Metodi Matematici per la Fisica

Primo esonero - 26 febbraio 2016

Si risolvano cortesemente i seguenti problemi.

Primo problema (punteggio: 3/30)

Si ottenga il valore dell'integrale

$$N = \oint_{|z|=1} \frac{z^2+1}{\operatorname{senh}(1/z)} dz \,.$$

Soluzione del primo problema

Con la sostituzione $w = 1/z$ l'integrale diventa

$$N = -\oint_{|w|=1} \frac{1/w^2+1}{\operatorname{senh}(w)} \left(-\frac{dw}{w^2}\right) = \oint_{|w|=1} \frac{w^2+1}{w^4 \operatorname{senh}(w)} dw \,,$$

dove il primo segno meno si ha in quanto il cammino di integrazione è ancora la circonferenza unitaria ma percorsa in senso orario, ovvero in senso negativo. L'integranda ha solo singolarità polari, in particolare si hanno i poli

$$w_k = ik\pi \,, \qquad k \in \mathbb{Z} \,.$$

Ad eccezione del polo nell'origine, w_0, che è di ordine cinque, tutti gli altri sono semplici. Il polo w_0 è anche l'unico interno alla circonferenza unitaria, quindi

$$N = \oint_{|w|=1} \frac{w^2+1}{w^4 \operatorname{senh}(w)} dw = 2i\pi \operatorname{Res}\left[\frac{w^2+1}{w^4 \operatorname{senh}(w)}, w = w_0\right] .$$

Il residuo può essere calcolato con due metodi, il primo si rifà alla formula di Cauchy per la derivata, ovvero

$$\operatorname{Res}\left[\frac{w^2+1}{w^4 \operatorname{senh}(w)}, w = 0\right] = \frac{1}{4!} \frac{d^4}{dw^4} \frac{w(w^2+1)}{\operatorname{senh}(w)}\bigg|_{w=0}$$

ed è molto laborioso. Il secondo sfrutta lo sviluppo noto del seno iperbolico

$$\operatorname{senh}(w) = w + \frac{w^3}{3!} + \frac{w^5}{5!} + \dots \,,$$

per ottenere i primi termini della serie di Laurent dell'integranda, così da ricavare il residuo come il coefficiente C_{-1}. In dettaglio, nel limite $w \to 0$, si ha

$$\begin{aligned}
\frac{w^2+1}{w^4 \operatorname{senh}(w)} &= \frac{w^2+1}{w^4}\left(w + \frac{w^3}{3!} + \frac{w^5}{5!} + \dots\right)^{-1} = \left(\frac{1}{w^3} + \frac{1}{w^5}\right)\left(1 + \frac{w^2}{3!} + \frac{w^4}{5!} + \dots\right)^{-1} \\
&= \left(\frac{1}{w^3} + \frac{1}{w^5}\right)\left[1 - \left(\frac{w^2}{3!} + \frac{w^4}{5!} + \dots\right) + \left(\frac{w^2}{3!} + \frac{w^4}{5!} + \dots\right)^2 + \dots\right] \\
&= \frac{1}{w^5} + \frac{1}{w^3}\left(1 - \frac{1}{3!}\right) + \frac{1}{w}\underbrace{\left(-\frac{1}{3!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{(3!)^2}\right)}_{C_{-1}} + \dots \,,
\end{aligned}$$

da cui

$$\operatorname{Res}\left[\frac{w^2+1}{w^4 \operatorname{senh}(w)}, w=0\right] = C_{-1} = -\frac{1}{3!}\left(1+\frac{1}{4\cdot 5}-\frac{1}{3!}\right) = -\frac{1}{6}\frac{60+3-10}{60} = -\frac{53}{360}.$$

In definitiva l'integrale vale

$$N = 2i\pi \operatorname{Res}\left[\frac{w^2+1}{w^4 \operatorname{senh}(w)}, w=0\right] = 2i\pi C_{-1} = -\frac{53i\pi}{180}.$$

Secondo problema (punteggio 3/30)

Si calcoli l'integrale in valore principale

$$A = \operatorname{Pr}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\operatorname{sen}^2(a)}{1-2\cos(a)} da.$$

