=z_2} = \frac{d}{dz}\frac{z^{-7/8}}{\left(z-z_1\right)^2}\bigg|_{z=z_2} = -\frac{7}{8}\frac{z_2^{-7/8}}{z_2\left(z_2-z_1\right)^2} - 2\frac{z_2^{-7/8}}{\left(z_2-z_1\right)^3}\\
&= z_2^{-7/8}\left(-\frac{7}{8}\frac{1}{-i(-2i)^2} - 2\frac{1}{(-2i)^3}\right) = i z_2^{-7/8}\left(\frac{7}{32} + \frac{1}{4}\right) = \frac{15i}{32}e^{-21i\pi/16};
\end{aligned}$$

la loro somma

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}\left[\frac{z^{-7/8}}{\left(z^2+1\right)^2}, z_1\right] + \operatorname{Res}\left[\frac{z^{-7/8}}{\left(z^2+1\right)^2}, z_2\right] &= \frac{15i}{32}\left(e^{-21i\pi/16} - e^{-7i\pi/16}\right) = \frac{15ie^{-7i\pi/8}}{32}\left(e^{-7i\pi/16} - e^{7i\pi/16}\right)\\
&= \frac{15e^{-7i\pi/8}}{16}\operatorname{sen}(7\pi/16) = \frac{15e^{-7i\pi/8}}{16}\operatorname{sen}(\pi/2 - \pi/16)\\
&= \frac{15e^{-7i\pi/8}}{16}\cos(\pi/16).
\end{aligned}$$

Usiamo questo risultato nella formula nota, per cui si ha

$$I_1 = -\frac{\pi e^{7i\pi/8}}{\operatorname{sen}(-7\pi/8)}\left(\operatorname{Res}\left[\frac{z^{-7/8}}{(z^2+1)^2}, z_1\right] + \operatorname{Res}\left[\frac{z^{-7/8}}{(z^2+1)^2}, z_2\right]\right) = -\frac{\pi e^{7i\pi/8}}{\operatorname{sen}(-7\pi/8)}\frac{15e^{-7i\pi/8}}{16}\operatorname{sen}(7\pi/16)$$
$$= \frac{15\pi}{16}\frac{\operatorname{sen}(7\pi/16)}{\operatorname{sen}(7\pi/8)},$$

usando la formula di duplicazione della funzione seno a denominatore,

$$I_1 = \frac{15\pi}{16}\frac{\operatorname{sen}(7\pi/16)}{\operatorname{sen}(7\pi/8)} = \frac{15\pi}{16}\frac{\operatorname{sen}(7\pi/16)}{2\operatorname{sen}(7\pi/16)\cos(7\pi/16)} = \frac{15\pi}{32\cos(7\pi/16)},$$

o ancora

$$I_1 = \int_0^\infty \frac{dx}{x^{7/8}(x^2+1)^2} = \frac{15\pi}{32\operatorname{sen}(\pi/16)}.$$

## Secondo problema (punteggio massimo: 7,5/30)

Si ottenga, in funzione di $n \in \mathbb{N}$, il valore dell'integrale

$$I_{2n} = \oint_{|z-1|=1} \frac{\sum_{j=0}^{2n-1}(j+1)z^j}{\sum_{k=0}^{2n} z^k}\, dz.$$

## Soluzione del secondo problema

È immediato osservare che la funzione integranda è la derivata logaritmica della funzione

$$g_{2n}(z) = \sum_{k=0}^{2n} z^k,$$

che rappresenta la somma parziale $2n$-esima della serie geometrica di ragione $z$ e ne costituisce il denominatore, infatti

$$g'_{2n}(z) = \frac{d}{dz}\sum_{k=0}^{2n} z^k = \sum_{k=0}^{2n}\frac{d}{dz}z^k = \sum_{k=1}^{2n} k z^{k-1} = \sum_{k'=0}^{2n-1}(k'+1)z^{k'},$$

l'ultima identità è conseguenza della sostituzione $k' = k-1$.
Per il teorema dell'indice, nel caso in cui né zeri né poli appartengano al percorso d'integrazione, la circonferenza di raggio unitario e centro in $z=1$, il valore dell'integrale è $2i\pi$ volte la differenza tra il numero di zeri e quello dei poli della funzione la cui derivata logaritmica rappresenta l'integranda, contati con le rispettive molteplicità, avvolti dal percorso d'integrazione. Indicando, rispettivamente con $M$ e $N$ tali numeri si ha

