Metodi Matematici per la Fisica

Primo esonero - 26 febbraio 2019

Si risolvano cortesemente i seguenti problemi, sapendo che verranno valutati:

1. la correttezza del risultato ottenuto e della procedura utilizzata;
2. la completezza dei passaggi riportati;
3. il livello di esemplificazione con cui sono espressi i risultati (ad esempio un risultato numerico reale non deve contenere l'unità immaginaria);
4. la correttezza del formalismo utilizzato;
5. la chiarezza dell'esposizione e la leggibilità del testo.

Primo problema (punteggio: 3/30)

Si calcoli l'integrale in valore principale

$$J_n = \Pr\int_S \frac{dz}{z^{2n}+1}\,, \qquad n = 2, 3, \ldots\,,$$

dove il percorso S è la frontiera della semicerchio unitario appartenente al semipiano delle parti immaginarie positive, cioè

$$S = \left\{z : z = e^{i\theta}, \theta \in [0, \pi]\right\} \cup [-1, 1]\,.$$

Soluzione del primo problema

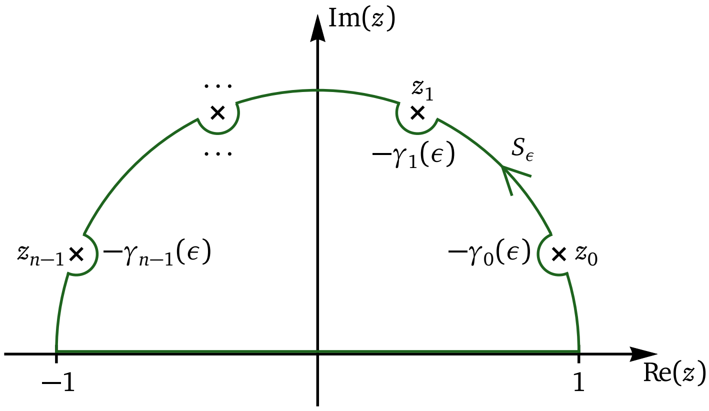
La funzione integranda ha $2n$ poli semplici coincidenti con le $2n$ radici $2n$-esime del numero -1. I poli, che indichiamo con

$$z_j = e^{i\pi(j+1/2)/n}\,, \qquad j = 0, 1, \ldots, 2n-1\,,$$

rappresentano i vertici del poligono regolare con $2n$ lati inscritto nella circonferenza unitaria e posizionato simmetricamente rispetto agli assi reale ed immaginario, in modo tale da non avere vertici reali. Appartengono al semipiano superiore e quindi al percorso di integrazione S gli n poli dell'insieme $\{z_k\}_{k=0}^{n-1}$, infatti

$$\mathrm{Im}(z_k) = \mathrm{sen}\left(\frac{\pi(k+1/2)}{n}\right) > 0\,, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1\,.$$

Consideriamo il percorso di integrazione S_ϵ mostrato in figura. Esso rappresenta una versione "dentata" internamente del percorso S, la dentatura consiste nell'inserzione degli n archi, percorsi in senso orario, dell'insieme $\{-\gamma_k(\epsilon)\}_{k=0}^{n-1}$. Il k-esimo arco $\gamma_k(\epsilon)$ è centrato nel polo z_k ed ha raggio ϵ.



L'integrale sul percorso chiuso S_ϵ è nullo in quanto non contiene poli della funzione integranda. Inoltre, nel limite $\epsilon \to 0^+$, tale integrale può essere scritto in termini dell'integrale in valore principale cercato, come

$$0 = \lim_{\epsilon\to 0^+} \oint_{S_\epsilon} \frac{dz}{z^{2n}+1} = J_n + \sum_{k=0}^{n-1} \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{-\gamma_k(\epsilon)} \frac{dz}{z^{2n}+1} = J_n - \sum_{k=0}^{n-1} \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{\gamma_k(\epsilon)} \frac{dz}{z^{2n}+1} = J_n - i\pi \sum_{k=0}^{n-1} A_k\,,$$

da cui si ottiene

$$J_n = i\pi \sum_{k=0}^{n-1} A_k\,,$$

dove i numeri A_k, con $k = 0, 1, \ldots, n-1$, sono i limiti, uniformi sugli archi $\gamma_k(\epsilon)$,

$$A_k = \lim_{\epsilon\to 0^+} \frac{z - z_k}{z^{2n}+1} = \frac{1}{2n\, z_k^{2n-1}} = \frac{e^{-i\pi(2k+1)(1-1/(2n))}}{2n} = -\frac{e^{i\pi(2k+1)/(2n)}}{2n} = -\frac{e^{i\pi/(2n)}}{2n} e^{i\pi k/n} = -\frac{e^{i\pi/(2n)}}{2n} \left(e^{i\pi/n}\right)^k .$$

La somma dei primi n valori A_k

$$\sum_{k=0}^{n-1} A_k = -\frac{e^{i\pi/(2n)}}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{i\pi/n}\right)^k ,$$

può essere calcolata moltiplicandola per l'unità, nella forma $\left(1-e^{i\pi/n}\right)/\left(1-e^{i\pi/n}\right)$, infatti si ha

$$\sum_{k=0}^{n-1} A_k = -\frac{e^{i\pi/(2n)}}{2n} \frac{1-e^{i\pi}}{1-e^{i\pi/n}} = -\frac{1}{n} \frac{1}{e^{-i\pi/(2n)} - e^{i\pi/(2n)}} = \frac{1}{2in\,\mathrm{sen}\,(\pi/(2n))} .$$