Soluzione del secondo problema

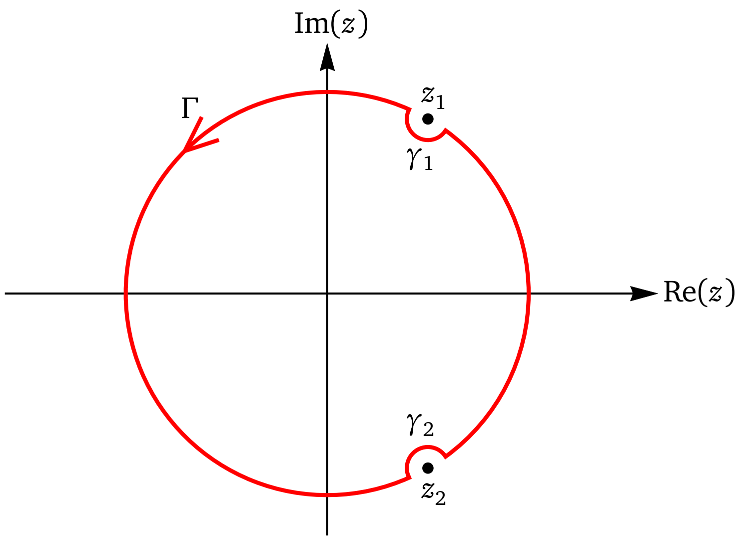
Con la sostituzione $z = e^{ia}$ e $da = -idz/z$, l'integrale diventa

$$A = \operatorname{Pr}\oint_{|z|=1} \frac{-(z-1/z)^2/4}{1-z-1/z}\frac{dz}{iz} = \frac{1}{4i}\operatorname{Pr}\oint_{|z|=1} \frac{(z^2-1)^2}{z^2(z^2-z+1)} dz.$$

L'integranda ha un polo doppio nell'origine, $z_0 = 0$, e i due poli semplici

$$z_{1,2} = 1/2 \pm i\sqrt{3}/2 = e^{\pm i\pi/3},$$

appartenenti alle circonferenza unitaria, ovvero al percorso di integrazione, sui quali si considera il valore principale.



Definiamo il percorso chiuso, Γ, dentato verso l'interno intorno ai punti z_1 e z_2, come mostrato in figura. Gli archi γ_1 e γ_2 hanno raggio ϵ e sono centrati rispettivamente in z_1 e z_2. Nel limite $\epsilon \to 0^+$ si ha

$$2i\pi \operatorname{Res}\left[\frac{(z^2-1)^2}{4iz^2(z^2-z+1)}, z=0\right] = \lim_{\epsilon\to 0^+}\frac{1}{4i}\oint_{\Gamma} \frac{(z^2-1)^2}{z^2(z^2-z+1)} dz = A + \frac{1}{4i}\lim_{\epsilon\to 0^+}\oint_{(-\gamma_1)\cup(-\gamma_2)} \frac{(z^2-1)^2}{z^2(z^2-z+1)} dz.$$

I contributi degli archi infinitesimi γ_1 e γ_2 sono opposti

$$\lim_{\epsilon\to 0^+}\frac{1}{4i}\oint_{-\gamma_{1,2}}\frac{(z^2-1)^2}{z^2(z^2-z+1)}dz=-i\pi G_{1,2}\,,$$

dove G_1 e G_2 rappresentano i valori dei limiti uniformi

$$G_{1,2}=\lim_{\epsilon\to 0^+}\frac{(z^2-1)^2}{4iz^2(z^2-z+1)}(z-z_{1,2})=\frac{(z_{1,2}-1/z_{1,2})^2}{4i(z_{1,2}-z_{2,1})}=\frac{-4\,\mathrm{sen}^2(\pm\pi/3)}{\mp 4\sqrt{3}}=\pm\frac{\sqrt{3}}{4}\,.$$

La somma dei due si annulla, ne consegue che l'integrale cercato coincide con $2i\pi$ volte il residuo nell'origine, cioè

$$A=2i\pi\,\mathrm{Res}\left[\frac{(z^2-1)^2}{4iz^2(z^2-z+1)},z=0\right]=2i\pi\frac{d}{dz}\frac{(z^2-1)^2}{4i(z^2-z+1)}\bigg|_{z=0}=\frac{\pi}{2}\frac{d}{dz}\frac{(z^2-1)^2}{(z^2-z+1)}\bigg|_{z=0}$$
$$=\frac{\pi}{2}\frac{4z(z^2-1)(z^2-z+1)-(2z-1)(z^2-1)^2}{(z^2-z+1)^2}\bigg|_{z=0}=\frac{\pi}{2}\,.$$

Terzo problema (punteggio 3/30)

Si dimostri l'identità

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{z+k^2}=\frac{\pi}{2\sqrt{z}\,\mathrm{senh}(\pi\sqrt{z})}-\frac{1}{2z}\,.$$

Suggerimento. In questo caso potrebbe essere utile il teorema dei residui.