$$I_{2n} = 2i\pi(M-N).$$

Poiché la funzione $g_{2n}(z)$ è un polinomio di grado $2n$ si ha $N=0$, si tratta, infatti, di una funzione intera che ha come unica singolarità un polo di ordine $2n$ all'infinito. Ne consegue che il valore dell'integrale si riduce a

$$I_{2n} = 2i\pi M.$$

Per ottenere la posizione degli zeri della funzione $g_{2n}(z)$ procediamo come segue

$$g_{2n}(z) = \sum_{k=0}^{2n} z^k \frac{1-z}{1-z} = \frac{1-z^{2n+1}}{1-z},$$

in questa forma, si evincono immediatamente le posizioni degli zeri, che coincidono con le $2n$ radici $(2n+1)$-esime dell'unità, infatti lo zero in $z=1$, sempre presente per ogni valore di $n \in \mathbb{N}$, si semplifica con l'unica singolarità in $z=1$, che sarà, quindi e ovviamente, una singolarità eliminabile. L'ovvietà di questa affermazione risiede nel fatto che, come già ribadito, la funzione è intera e quindi non ha singolarità al finito. In definitiva i $2n$ zeri sono gli elementi dell'insieme $\left\{z_k = e^{2ik\pi/(2n+1)}\right\}_{k=1}^{2n}$, ovvero i $2n$ vertici non reali del poligono regolare con $(2n+1)$ lati

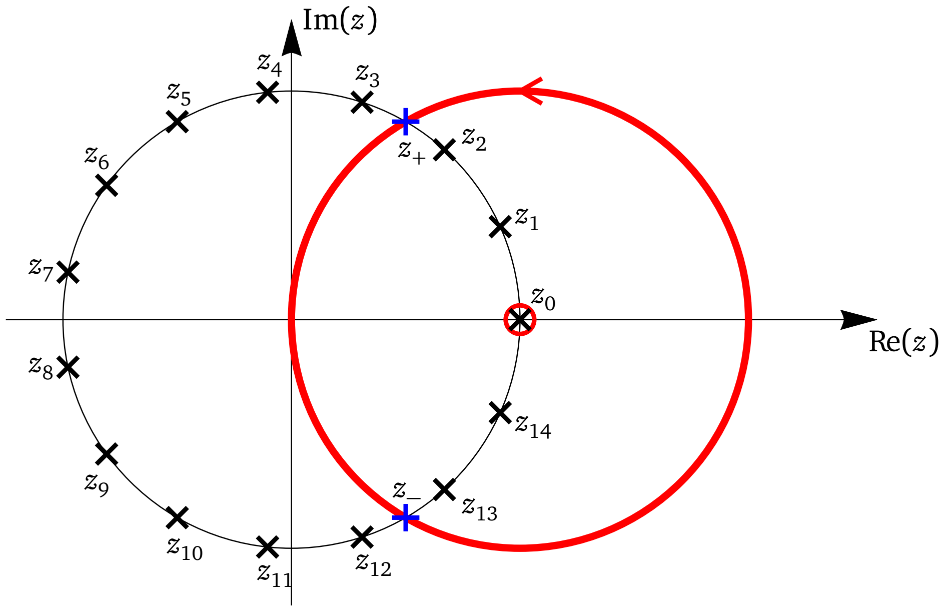
iscritto nella circonferenza unitaria. In particolare, il vertice non incluso, è l'unità, che si avrebbe per $k = 0$. In figura è mostrato il caso con $n = 7$, qui gli zeri sono indicati con il simbolo "×" in nero, quello in $z = 1$, circondato da una circonferenza in rosso, rappresenta lo zero che cancella ed è cancellato a sua volta dalla singolarità nello stesso punto.
Il percorso d'integrazione, riprodotto in rosso nella figura, interseca la circonferenza unitaria nei punti che verificano le identità

$$|z-1| = |z| = 1\,,$$

facendo i quadrati e indicando con $\theta$ la fase di $z$, si ha

$$|z-1|^2 = |z|^2 \;\Rightarrow\; |z|^2 + 1 - 2\mathrm{Re}(z) = |z|^2 \;\Rightarrow\; |z|^2 + 1 - 2\cos(\theta) = |z|^2 \;\Rightarrow\; \cos(\theta) = \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; \theta_+ = \frac{\pi}{3},\ \theta_- = \frac{5\pi}{3},$$

quindi i due punti d'intersezione tra le due circonferenze sono $z_\pm = e^{\pm i\theta_\pm}$, indicati in figura con il simbolo "+" in blu.