Ne consegue che l'integrale J_n vale

$$J_n = \frac{\pi}{2n\,\mathrm{sen}\,(\pi/(2n))} .$$

Secondo problema (punteggio 3/30)

Si ottengano le serie di Laurent centrate nell'origine della funzione

$$f(z) = \frac{z}{z^2+z-2} .$$

Soluzione del secondo problema

La funzione ha due poli semplici in $z_1 = 1$ e $z_2 = -2$ e può essere posta nella forma

$$f(z) = \frac{1/3}{z-1} + \frac{2/3}{z+2} ,$$

che ne rappresenta lo sviluppo di Mittag-Leffler, ovvero $R_1 = 1/3$ e $R_2 = 2/3$ sono i residui dei due poli semplici. Ci sono tre sviluppi di Laurent centrati nell'origine che hanno i domini di convergenza mostrati in figura, ovvero il cerchio, in grigio, e le due corone circolari, in verde e giallo,

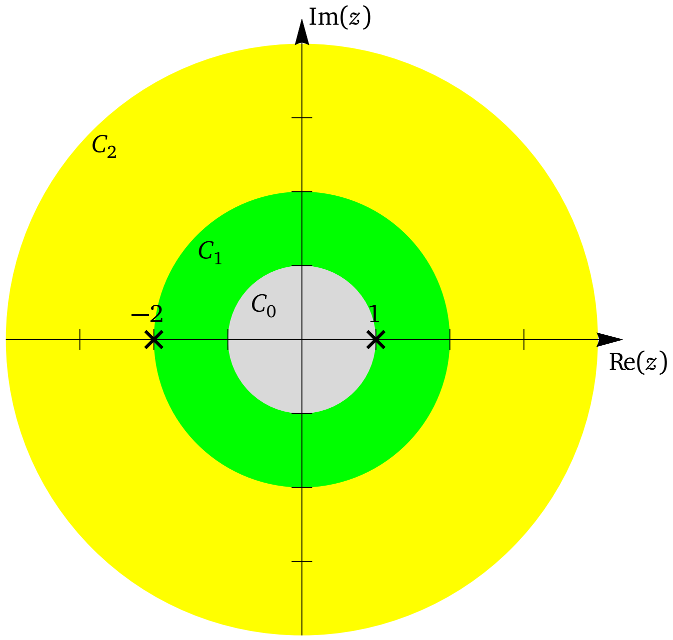
$$C_0 = \{z : |z| < 1\}\,, \qquad C_1 = \{z : 1 < |z| < 2\}\,, \qquad C_2 = \{z : |z| > 2\} .$$

Dalla struttura dei domini di convergenza si evince che la serie di Laurent convergente in C_0 non ha la parte principale ed è quindi una serie di Taylor.

La serie di Laurent convergente in C_0

Usiamo la serie geometrica che ha raggio di convergenza unitario, ovvero

$$\sum_{j=0}^{\infty} w^j = \frac{1}{1-w}\,, \qquad |w| < 1 .$$



I due termini della funzione $f(z)$ rappresentano somme di altrettante serie geometriche di ragioni z e $-z/2$, lo si vede facilmente ponendo la funzione in questa forma

$$f(z) = -\frac{1/3}{1-z} + \frac{1/3}{1+z/2}\,.$$

Inoltre, $\forall\, z \in C_0$ si ha che entrambe le ragioni verificano la condizione di convergenza $|z| < 1$ e, a fortiori, $|z/2| = |z|/2 < 1/2 < 1$. Ne consegue che, $\forall\, z \in C_0$

$$f(z) = \frac{1/3}{z-1} + \frac{2/3}{z+2} = -\frac{1}{3}\sum_{j=0}^{\infty} z^j + \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{z}{2}\right)^k = \frac{1}{3}\sum_{j=0}^{\infty}\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^j - 1\right] z^j \equiv \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m z^m\,,$$

l'ultimo membro rappresenta l'espressione formale della serie bilatera di Laurent, scritta in termini dei coefficienti dell'insieme $\{A_m\}_{m=-\infty}^{\infty}$. Alla luce dell'ultima identità si ha la legge multipla

$$A_m = \begin{cases} \dfrac{1}{3}\left[\left(-\dfrac{1}{2}\right)^m - 1\right] & m \geq 0 \\[2ex] 0 & m \leq -1 \end{cases}\,,$$

che definisce in modo esaustivo la serie di Laurent centrata nell'origine e con dominio di convergenza C_0. Poiché sono non nulli solo i coefficienti non negativi, la serie di Laurent è una serie di Taylor, ovvero la funzione è analitica in C_0.