Soluzione del terzo problema

Per ottenere la somma della serie si sfrutta il teorema dei residui secondo la seguente procedura. Il termine della serie è pari in k, quindi possiamo estendere la somma su tutto $\mathbb{Z}$, ovvero

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{z+k^2}=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{z+k^2}+\sum_{k=-\infty}^{-1}\frac{(-1)^k}{z+k^2}+\frac{1}{z}-\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^k}{z+k^2}-\frac{1}{2z}\,.$$

La serie può essere posta nella forma

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k f(k)\,,$$

dove

$$f(w)=\frac{1}{z+w^2}\,.$$

Definiamo la funzione

$$F(w)=\frac{\pi}{\mathrm{sen}(\pi w)}f(w)=\frac{\pi}{\mathrm{sen}(\pi w)}\frac{1}{z+w^2}\,,$$

che ha i poli, dovuti al seno, nei punti dell'insieme $\{k\}_{k\in\mathbb{Z}}$, più i due, della funzione $f(w)$, nei punti $w_{1,2}=\pm i\sqrt{z}$. Consideriamo l'integrale sulla circonferenza centrata nell'origine e di raggio $(2m+1)/2$, $m\in\mathbb{N}$,

$$\oint_{|w|=(2m+1)\pi/2}\frac{\pi}{\mathrm{sen}(\pi w)}\frac{1}{z+w^2}dw=2i\pi\left(\sum_{|k|\le m}\mathrm{Res}\left[F(w),k\right]+\mathrm{Res}\left[F(w),i\sqrt{z}\right]+\mathrm{Res}\left[F(w),-i\sqrt{z}\right]\right)\,.$$

Dimostriamo che l'integrale si annulla nel limite $m \to \infty$. A tal fine è necessario verificare che la funzione $wF(w)$ tenda uniformemente a zero sulle circonferenze $|w| = (m+1/2)$, al divergere di m.
Posto $w = (m+1/2)e^{i\theta}$, con $\theta \in [0, 2\pi]$, ovvero w appartiene alla circonferenza centrata nell'origine, raggio $(m+1/2)$, usiamo per il seno l'espansione di Weierstrass

$$\sin(w) = w \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{w^2}{(k\pi)^2} \right) .$$

In particolare si ha

$$|\text{sen}(\pi w)| = |\pi w| \prod_{k=1}^{\infty} \left| 1 - \frac{w^2}{k^2} \right| \geq \pi |w| \prod_{k=1}^{\infty} \left| 1 - \frac{|w|^2}{k^2} \right| = \pi(m+1/2) \prod_{k=1}^{\infty} \left| 1 - \frac{(m+1/2)^2}{k^2} \right| ,$$

dove si è usato $w = e^{i\theta}(m+1/2)$. Dall'ultima identità, manipolando il prodotto infinito, si ottiene

$$\begin{aligned}
|\text{sen}(\pi w)| &\geq \pi(m+1/2) \prod_{k=1}^{\infty} \left| 1 - \frac{(m+1/2)^2}{k^2} \right| \\
|\text{sen}(\pi w)| &\geq \pi(m+1/2) \prod_{k=1}^{m} \left(-1 + \frac{(m+1/2)^2}{k^2} \right) \prod_{k=m+1}^{\infty} \left(1 - \frac{(m+1/2)^2}{k^2} \right) \\
|\text{sen}(\pi w)| &\geq (-1)^m \pi(m+1/2) \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{(m+1/2)^2}{k^2} \right) \\
\text{sen}(\pi w)| &\geq (-1)^m \text{sen}\big((m+1/2)\pi\big) = (-1)^{2m} \\
|\text{sen}(\pi w)| &\geq 1 .
\end{aligned}$$