Verifichiamo che i punti d'intersezione $z_\pm$ non appartengono all'insieme degli zeri, cosicché sia possibile applicare il teorema dell'indice. A tal fine, osserviamo come l'equazione

$$z_k = z_\pm \;\Rightarrow\; e^{2ik\pi/(2n+1)} = e^{i\theta_\pm} \;\Rightarrow\; k = \frac{2n+1}{2\pi}\theta_\pm = \begin{cases} k = \dfrac{2n+1}{6} & \theta_+ = \dfrac{\pi}{3} \\[2ex] k = 5\dfrac{2n+1}{6} & \theta_- = \dfrac{5\pi}{3} \end{cases},$$

non ammetta soluzioni per valori $k \in \{1, 2, \ldots, 2n\}$, infatti i rapporti $(2n+1)/6$ e $5(2n+1)/6$ non sono mai numeri interi, in quanto i numeratori $(2n+1)$ e $5(2n+1)$ essendo numeri dispari non sono in nessun caso multipli di 6.
Infine, gli zeri avvolti dal percorso d'integrazione possono essere rappresentati da coppie di complessi coniugati $\left\{z_j, z_j^*\right\}_{j=1}^m$, tali che le fasi dei numeri $z_j$, che si trovano nel semipiano delle parti immaginarie positive, siano strettamente comprese tra zero e $\pi/3$, la fase del punto d'intersezione $z_+$, cioè

$$\frac{2\pi j}{2n+1} \le \frac{2\pi m}{2n+1} < \frac{\pi}{3}\,, \qquad j \in \{1, 2, \ldots, m\}\,,$$

da cui si ha che il numero di coppie è

$$m = \mathrm{Int}\left[\frac{2n+1}{6}\right],$$

dove l'operatore Int$[w]$ estrae la parte intera del numero reale $w$. Alla luce di questo risultato, il valore dell'integrale è

$$I_{2n} = \oint_{|z-1|=1} \frac{\sum_{j=0}^{2n-1}(j+1)z^j}{\sum_{k=0}^{2n} z^k} dz = 4i\pi \,\mathrm{Int}\left[\frac{2n+1}{6}\right], \qquad n \in \mathbb{N}.$$

## TERZO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 7,5/30)

Si calcoli l'integrale

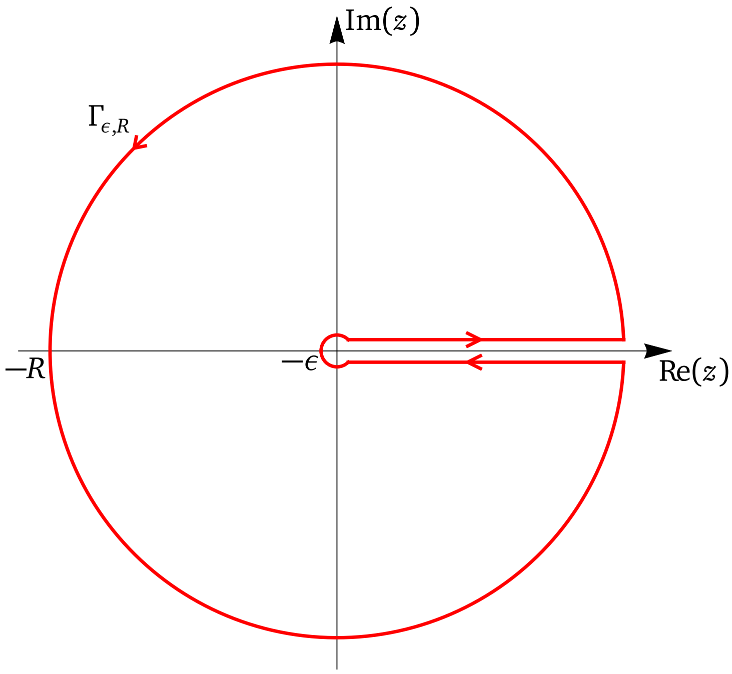
$$I_3 = \int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x-1}\,\ln(x-1)}{x^3+1} dx .$$

### SOLUZIONE DEL TERZO PROBLEMA

La funzione integranda è polidroma, la polidromia è dovuta sia alla radice quadrata che al logaritmo, il punto di diramazione al finito è $z = 1$, l'ordine di tale punto è infinito in virtù della funzione logaritmo.
Con la sostituzione $x' = x - 1$, si ha

$$I_3 = \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x'}\,\ln(x')}{(x'+1)^3+1} dx',$$

ovviamente, in questo caso il punto di diramazione al finito della funzione integranda coincide con l'origine.