La serie di Laurent convergente in C_1

In C_1 si ha la condizione $1 < |z| < 2$, da cui segue che mentre la serie geometrica di ragione $z/2$ è ancora convergente, quella di ragione z non lo è più. Lo sarà, invece quella di ragione $1/z$, infatti

$$1 < |z| \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{|z|} < 1\,.$$

In base a questa considerazione, riscriviamo la funzione nella forma

$$f(z) = \frac{1/3}{z-1} + \frac{2/3}{z+2} = \frac{1}{z}\,\frac{1/3}{1-1/z} + \frac{1/3}{1+z/2}$$

e considerando le due serie geometriche di ragioni $1/z$ e $-z/2$ si ha

$$f(z) = \frac{1}{3}\sum_{j=0}^{\infty} z^{-j-1} + \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{z}{2}\right)^k = \frac{1}{3}\sum_{j'=-\infty}^{-1} z^{j'} + \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^k z^k \equiv \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_m z^m \,,$$

dove abbiamo fatto il cambiamento di indice $j' = -j-1$. Dall'identità formale si ottiene la legge multipla per i coefficienti

$$B_m = \begin{cases} \dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^m & m \geq 0 \\ \\ \dfrac{1}{3} & m \leq -1 \end{cases} .$$

In questo caso ci sono infiniti termini sia nella parte principale che in quella regolare della serie di Laurent.

La serie di Laurent convergente in C_2

In C_2 la condizione sul modulo della z è $|z| > 2$, in questo anche la serie geometrica di ragione $z/2$ non converge. Convergono, invece, le serie geometriche di ragioni $1/z$ e $2/z$, infatti

$$|z| > 2 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{|z|} < \frac{2}{|z|} < 1 \,.$$

Riscriviamo, di conseguenza, la funzione nella forma

$$f(z) = \frac{1/3}{z-1} + \frac{2/3}{z+2} = \frac{1}{z}\frac{1/3}{1-1/z} + \frac{2}{z}\frac{1/3}{1+2/z} \,,$$

usando le serie geometriche si ha

$$f(z) = \frac{1}{3}\sum_{j=0}^{\infty} z^{-j-1} - \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{z}{2}\right)^{-k-1} = \frac{1}{3}\sum_{j'=-\infty}^{-1}\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{j'}\right] z^{j'} \equiv \sum_{m=-\infty}^{\infty} D_m z^m \,,$$

dove si è posto $j' = -j-1 = -k-1$. In questo caso solo i coefficienti della parte principale della serie di Laurent sono non nulli. In definitiva i coefficienti sono dati dalla legge multipla

$$D_m = \begin{cases} 0 & m \geq 0 \\ \\ \dfrac{1}{3}\left[1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^m\right] & m \leq -1 \end{cases} .$$

Terzo problema (punteggio 3/30)

Si scriva l'espansione di Weierstrass della funzione

$$w(z) = \operatorname{sen}(z) + 2 \,.$$

Soluzione del terzo problema

L'espansione di Weierstrass di una funzione intera $f(z)$ non nulla nell'origine, con zeri isolati nei punti dell'insieme $\{z_k\}_k$, che, nel caso di un'infinità numerabile, rappresenta una successione che si accumula all'infinito, è

$$f(z) = f(0) e^{z f'(0)/f(0)} \prod_k \left(1 - \frac{z}{z_k}\right)^{\beta_k} e^{\beta_k z/z_k} \,,$$

dove $\beta_k \in \mathbb{N}$ rappresenta la molteplicità dello zero z_k.
La funzione intera $w(z)$, alla luce della periodicità della funzione seno ha un'infinità di zeri. Questi possono essere determinati risolvendo l'equazione $w(z) = 0$. Scrivendo la funzione seno come differenza di esponenziali, si ottiene un'equazione di secondo grado in e^{iz}, le cui soluzioni danno gli zeri cercati, infatti

$$\begin{aligned} w(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} + 2 = 0 \\ e^{2iz} + 4ie^{iz} - 1 = 0 \end{aligned} \qquad \Rightarrow \qquad e^{iz} = -i\left(2 \pm \sqrt{3}\right) \qquad \Rightarrow \qquad z_k^{\pm} = -i \ln\left[-i\left(2 \pm \sqrt{3}\right)\right] + 2k\pi \,,$$

con $k \in \mathbb{Z}$. Gli zeri $z_k^\pm$ possono essere riscritti in una forma meno involuta

$$\begin{aligned} z_k^\pm &= -i\ln\left[-i\left(2\pm\sqrt{3}\right)\right] + 2k\pi = -i\ln(-i) - i\ln\left(2\pm\sqrt{3}\right) + 2k\pi \\ &= -i\ln(-i) \mp i\ln\left(2+\sqrt{3}\right) + 2k\pi\,, \end{aligned}$$

dove abbiamo usato $\left(2-\sqrt{3}\right) = 1/\left(2+\sqrt{3}\right)$, inoltre, poiché $-i = e^{-i\pi(1+4m\pi)/2}$, con $m \in \mathbb{Z}$, avremmo la dipendenza da due indici, $k, m \in \mathbb{Z}$, che possiamo però riassorbire in uno solo indice data l'arbitrarietà di entrambi, ovvero

$$\begin{aligned} z_{k,m}^\pm &= -\frac{\pi}{2}(1+4m\pi) \mp i\ln\left(2+\sqrt{3}\right) + 2k\pi = -\frac{\pi}{2}(1+4(m-k)\pi) \mp i\ln\left(2+\sqrt{3}\right) \\ \to z_n^\pm &= -\frac{\pi}{2}(1-4n) \pm i\ln\left(2+\sqrt{3}\right) \\ z_n^\pm &= \frac{\pi}{2}(4n-1) \pm i\ln\left(2+\sqrt{3}\right), \qquad \forall\, n \in \mathbb{Z}\,, \end{aligned} \tag{1}$$