Segue che

$$\left| \frac{\pi w}{\text{sen}(\pi w)} \frac{1}{z+w^2} \right| \leq \frac{\pi(m+1/2)}{|z+w^2|} \leq \frac{\pi(m+1/2)}{\big| |z| - |w|^2 \big|} = \frac{\pi(m+1/2)}{\big| |z| - \pi^2(m+1/2)^2 \big|} = \mu_m ,$$

la funzione μ_m è reale, positiva e limita uniformemente il modulo di $wF(w)$ sulle circonferenze $|w| = (m+1/2)$, $m \in \mathbb{N}$, poiché

$$\lim_{m \to \infty} \mu_m = 0 ,$$

si ha il limite uniforme cercato

$$\lim_{m \to \infty} wF(w) = \lim_{m \to \infty} \frac{\pi w}{\text{sen}(\pi w)} \frac{1}{z+w^2} \overset{\text{unif.}}{=} 0 .$$

Ne consegue che

$$0 = \lim_{m \to \infty} \frac{1}{2i\pi} \oint_{|w|=(2m+1)\pi/2} \frac{\pi}{\text{sen}(\pi w)} \frac{1}{z+w^2} dw = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{Res}\,[F(w), k] + \text{Res}\left[F(w), i\sqrt{z}\right] + \text{Res}\left[F(w), -i\sqrt{z}\right] .$$

I residui sono

$$\begin{aligned}
\text{Res}\,[F(w), k] &= \frac{(-1)^k}{z+k^2} , \\
\text{Res}\left[F(w), \pm i\sqrt{z}\right] &= \frac{\pi}{\text{sen}(\pm i\pi)} \frac{1}{\pm 2i\sqrt{z}} = \frac{\pi}{\text{sen}(i\pi\sqrt{z})} \frac{1}{2i\sqrt{z}} = -\frac{\pi}{2\sqrt{z}\,\text{senh}(\pi\sqrt{z})} ,
\end{aligned}$$

quindi, sfruttando quanto ottenuto in precedenza,

$$0 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{Res}\left[F(w), k\right] + \text{Res}\left[F(w), i\sqrt{z}\right] + \text{Res}\left[F(w), -i\sqrt{z}\right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k}{z+k^2} - \frac{\pi}{\sqrt{z}\,\text{senh}(\pi\sqrt{z})},$$

da cui si ottiene la somma della serie completa

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k}{z+k^2} = \frac{\pi}{\sqrt{z}\,\text{senh}(\pi\sqrt{z})}.$$

La serie cercata, ovvero la somma sui soli naturali, è

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{z+k^2} == \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k}{z+k^2} - \frac{1}{2z} = \frac{\pi}{2\sqrt{z}\,\text{senh}(\pi\sqrt{z})} - \frac{1}{2z}.$$

Quarto problema (punteggio 3/30)

Si determini lo sviluppo di Mittag-Leffler della funzione

$$f(z) = \frac{\cos(z)}{\text{sen}^2(z)}.$$

Suggerimento. In questo caso potrebbe essere utile lo sviluppo di Mittag-Leffler dell'inverso della funzione seno.

Soluzione del quarto problema

La funzione da studiare è l'opposto della derivata dell'inverso del seno, infatti

$$f(z) = -\frac{d}{dz}\frac{1}{\text{sen}(z)} = \frac{\cos(z)}{\text{sen}^2(z)}.$$

Per la condizione di convergenza uniforme della serie di Mittag-Leffler si può ottenere quella desiderata derivando termine a termine la serie dell'inverso del seno che si ottiene a partire dalla funzione

$$h(z) = \frac{1}{\text{sen}(z)} - \frac{1}{z}.$$

Questa funzione ha solo poli semplici nei punti dell'insieme $\{k\pi\}_{k\neq 0}$, ovvero non ha il polo nell'origine. Infatti si ha

$$h(0) = \lim_{z\to 0}\left(\frac{1}{\text{sen}(z)} - \frac{1}{z}\right) = \lim_{z\to 0}\frac{z-\text{sen}(z)}{z\,\text{sen}(z)} = \lim_{z\to 0}\frac{1-\cos(z)}{\text{sen}(z)+z\cos(z)} = \lim_{z\to 0}\frac{\text{sen}(z)}{2\cos(z)-z\,\text{sen}(z)} = 0.$$