Consideriamo il percorso d'integrazione chiuso rappresentato in rosso nella figura a pagina 3,

$$\Gamma_{\epsilon,R} = [\epsilon + i\epsilon, R + i\epsilon] \cup \left\{z : z = Re^{i\theta}, \theta \in [\epsilon/R, 2\pi - \epsilon/R]\right\} \cup [R - i\epsilon, \epsilon - i\epsilon] \cup \left(-\left\{z : z = \epsilon e^{i\theta}, \theta \in [\epsilon/R, 2\pi - \epsilon/R]\right\}\right),$$

che, per $R > 2$ e $\epsilon < 1$, avvolge tutte le singolarità della funzione integranda, cioè i tre poli semplici nei punti dell'insieme $\left\{z_k = e^{(2k+1)i\pi/3} - 1\right\}_{k=0}^{2}$. L'integrale su tale percorso chiuso, anche nei limiti $\epsilon \to 0^+$ e $R \to \infty$ è dato dalla somma dei residui, cioè

$$\lim_{\epsilon\to 0^+}\lim_{R\to\infty} \oint_{\Gamma_{\epsilon,R}} \frac{\sqrt{z}\,\ln(z)}{(z+1)^3+1} dz = 2i\pi \left(\mathrm{Res}\left[\frac{\sqrt{z}\,\ln(z)}{(z+1)^3+1}, e^{i\pi/3}-1\right] + \mathrm{Res}\left[\frac{\sqrt{z}\,\ln(z)}{(z+1)^3+1}, -2\right]\right.$$
$$\left. + \mathrm{Res}\left[\frac{\sqrt{z}\,\ln(z)}{(z+1)^3+1}, e^{5i\pi/3}-1\right]\right).$$

In termini dei contributi dei due tratti rettilinei e dei due archi, la cui unione costituisce il percorso $\Gamma_{\epsilon,R}$, si ha

$$\begin{aligned}\lim_{\epsilon\to 0^+}\lim_{R\to\infty}\oint_{\Gamma_{\epsilon,R}}\frac{\sqrt{z}\ln(z)}{(z+1)^3+1}dz &= \lim_{\epsilon\to 0^+}\lim_{R\to\infty}\left(\int_{\epsilon}^{R}\frac{\sqrt{x}\ln(x)}{(x+1)^3+1}dx + e^{i\pi}\int_{R}^{\epsilon}\frac{\sqrt{x}\ln(x)}{(x+1)^3+1}dx\right.\\ &\left.\qquad -2i\pi e^{i\pi}\int_{\epsilon}^{R}\frac{\sqrt{x}}{(x+1)^3+1}dx\right)\\ &= 2I_3 + 2i\pi\int_0^{\infty}\frac{\sqrt{x}}{(x+1)^3+1}dx\,.\end{aligned}$$

Dell'identità degli ultimi membri delle due precedenti relazioni si ottiene l'integrale cercato come

$$\begin{aligned}I_3 = i\pi&\left(\mathrm{Res}\left[\frac{\sqrt{z}\ln(z)}{(z+1)^3+1}, e^{i\pi/3}-1\right] + \mathrm{Res}\left[\frac{\sqrt{z}\ln(z)}{(z+1)^3+1}, -2\right] + \mathrm{Res}\left[\frac{\sqrt{z}\ln(z)}{(z+1)^3+1}, e^{5i\pi/3}-1\right]\right)\\ &-i\pi\int_{\epsilon}^{R}\frac{\sqrt{x}}{(x+1)^3+1}dx\,.\end{aligned}$$

Per il calcolo dell'ultimo integrale si usa la formula nota, ovvero

$$\int_0^{\infty} x^{\alpha}R(x)dx = -\frac{\pi e^{-i\alpha}}{\mathrm{sen}(\pi\alpha)}\sum_k \mathrm{Res}\left[z^{\alpha}R(z), w_k\right],$$

dove l'insieme $\{w_k\}_k$ contiene i poli della funzione razionale $R(z)$ che non devono appartenere al semiasse reale positivo, ovvero al percorso d'integrazione. Nel caso in studio avremo

$$\int_0^{\infty}\frac{\sqrt{x}}{(x+1)^3+1}dx = -\frac{\pi e^{-i\pi/2}}{\mathrm{sen}(\pi/2)}\sum_{k=0}^{2}\mathrm{Res}\left[\frac{\sqrt{z}}{(z+1)^3+1}, e^{(2k+1)i\pi/3}-1\right] = i\pi\sum_{k=0}^{2}\mathrm{Res}\left[\frac{\sqrt{z}}{(z+1)^3+1}, z_k\right],$$

da cui, sfruttando la linearità dell'operatore residuo, conseguenza di quella dell'integrale, avremo

$$I_3 = i\pi\sum_{k=0}^{2}\mathrm{Res}\left[\frac{\sqrt{z}\ln(z)}{(z+1)^3+1}, z_k\right] - (i\pi)^2\sum_{k=0}^{2}\mathrm{Res}\left[\frac{\sqrt{z}}{(z+1)^3+1}, z_k\right] = i\pi\sum_{k=0}^{2}\mathrm{Res}\left[\frac{\sqrt{z}\,(\ln(z)-i\pi)}{(z+1)^3+1}, z_k\right].$$