dove, per comodità, abbiamo invertito il simbolo "segno alto-segno basso" in accordo con i segni del secondo membro. I poli dell'insieme $\{z_n^\pm\}_{n\in\mathbb{Z}}$ sono allineati lungo le rette parallele all'asse reale e simmetriche rispetto ad esso di equazioni $\mathrm{Im}(z) = \pm\ln(2+\sqrt{3}) \simeq \pm 1.317$. Le coppie $z_n^\pm$ sono complessi coniugati, ovvero $z_n^{-*} = z_n^+$.
I poli sono semplici, quindi per le molteplicità si ha $\beta_n^\pm = 1\ \forall\, n \in \mathbb{Z}$. Ciò può essere verificato osservando che la derivata prima della funzione non si annulla, ovvero $w'(z_n^\pm) \neq 0$, $\forall\, n \in \mathbb{Z}$. In particolare si ha

$$\begin{aligned} w'(z_n^\pm) &= \cos(z_n^\pm) \\ &= \cos\left(\pi(4n-1)/2\right)\cos\left(i\ln\left(2+\sqrt{3}\right)\right) \mp \mathrm{sen}\left(\pi(4n-1)/2\right)\mathrm{sen}\left(i\ln\left(2+\sqrt{3}\right)\right) \\ &= \mp\mathrm{sen}\left(\pi(4n-1)/2\right)\mathrm{sen}\left(i\ln\left(2+\sqrt{3}\right)\right) = \pm\mathrm{sen}\left(i\ln\left(2+\sqrt{3}\right)\right) \\ &= \pm\frac{\left(2+\sqrt{3}\right)^{-1} - \left(2+\sqrt{3}\right)}{2i} = \pm\frac{2-\sqrt{3}-2-\sqrt{3}}{2i} = \pm\frac{-\sqrt{3}}{i} \\ w'(z_n^\pm) &= \pm i\sqrt{3}\,, \qquad \forall\, n \in \mathbb{Z}\,. \end{aligned}$$

I valori della funzione e della derivata prima nell'origine sono

$$w(0) = 2\,, \qquad w'(0) = \cos(0) = 1\,.$$

Quindi l'espansione di Weierstrass è

$$\begin{aligned} w(z) &= w(0)e^{zw'(0)/w(0)} \prod_{k=-\infty}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_k^+}\right)\left(1-\frac{z}{z_k^-}\right)e^{z/z_k^+ + z/z_k^-} \\ &= 2e^{z/2}\prod_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\left(z_k^+ - z\right)\left(z_k^{+*} - z\right)}{|z_k^+|^2}\exp\left(z\frac{2\mathrm{Re}(z_k^+)}{|z_k^+|^2}\right) \\ &= 2e^{z/2}\prod_{k=-\infty}^{\infty}\frac{z^2 - 2z\mathrm{Re}(z_k^+) + |z_k^+|^2}{|z_k^+|^2}\exp\left(z\frac{2\mathrm{Re}(z_k^+)}{|z_k^+|^2}\right) \\ &= 2e^{z/2}\prod_{k=-\infty}^{\infty}\left(1 + z\frac{z - 2\mathrm{Re}(z_k^+)}{|z_k^+|^2}\right)\exp\left(z\frac{2\mathrm{Re}(z_k^+)}{|z_k^+|^2}\right). \end{aligned}$$

Dalla definizione dei poli di Eq. (1) si hanno le parti reali e i moduli quadri

$$\mathrm{Re}(z_k^\pm) = \frac{\pi}{2}\,(4k-1)\,, \qquad |z_k^\pm|^2 = \frac{\pi^2}{4}\,(4k-1)^2 + \ln^2\left(2+\sqrt{3}\right),$$

in termini dei quali si ottiene la forma finale

$$w(z) = 2e^{z/2}\prod_{k=-\infty}^{\infty}\left(1 + z\frac{z - \pi(4k-1)}{\frac{\pi^2}{4}(4k-1)^2 + \ln^2\left(2+\sqrt{3}\right)}\right)\exp\left(z\frac{\pi(4k-1)}{\frac{\pi^2}{4}(4k-1)^2 + \ln^2\left(2+\sqrt{3}\right)}\right).$$

QUARTO PROBLEMA (PUNTEGGIO 3/30)

Dopo aver definito i domini di convergenza, D_1 e D_2, delle rappresentazioni

$$R_1(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(z+2j+1)^2}, \qquad R_2(z) = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{t e^{-zt}}{\cosh(t)} dt,$$

si dimostri che sono l'una la continuazione analitica dell'altra.