I residui sono

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}\left[\frac{\sqrt{z}\,(\ln(z)-i\pi)}{(z+1)^3+1}, z_0 = e^{i\pi/3}-1\right] &= \frac{\sqrt{z_0}\,(\ln(z_0)-i\pi)}{3(z_0+1)^2} = \frac{\sqrt{e^{2i\pi/3}}\left(\ln\left(e^{2i\pi/3}\right)-i\pi\right)}{3\left(e^{i\pi/3}\right)^2} = \frac{e^{i\pi/3}\,(2i\pi/3-i\pi)}{3e^{2i\pi/3}}\\ &= -\frac{i\pi}{9}e^{-i\pi/3} = -\frac{i\pi}{18}\left(1-i\sqrt{3}\right) = -\frac{\pi}{18}\left(\sqrt{3}+i\right);\\ \mathrm{Res}\left[\frac{\sqrt{z}\,(\ln(z)-i\pi)}{(z+1)^3+1}, z_1 = -2\right] &= \frac{\sqrt{-2}\,(\ln(-2)-i\pi)}{3(-2+1)^2} = \frac{i\sqrt{2}\,\ln(2)}{3};\\ \mathrm{Res}\left[\frac{\sqrt{z}\,(\ln(z)-i\pi)}{(z+1)^3+1}, z_2 = e^{5i\pi/3}-1\right] &= \frac{\sqrt{e^{4i\pi/3}}\left(\ln\left(e^{4i\pi/3}\right)-i\pi\right)}{3\left(e^{5i\pi/3}\right)^2} = \frac{e^{2i\pi/3}\,(4i\pi/3-i\pi)}{3e^{10i\pi/3}} = \frac{i\pi}{9}e^{-8i\pi/3}\\ &= \frac{i\pi}{9}e^{-2i\pi/3} = \frac{i\pi}{18}\left(-1-i\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{18}\left(\sqrt{3}-i\right);\end{aligned}$$

quindi l'integrale

$$I_3 = i\pi\left(-\frac{\pi}{18}\left(\sqrt{3}+i\right) + \frac{i\sqrt{2}\,\ln(2)}{3} + \frac{\pi}{18}\left(\sqrt{3}-i\right)\right) = \pi\left(\frac{\pi}{9} - \frac{\sqrt{2}\,\ln(2)}{3}\right),$$

da cui

$$I_3 = \frac{\pi}{9}\left(\pi - 3\sqrt{2}\,\ln(2)\right).$$

## Quarto problema (punteggio massimo: 7,5/30)

Si calcolino i primi quattro coefficienti non nulli della serie di Laurent della funzione

$$f(z)=\frac{1}{(\cos(z)+\operatorname{sen}(z))^2}\,,$$

centrata in $z_0=3\pi/4$ e convergente in un intorno dello stesso $z_0$. Si ottenga, inoltre, il dominio di convergenza di tale serie.

## Soluzione del quarto problema

Usando le formule di somma, scriviamo le funzioni trigonometriche in termini del binomio $(z-3\pi/4)$ sommando e sottraendo lo stesso valore $3\pi/4$ negli argomenti, si ha

$$\begin{aligned}
f(z)&=\frac{1}{(\cos(z-3\pi/4+3\pi/4)+\operatorname{sen}(z-3\pi/4+3\pi/4))^2}\\
&=\frac{1}{(\cos(z-3\pi/4)\cos(3\pi/4)-\operatorname{sen}(z-3\pi/4)\operatorname{sen}(3\pi/4)+\operatorname{sen}(z-3\pi/4)\cos(3\pi/4)+\cos(z-3\pi/4)\operatorname{sen}(3\pi/4))^2}\\
&=\frac{2}{(-\cos(z-3\pi/4)-\operatorname{sen}(z-3\pi/4)-\operatorname{sen}(z-3\pi/4)+\cos(z-3\pi/4))^2}\\
&=\frac{1}{2\operatorname{sen}^2(z-3\pi/4)}\,,
\end{aligned}$$

da cui, usando la formula di duplicazione della funzione coseno,

$$f(z)=\frac{1}{1-\cos(2(z-3\pi/4))}\,.$$

Consideriamo lo sviluppo in serie di Taylor della funzione coseno

$$f(z)=\frac{1}{1-\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j(z-3\pi/4)^{2j}2^{2j}/(2j)!}=\frac{1}{(z-3\pi/4)^2 2^2/2!-(z-3\pi/4)^4 2^4/4!+O\left((z-3\pi/4)^6\right)}\,,$$

a denominatore mettiamo in evidenza il termine quadratico

$$\begin{aligned}
f(z)&=\frac{1}{2(z-3\pi/4)^2}\frac{1}{1-(z-3\pi/4)^2 2^3/4!+(z-3\pi/4)^4 2^5/6!+O\left((z-3\pi/4)^6\right)}\,,\\
&=\frac{1}{2(z-3\pi/4)^2}\left[1+\left(\frac{(z-3\pi/4)^2 2^3}{4!}-\frac{(z-3\pi/4)^4 2^5}{6!}+O\left((z-3\pi/4)^6\right)\right)\right.\\
&\qquad\left.+\left(\frac{(z-3\pi/4)^2 2^3}{4!}-\frac{(z-3\pi/4)^4 2^5}{6!}+O\left((z-3\pi/4)^6\right)\right)^2+\cdots\right].
\end{aligned}$$

È immediato osservare che sono presenti solo potenze pari e che la potenza minore è $-2$, per cui i primi quattro coefficienti non nulli dovrebbero essere, a meno di ulteriori annullamenti, $C_{-2}$, $C_0$, $C_2$ e $C_4$. Il primo coefficiente, $C_{-2}$, è quello del binomio $(z-3\pi/4)^2$ e, come si evince dall'identità precedente è $C_{-2}=1/2$. Il secondo, $C_0$, si ottiene sommando tutti i termini costanti che si ottengono dal prodotto del fattore $1/\left(2(z-3\pi/4)^2\right)$, c'è un solo prodotto di questo tipo, quello con il primo termine della prima parentesi tonda, ovvero

$$C_0=\frac{1}{2}\frac{2^3}{4!}=\frac{1}{6}\,.$$

Il coefficiente $C_2$ avrà due contributi, dal termine quartico della prima parentesi tonda e dal quadrato di quello quadratico della seconda, cioè

$$C_2=\frac{1}{2}\left(-\frac{2^5}{6!}+\left(\frac{2^3}{4!}\right)^2\right)=\frac{1}{2}\frac{2^5}{4!}\left(-\frac{1}{30}+\frac{1}{12}\right)=\frac{2}{3}\frac{-2+5}{60}=\frac{1}{30}\,.$$

Infine, il coefficiente $C_4$ avrà tre contributi, dal termine in potenza sei della prima parentesi tonda e dal prodotto dei termini quadratico e quartico della seconda parentesi tonda e dal cubo del termine quadratico della terza, avvero

$$\begin{aligned}
C_4&=\frac{1}{2}\left(\frac{2^7}{8!}-2\frac{2^3}{4!}\frac{2^5}{6!}+\left(\frac{2^3}{4!}\right)^3\right)=\frac{1}{2}\frac{2^7}{(4!)^2}\left(\frac{1}{2\cdot5\cdot7}-\frac{2^2}{5\cdot6}+\frac{2^2}{4!}\right)=\frac{1}{9}\left(\frac{1}{2\cdot5\cdot7}-\frac{4}{2\cdot3\cdot5}+\frac{1}{2\cdot3}\right)\\
&=\frac{1}{9}\left(\frac{3}{2\cdot3\cdot5\cdot7}-\frac{4\cdot7}{2\cdot3\cdot5\cdot7}+\frac{5\cdot7}{2\cdot3\cdot5\cdot7}\right)=\frac{1}{9}\frac{10}{2\cdot3\cdot5\cdot7}=\frac{1}{3\cdot7\cdot9}=\frac{1}{189}\,.
\end{aligned}$$

In definitiva i primi quattro coefficienti di Laurent non nulli sono:

$$C_{-2} = \frac{1}{2}, \qquad C_0 = \frac{1}{6}, \qquad C_2 = \frac{1}{30}, \qquad C_4 = \frac{1}{189}.$$