SOLUZIONE DEL QUARTO PROBLEMA

La rappresentazione $R_1(z)$ è lo sviluppo di Mittag-Leffler di una funzione meromorfa che ha poli doppi negli opposti dei numeri dispari, ovvero nei punti dell'insieme $\{z_j = -2j-1\}_{j=0}^{\infty}$. I coefficienti della parte principale della serie di Laurent centrata nel j-esimo polo $z_j = -2j-1$, con $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, sono: $C_{-2}^{(j)} = (-1)^j$ e $C_{-1}^{(j)} = 0$, da cui consegue che i residui sono nulli. Infine, la parte intera della funzione, che ha il suo stesso comportamento asintotico, è nulla. Alla luce di queste considerazioni si ha che il dominio di convergenza D_1 non è altro che il piano complesso $\mathbb{C}$ privato dei poli, cioè,

$$D_1 = \mathbb{C}/\{z_j = -2j-1\}_{j=0}^{\infty}.$$

Il dominio di convergenza della rappresentazione $R_2(z)$ si ottiene richiedendo l'integrabilità. La funzione integranda non ha singolarità interne al percorso d'integrazione, che è la semi-retta dei reali positivi $[0,\infty]$. Gli unici punti potenzialmente critici sono gli estremi. Nell'origine $t=0$, indipendentemente dai valori di z, la funzione integranda è nulla ed è quindi integrabile. Per avere l'integrabilità all'infinito è necessario che la stessa funzione integranda sia un infinitesimo di rodine superiore a $1/t$, ovvero

$$\left|\frac{1}{2}\frac{t e^{-zt}}{\cosh(t)}\right| = o(1/t), \qquad t \to \infty.$$

Per verificarlo ne studiamo il comportamento in modulo nel limite $t \to \infty$, si ha

$$\left|\frac{1}{2}\frac{t e^{-zt}}{\cosh(t)}\right| = \frac{t\,|e^{-zt}|}{e^t + e^{-t}} = \frac{t\left|e^{-t(z+1)}\right|}{1+e^{-2t}} = \frac{t e^{-t\mathrm{Re}(z+1)}}{1+e^{-2t}},$$

data la presenza dell'esponenziale, il modulo è infinitesimo solo se

$$\mathrm{Re}(z+1) > 0 \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{Re}(z) > -1,$$

inoltre, in questo caso, si tratta di un infinitesimo di ordine superiore a qualsiasi potenza intera di $1/t$. Da ciò segue che il dominio di convergenza della rappresentazione $R_2(z)$ è il semipiano delle parti reali maggiori di -1, ovvero

$$D_2 = \{z : \mathrm{Re}(z) > -1\},$$

è immediato osservare che vale l'inclusione $D_2 \subset D_1$.
Per dimostrare quanto richiesto, dobbiamo verificare che le due rappresentazioni coincidono nell'intersezione dei domini. A tal fine, manipoliamo la rappresentazione integrale $R_1(z)$ per ottenere la rappresentazione in forma di serie $R_2(z)$. Scriviamo la funzione coseno iperbolico in termini degli esponenziali e mettiamo in evidenza quello positivo, così da ottenere la forma

$$R_2(z) = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{t e^{-zt}}{\cosh(t)} dt = \int_0^{\infty} \frac{t e^{-t(z+1)}}{1+e^{-2t}} dt.$$

Per ogni valore della variabile d'integrazione $t \in (0,\infty)$ si ha $e^{-2t} < 1$, il fattore $1/\left(1+e^{-2t}\right)$ rappresenta la somma della serie geometrica di ragione $-e^{-2t}$, quindi

$$R_2(z) = \int_0^{\infty} t e^{-t(z+1)} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j e^{-2tj} dt.$$

La serie converge uniformemente, possiamo estrarre la somma dall'integrale e, integrando per parti, si ottiene

$$R_2(z) = \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j \int_0^{\infty} t e^{-t(z+2j+1)} dt = \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j \left(\underbrace{\left.\frac{t e^{-t(z+2j+1)}}{-z-2j-1}\right|_0^{\infty}}_{0} + \frac{1}{z+2j+1}\int_0^{\infty} e^{-t(z+2j+1)} dt \right),$$

il non annullamento del denominatore e l'annullamento del numeratore del primo termine dell'ultimo membro, nel limite $t \to \infty$, sono garantiti dalla condizione

$$\mathrm{Re}(z) + 2j + 1 > 0\,, \qquad \forall\, j = 0, 1, 2, \dots\,,$$

vera $\forall\, z \in D_2$. Un'ulteriore integrazione permette di ottenere la rappresentazione $R_1(z)$, infatti

$$R_2(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{z + 2j + 1} \int_0^{\infty} e^{-t(z+2j+1)} dt = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(z + 2j + 1)^2} = R_1(z)\,.$$

Questa identità dimostra quanto richiesto.

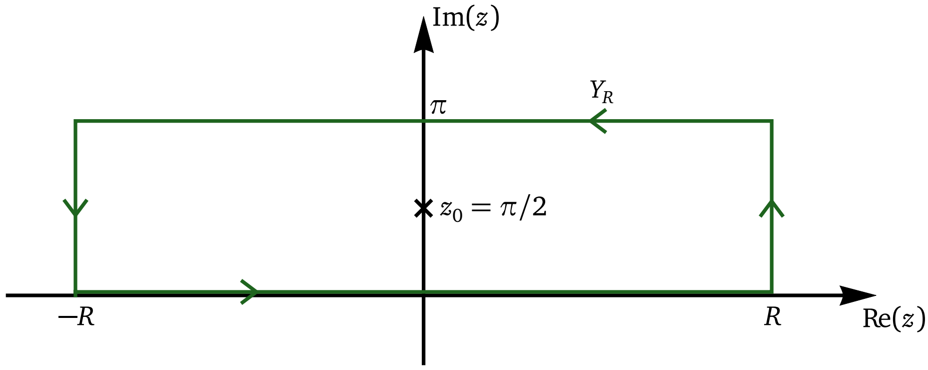
Quinto problema (punteggio 3,5/30)

Si calcoli l'integrale

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,\mathrm{sen}(x)}{\cosh(x)} dx\,.$$

Soluzione del quinto problema

La funzione integranda ha poli semplici in corrispondenza degli zeri della funzione coseno iperbolico, ovvero nei punti dell'insieme $\{z_k = i\pi(k + 1/2)\}_{k\in\mathbb{Z}}$, i multipli dispari di $i\pi/2$.



Consideriamo il percorso d'integrazione mostrato in figura. Si tratta del rettangolo

$$Y_R = S(-R, R) \cup S(R, R + i\pi) \cup S(R + i\pi, -R + i\pi) \cup S(-R + i\pi, R)\,,$$

dove il simbolo $S(a, b)$ indica il segmento di estremi a e b orientato da a verso b. Tale rettangolo Y_R, $\forall\, R > 0$, contiene un solo polo della funzione integranda, $z_0 = i\pi/2$, quindi l'integrale su Y_R della stessa funzione integranda vale

$$E_R \equiv \oint_{Y_R} \frac{z\,\mathrm{sen}(z)}{\cosh(z)} dz = 2i\pi\,\mathrm{Res}\left[\frac{z\,\mathrm{sen}(z)}{\cosh(z)}, z_0\right] = 2i\pi \frac{i\pi}{2} \frac{\mathrm{sen}(i\pi/2)}{\mathrm{senh}(i\pi/2)} = -\pi^2 \frac{i\,\mathrm{senh}(\pi/2)}{i} = -\pi^2 \mathrm{senh}\left(\frac{\pi}{2}\right). \tag{2}$$

Lo stesso integrale E_R può essere scritto come somma dei quattro contributi relativi ai quattro tratti rettilinei, si ha

$$E_R = \int_{S(-R,R)} \frac{z\,\mathrm{sen}(z)}{\cosh(z)} dz + \int_{S(R+i\pi,-R+i\pi)} \frac{z\,\mathrm{sen}(z)}{\cosh(z)} dz + \int_{S(R,R+i\pi)} \frac{z\,\mathrm{sen}(z)}{\cosh(z)} dz + \int_{S(-R+i\pi,-R)} \frac{z\,\mathrm{sen}(z)}{\cosh(z)} dz\,.$$

Riscriviamo i quattro integrali facendo, rispettivamente, le seguenti sostituzioni: $z = x$, $z = x + i\pi$, $z = R + iy$ e $z = -R + iy$,

$$
\begin{aligned}
E_R &= \int_{-R}^{R} \frac{x\,\mathrm{sen}(x)}{\cosh(x)}dx - \int_{-R}^{R} \frac{(x+i\pi)\,\mathrm{sen}(x+i\pi)}{\cosh(x+i\pi)}dx \\
&\quad + i\int_0^{\pi} \frac{(R+iy)\mathrm{sen}(R+iy)}{\cosh(R+iy)}dy - i\int_0^{\pi} \frac{(-R+iy)\mathrm{sen}(-R+iy)}{\cosh(-R+iy)}dy \\
&= \int_{-R}^{R} \frac{x\,\mathrm{sen}(x)}{\cosh(x)}dx + \int_{-R}^{R} \frac{(x+i\pi)\,[\mathrm{sen}(x)\cosh(\pi) + i\cos(x)\mathrm{senh}(\pi)]}{\cosh(x)}dx \\
&\quad + i\int_0^{\pi} \frac{(R+iy)\mathrm{sen}(R+iy)}{\cosh(R+iy)}dy - i\int_0^{\pi} \frac{(-R+iy)\mathrm{sen}(-R+iy)}{\cosh(-R+iy)}dy \\
&= \int_{-R}^{R} \frac{x\,\mathrm{sen}(x)}{\cosh(x)}dx + \int_{-R}^{R} \frac{x\mathrm{sen}(x)\cosh(\pi) - \pi\cos(x)\mathrm{senh}(\pi)}{\cosh(x)}dx \\
&\quad + i\int_0^{\pi} \frac{(R+iy)\mathrm{sen}(R+iy)}{\cosh(R+iy)}dy - i\int_0^{\pi} \frac{(-R+iy)\mathrm{sen}(-R+iy)}{\cosh(-R+iy)}dy \\
&= (1+\cosh(\pi))\int_{-R}^{R} \frac{x\,\mathrm{sen}(x)}{\cosh(x)}dx - \pi\,\mathrm{senh}(\pi)\int_{-R}^{R} \frac{\cos(x)}{\cosh(x)}dx \\
&\quad + i\int_0^{\pi} \frac{(R+iy)\mathrm{sen}(R+iy)}{\cosh(R+iy)}dy - i\int_0^{\pi} \frac{(-R+iy)\mathrm{sen}(-R+iy)}{\cosh(-R+iy)}dy\,,
\end{aligned}
\tag{3}
$$

la penultima identità è stata ottenuta elidendo gli integrali delle funzioni dispari come quelle proporzionali alle funzioni

$$
\frac{\mathrm{sen}(x)}{\cosh(x)}\,, \qquad \frac{x\cos(x)}{\cosh(x)}\,,
$$

in quanto nulli, essendo simmetrico l'intervallo di integrazione. Consideriamo i valori limite, per $R \to \infty$, delle due espressioni di E_R, l'una in termini del residuo e l'altra in termini della somma dei contributi dei quattro tratti rettilinei del percorso Y_R, date rispettivamente nelle equazioni (2) e (3), abbiamo