Per ciò che riguarda il dominio di convergenza di questa serie di Laurent, sappiamo, come conseguenza del teorema di Abel che è rappresentato da una corona circolare con centro in $z_0 = 3\pi/4$, raggio minore nullo e come raggio maggiore la distanza tra il centro e la singolarità ad esso più vicina. Come già visto, la funzione ha poli doppi in corrispondenza dei valori di $z$ in cui le funzioni seno e coseno sono opposte, ovvero

$$z_k = \frac{3\pi}{4} + k\pi, \qquad \forall\, k \in \mathbb{Z}.$$

I poli più vicini a $z_0 = 3\pi/4$ sono $z_1 = 7\pi/4$ e $z_{-1} = -\pi/4$, si ha $|z_0 - z_{\pm 1}| = \pi$, in generale, infatti, si ha $|z_k - z_0| = |k|\pi$, da cui

$$\min_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\},\, j\in\mathbb{Z}} \{|z_k - z_0|,\} = |z_{\pm 1} - z_0| = \pi.$$

Il dominio di convergenza è quindi la corona circolare

$$C = \{z : 0 < |z - 3\pi/4| < \pi\}.$$

## Quinto problema (punteggio massimo: 7,5/30)

Si ottenga, in funzione $N \in \mathbb{N}$, lo sviluppo di Mittag-Leffler della funzione

$$g_N(z) = \frac{1}{\sum_{k=0}^{2N-1} z^k + \sum_{j=0}^{N-1} z^j}.$$

### Soluzione del quinto problema

Riscriviamo le somme a denominatore moltiplicando e dividendo per il binomio $(z-1)$, si ha

$$g_N(z) = \frac{z-1}{z^{2N} - 1 + z^N - 1} = \frac{z-1}{z^{2N} + z^N - 2}.$$

Gli zeri del polinomio di grado $2N$ a denominatore si ottengono come le $N$ radici $N$-esime delle due soluzioni dell'equazione di secondo grado nella variabile $z^N$, $\left(z^N\right)^2 + z^N - 2 = 0$, da cui si hanno: $(z^-)^N = -2$ e $(z^+)^N = 1$. I poli sono, invece, $(2N-1)$, infatti lo zero in $z = 1$ si cancella con l'unico zero del polinomio di primo grado a numeratore. Ne consegue che i poli semplici della funzione $g_N(z)$ sono

$$z_k^- = 2^{1/N} e^{(2k+1)i\pi/N}, \qquad z_j^+ = e^{2ji\pi/N}, \qquad k \in \{0,1,\ldots,N-1\}, \qquad j \in \{1,2,\ldots,N-1\},$$

ovvero, si hanno $N$ poli di tipo "$z^-$" ed $(N-1)$ di tipo "$z^+$". I residui di tali poli sono

$$\begin{aligned}
R_k^- &= \lim_{z\to z_k^-} g_N(z)\left(z - z_k^-\right) = \lim_{z\to z_k^-} \frac{z-1}{z^{2N}+z^N-2}\left(z - z_k^-\right) = \frac{z_k^- - 1}{2N\left(z_k^-\right)^{2N-1} + N\left(z_k^-\right)^{N-1}} = \frac{\left(z_k^- - 1\right) z_k^-}{2N\left(z_k^-\right)^{2N} + N\left(z_k^-\right)^{N}} \\
&= \frac{\left(z_k^- - 1\right) z_k^-}{2N(-2)^2 - 2N} = \frac{\left(z_k^- - 1\right) z_k^-}{6N}; \\
R_j^+ &= \lim_{z\to z_j^+} g_N(z)\left(z - z_j^+\right) = \lim_{z\to z_j^+} \frac{z-1}{z^{2N}+z^N-2}\left(z - z_j^+\right) = \frac{z_j^+ - 1}{2N\left(z_j^+\right)^{2N-1} + N\left(z_j^+\right)^{N-1}} = \frac{\left(z_j^+ - 1\right) z_j^+}{2N\left(z_j^+\right)^{2N} + N\left(z_j^+\right)^{N}} \\
&= \frac{\left(z_j^+ - 1\right) z_j^+}{2N + N} = \frac{\left(z_j^+ - 1\right) z_j^+}{3N}, \qquad k \in \{0,1,\ldots,N-1\}, \qquad j \in \{1,2,\ldots,N-1\}.
\end{aligned}$$

Lo sviluppo di Mittag-Leffler è

$$g_N(z) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{R_k^-}{z - z_k^-} + \sum_{j=1}^{N-1} \frac{R_j^+}{z - z_j^+} = \frac{1}{3N}\left[\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1} \frac{\left(z_k^- - 1\right) z_k^-}{z - z_k^-} + \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\left(z_j^+ - 1\right) z_j^+}{z - z_j^+}\right].$$

## Sesto problema (punteggio massimo: 7,5/30)

Si ottenga la serie di Laurent della funzione

$$\phi(z) = \frac{e^{1/z}}{z^4 - 1},$$

con centro in $z = 0$ e convergente in $z = i/2$. Si determinino e classifichino le singolarità della funzione data e il dominio di convergenza della serie di Laurent richiesta.