$$
\lim_{R\to\infty} E_R = \lim_{R\to\infty} \oint_{Y_R} \frac{z\,\mathrm{sen}(z)}{\cosh(z)}dz = -\pi^2 \mathrm{senh}\left(\frac{\pi}{2}\right)\,; \tag{4}
$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{R\to\infty} E_R &= \lim_{R\to\infty} \Bigg[(1+\cosh(\pi))\int_{-R}^{R} \frac{x\,\mathrm{sen}(x)}{\cosh(x)}dx - \pi\,\mathrm{senh}(\pi)\int_{-R}^{R} \frac{\cos(x)}{\cosh(x)}dx \\
&\quad + i\int_0^{\pi} \frac{(R+iy)\mathrm{sen}(R+iy)}{\cosh(R+iy)}dy - i\int_0^{\pi} \frac{(-R+iy)\mathrm{sen}(-R+iy)}{\cosh(-R+iy)}dy \Bigg] \\
&= (1+\cosh(\pi))\,E - \pi\,\mathrm{senh}(\pi) F\,,
\end{aligned}
\tag{5}
$$

dove si è posto

$$
F = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{\cosh(x)}dx\,,
$$

e, per i contributi sui tratti verticali, si sono usati i valori limite

$$
\lim_{R\to\infty} \int_0^{\pi} \frac{(\pm R+iy)\mathrm{sen}(\pm R+iy)}{\cosh(\pm R+iy)}dy = 0\,.
$$

Dimostriamo l'annullamento di questi integrali, nel limite $R \to \infty$, usando la disuguaglianza di Darboux. Procediamo minorandone i moduli come segue

$$
\left| \int_0^{\pi} \frac{(\pm R+iy)\,\mathrm{sen}(\pm R+iy)}{\cosh(\pm R+iy)}dy \right| \le \int_0^{\pi} \frac{(R+\pi)\left|e^{\pm iR-y} - e^{\mp iR+y}\right|}{|e^{\pm R+iy} + e^{\mp R-iy}|}dy\,,
$$

dove abbiamo usato la disuguaglianza triangolare: $|\pm R + iy| \leq R + y$ e quindi abbiamo considerato il valore massimo di y, ovvero $y = \pi$. Il modulo a numeratore può essere minorato, sempre sfruttando la disuguaglianza triangolare, e si ha

$$\left|e^{\pm iR - y} - e^{\mp iR + y}\right| \leq e^{-y} + e^{y} = 2\cosh(y)\,.$$

Per il denominatore, invece, usiamo la maggiorazione

$$\left|e^{\pm R + iy} + e^{\mp R - iy}\right| \geq \left|e^{\pm R} - e^{\mp R}\right| = 2|\mathrm{senh}(R)|\,.$$

In definitiva avremo l'integrale della sola funzione coseno iperbolico moltiplicato per un termine infinitesimo nel limite considerato, $R \to \infty$, ovvero

$$\begin{aligned}\left|\int_0^{\pi} \frac{(\pm R + iy)\,\mathrm{sen}(\pm R + iy)}{\cosh(\pm R + iy)}dy\right| \;&\leq\; \int_0^{\pi} \frac{(R+\pi)\left|e^{\pm iR - y} - e^{\mp iR + y}\right|}{|e^{\pm R + iy} + e^{\mp R - iy}|}dy \\ &\leq\; \frac{R+\pi}{\mathrm{senh}(R)}\int_0^{\pi}\cosh(y)dy = \frac{R+\pi}{\mathrm{senh}(R)}\mathrm{senh}(\pi) \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0\,.\end{aligned}$$

Uguagliando le due espressioni delle equazioni (4) e (5) possiamo ottenere l'integrale cercato nella forma

$$E = \frac{\pi\,\mathrm{senh}(\pi)F - \pi^2\,\mathrm{senh}\,(\pi/2)}{1 + \cosh(\pi)} = \pi\,\mathrm{senh}(\pi/2)\frac{2\cosh(\pi/2)F - \pi}{2\,\cosh^2(\pi/2)}\,. \tag{6}$$

Dobbiamo calcolare l'integrale F, per farlo usiamo la stessa procedura, ovvero definiamo l'integrale F_R come

$$F_R = \oint_{\gamma_R} \frac{\cos(z)}{\cosh(z)}dz,$$

e studiamo le sue due espressioni in termini del residuo in $z_0 = i\pi/2$ e dei contributi sui tratti rettilinei, sempre nel limite $R \to \infty$. Si hanno

$$\lim_{R\to\infty} F_R = \lim_{R\to\infty}\oint_{\gamma_R}\frac{\cos(z)}{\cosh(z)}dz = 2i\pi\mathrm{Res}\left[\frac{\cos(z)}{\cosh(z)}, i\pi/2\right] = 2\pi\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right)\,; \tag{7}$$

$$\begin{aligned}\lim_{R\to\infty} F_R &= \lim_{R\to\infty}\left(\int_{-R}^{R}\frac{\cos(x)}{\cosh(x)}dx - \int_{-R}^{R}\frac{\cos(x+i\pi)}{\cosh(x+i\pi)}dx + i\int_0^{\pi}\frac{\cos(R+iy)}{\cosh(R+iy)}dy - i\int_0^{\pi}\frac{\cos(-R+iy)}{\cosh(-R+iy)}dy\right) \\ &= F + \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(x)\cosh(\pi) - i\mathrm{sen}(x)\mathrm{senh}(\pi)}{\cosh(x)}dx \\ &= (1+\cosh(\pi))F = 2\cosh^2(\pi/2)F\,,\end{aligned} \tag{8}$$

anche in questo caso abbiamo posto a zero gli integrali di funzioni dispari e i limiti dei contributi sui tratti verticali. Dimostriamo l'annullamento di tali limiti minorando i moduli degli integrali

$$\left|\int_0^{\pi}\frac{\cos(\pm R + iy)}{\cosh(\pm R + iy)}dy\right| \leq \int_0^{\pi}\frac{\left|e^{\pm iR - y} + e^{\mp iR + y}\right|}{|e^{\pm R + iy} + e^{\mp R - iy}|}dy\,,$$

usiamo la disuguaglianza triangolare a numeratore e denominatore nelle forme

$$\left|e^{\pm iR - y} + e^{\mp iR + y}\right| \leq e^{-y} + e^{y} = 2\cosh(y)\,, \qquad \left|e^{\pm R + iy} + e^{\mp R - iy}\right| \geq \left|e^{\pm R} - e^{\mp R}\right| = 2|\mathrm{senh}(R)|\,,$$

quindi si arriva alla minorazione con una funzione infinitesima nel limite $R \to \infty$, ovvero

$$\left|\int_0^{\pi}\frac{\cos(\pm R + iy)}{\cosh(\pm R + iy)}dy\right| \;\leq\; \int_0^{\pi}\frac{\left|e^{\pm iR - y} + e^{\mp iR + y}\right|}{|e^{\pm R + iy} + e^{\mp R - iy}|}dy \leq \frac{1}{\mathrm{senh}(R)}\int_0^{\pi}\cosh(y)dy = \frac{\mathrm{senh}(\pi)}{\mathrm{senh}(R)} \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

Uguagliando le due espressioni delle equazioni (7) e (8), si ottiene

$$F = \frac{2\pi\cosh(\pi/2)}{2\cosh^2(\pi/2)} = \frac{\pi}{\cosh(\pi/2)}\,.$$

Sostituendo questo risultato nell'equazione (6), otteniamo il valore dell'integrale

$$E = \pi \frac{\operatorname{senh}(\pi/2)}{2\cosh^2(\pi/2)} \left(2\cosh(\pi/2)F - \pi\right) = \pi^2 \frac{\operatorname{senh}(\pi/2)}{2\cosh^2(\pi/2)} ,$$

in definitiva

$$E = \frac{\pi^2}{2} \frac{\tanh(\pi/2)}{\cosh(\pi/2)} .$$

Sesto problema (punteggio 3/30)

Si determinino il dominio di convergenza, D, e lo sviluppo di Mittag-Leffler della funzione

$$f(z) = \int_0^1 \operatorname{senh}(t^z)\, dt .$$

Si ottengano, quindi, l'insieme dei poli e quello dei coefficienti delle parti principali delle rispettive serie di Laurent.

Soluzione del sesto Problema

Lo sviluppo in serie di Taylor centrato nell'origine $t = 0$ della funzione integranda si ottiene da quello della funzione seno iperbolico ed è

$$\operatorname{senh}(t^z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^{z(2j+1)}}{(2j+1)!} .$$

Poiché si ha convergenza uniforme, è possibile integrare termine a termine, avremo quindi

$$f(z) = \int_0^1 \operatorname{senh}(t^z)\, dt = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j+1)!} \int_0^1 t^{z(2j+1)} dt .$$

Affinché ciascun termine sia integrabile nell'origine è necessario richiedere che

$$\operatorname{Re}[z(2j+1)] > -1 , \qquad \forall\, j = 0, 1, \ldots ,$$

questo implica

$$\operatorname{Re}(z) \geq \sup_{j=0,1,\ldots} \left\{ \frac{-1}{2j+1} \right\} = 0 .$$

Ne consegue che il dominio di convergenza dell'integrale che rappresenta la funzione $f(z)$ è il semipiano delle parti reali positive, $D = \{z : \operatorname{Re}(z) \geq 0\}$.
L'integrazione termine a termine dà lo sviluppo di Mittag-Leffler, infatti

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j+1)!} \left. \frac{t^{z(2j+1)+1}}{z(2j+1)+1} \right|_0^1 = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j+1)!} \frac{1}{z(2j+1)+1} .$$

Riscriviamo la serie isolando la variabile z a denominatore

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j)!(2j+1)^2} \frac{1}{z + 1/(2j+1)} ,$$

tale serie rappresenta lo sviluppo di Mittag-Leffler della funzione $f(z)$. Da questo si deduce che la funzione ha solo poli semplici coincidenti con gli opposti degli inversi dei numeri dispari, quindi l'insieme dei poli è

$$\left\{ z_j = -\frac{1}{2j+1} \right\}_{j=0}^{\infty} .$$

Inoltre l'insieme dei residui di questi poli, ovvero dei coefficienti "−1" delle serie di Laurent, è

$$\left\{ C_{-1}^{(j)} = \frac{1}{(2j)!(2j+1)^2} \right\}_{j=0}^{\infty} .$$