### Soluzione del sesto Problema

Usando lo sviluppo in serie della funzione esponenziale e la somma della serie geometrica di ragione $z^4$, convergente per $|z| < 1$, si ha

$$\phi(z) = -\sum_{j,k=0}^{\infty} \frac{z^{-j+4k}}{j!} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n z^n,$$

dove la serie del terzo membro rappresenta la serie di Laurent. L'$n$-esimo coefficiente $C_n$ può essere calcolato come somma di una serie, in particolare

$$C_n = \sum_{j,k=0}^{\infty} \frac{\delta_{j,4k-n}}{j!},$$

dove la delta di Kronecker permette di eliminare una delle somme, ad esempio, possiamo fissare il valore di $j$ ponendo $j = 4k - n$, cosicché rimarrebbe soltanto la somma sull'indice $k$. Per far ciò è necessario imporre i vincoli opportuni dettati dai possibili valori che gli stessi indici possono assumere. In particolare, tanto l'indice $j$, quanto l'indice $k$ possono assumere solo valori interi non nulli, mentre $n$ varia in $\mathbb{Z}$, ne consegue che, se $n \leq 0$, si ha $4k - n \geq 0$, ovvero l'indice $j = 4k - n$ assume valori non negativi $\forall\, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, in altri termini, la somma rimanente sull'indice $k$ contiene tutti i termini.
Se, invece, $n > 0$, allora è necessario che si imponga la condizione $4k - n \geq 0$, altrimenti il fattoriale non sarebbe definito. La condizione precedente implica che la serie contempli solo indici che verifichino la condizione $k > n/4$, che, avendo $n \geq 1$, sicuramente implica $k \geq 1$. Consideriamo qualche esempio. Per i primi quattro valori $n = 1, 2, 3, 4$, è necessario che $k \geq 1$; per i successivi $n = 5, 6, 7, 8$, è invece necessario che $k \geq 2$. In generale, per i quattro valori di $n$, $n = 4m - 3, 4m - 2, 4m - 1, 4m$, con $m \in \mathbb{N}$, l'indice $k$ partirà dallo stesso valore minimo $m$. Per estrarre il numero interno $m$ a partire da un generico $n$ usiamo l'operatore "parte intera", che associa a un generico numero reale positivo la sua parte intera, definito dal simbolo $\mathrm{Int}[\cdot]$, per cui

$$\mathrm{Int}[x] = \max_{h \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \{h : 0 \leq x - h < 1\}.$$

Da questa definizione si ottiene che il numero $m$ associato a un generico $n$, secondo quanto precedentemente stabilito, è dato da

$$m = \mathrm{Int}\left[\frac{n+3}{4}\right].$$

Infatti, considerando i quattro casi possibili, $n = 4m - 3, 4m - 2, 4m - 1, 4m$, si ha

$$\mathrm{Int}\left[\frac{n+3}{4}\right] = \begin{cases} \mathrm{Int}\left[\frac{n+3}{4}\right] = \mathrm{Int}[m] = m & n = 4m - 3 \\ \mathrm{Int}\left[\frac{n+3}{4}\right] = \mathrm{Int}\left[m + \frac{1}{4}\right] = m & n = 4m - 2 \\ \mathrm{Int}\left[\frac{n+3}{4}\right] = \mathrm{Int}\left[m + \frac{1}{2}\right] = m & n = 4m - 1 \\ \mathrm{Int}\left[\frac{n+3}{4}\right] = \mathrm{Int}\left[m + \frac{3}{4}\right] = m & n = 4m \end{cases}.$$

Per ulteriore conferma, se fosse $n = 4m + 1$, quindi $n$ apparterrebbe al gruppo dei quattro valori successivi, avremmo

$$\mathrm{Int}\left[\frac{n+3}{4}\right] = \mathrm{Int}\left[\frac{4m+4}{4}\right] = \mathrm{Int}[m+1] = m + 1,$$

che rappresenta il valore di $m$ successivo, cioè $m+1$. Alla luce di questa discussione, l'$n$-esimo coefficiente della serie di Laurent si ottiene sotto forma della duplice legge

$$C_n = \sum_{j,k=0}^{\infty} \frac{\delta_{n,-j+4k}}{j!} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(4k-n)!} & n \leq 0 \\ \displaystyle\sum_{k=\mathrm{Int}[(n+3)/4]}^{\infty} \frac{1}{(4k-n)!} & n > 0 \end{cases} .$$