I residui sono

$$R_k = \frac{1}{\cos(k\pi)} = (-1)^k, \qquad \forall \neq 0.$$

Lo sviluppo ha la forma

$$h(z) = h_0(z) + \sum_{k\neq 0}\frac{R_k}{z-z_k} = h_0(z) + \sum_{k\neq 0}\frac{(-1)^k}{z-k\pi},$$

dove $h_0(0)$ è la parte intera di $h(z)$. Tale parte intera è costante, infatti l'inverso del seno e $1/z$ non hanno singolarità all'infinito. Possiamo determinare h_0 valutando la funzione nell'origine

$$h_0 = h(0) - \sum_{k\neq 0}\frac{(-1)^k}{-k\pi} = \sum_{k\neq 0}\frac{(-1)^k}{k\pi} = 0.$$

Sostituendo

$$h(z) = \frac{1}{\mathrm{sen}(z)} - \frac{1}{z} = \sum_{k\neq 0} \frac{(-1)^k}{z-k\pi} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \left(\frac{1}{z-k\pi} + \frac{1}{z+k\pi} \right) ,$$

quindi per l'inverso del seno

$$\frac{1}{\mathrm{sen}(z)} = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \left(\frac{1}{z-k\pi} + \frac{1}{z+k\pi} \right) .$$

Infine la funzione $f(z)$ si ottiene come

$$\begin{aligned}
f(z) &= -\frac{d}{dz}\frac{1}{\mathrm{sen}(z)} \\
f(z) &= -\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \left(\frac{1}{z-k\pi} + \frac{1}{z+k\pi} \right) \right] \\
f(z) &= \frac{1}{z^2} + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \left[\frac{1}{(z-k\pi)^2} + \frac{1}{(z+k\pi)^2} \right] .
\end{aligned}$$

Una procedura alternativa, avendo in prospettiva la derivazione dello sviluppo di Mittag-Leffler della funzione $1/\mathrm{sen}(z)$, consiste nell'ottenere direttamente tale sviluppo, senza sottrarre il polo nell'origine, mantenendo incognita la parte intera costante. Ovvero

$$\frac{1}{\mathrm{sen}(z)} = c_0 + \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{(-1)^{-1}}{z-k\pi} ,$$

dove c_0 rappresenta la parte intera costante. Lo sviluppo cercato è quindi

$$f(z) = -\frac{d}{dz}\frac{1}{\mathrm{sen}(z)} = -\frac{d}{dz}\left(c_0 + \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{(-1)^{-1}}{z-k\pi} \right) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{(-1)^{-1}}{(z-k\pi)^2} = \frac{1}{z^2} + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \left[\frac{1}{(z-k\pi)^2} + \frac{1}{(z+k\pi)^2} \right] .$$

Quinto problema (punteggio 2.5/30)

Si determini la prima serie di Laurent della funzione

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)(z^2+3)} ,$$

con centro nel punto $z = -1$.

Soluzione del quinto problema

La funzione ha i tre poli semplici: $z_1 = -1$, $z_{2,3} = \pm i\sqrt{3}$ e può essere scritta come

$$f(z) = \frac{1}{1+z} \left(\frac{1}{z-i\sqrt{3}} - \frac{1}{z+i\sqrt{3}} \right) \frac{1}{2i\sqrt{3}} .$$

Il raggio maggiore della corona di convergenza della prima serie di Laurent centrata in $z = -1$ è pari alla distanza tra il centro e la singolarità più vicina, in questo caso, gli altri due poli sono equidistanti, ovvero si ha convergenza quando $0 < |z+1| < |1 \pm i\sqrt{3}| = 2$. La serie può essere ottenuta sfruttando la serie geometrica nella condizione specificata, come segue

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{1+z}\left(\frac{1}{z-i\sqrt{3}} - \frac{1}{z+i\sqrt{3}}\right)\frac{1}{2i\sqrt{3}} \\
&= \frac{1}{1+z}\left(-\frac{1}{-(z+1)+1+i\sqrt{3}} + \frac{1}{-(z+1)+1-i\sqrt{3}}\right)\frac{1}{2i\sqrt{3}} \\
&= \frac{1}{1+z}\left(-\frac{1}{1+i\sqrt{3}}\frac{1}{1-\frac{z+1}{1+i\sqrt{3}}} + \frac{1}{1-i\sqrt{3}}\frac{1}{1-\frac{z+1}{1-i\sqrt{3}}}\right)\frac{1}{2i\sqrt{3}} \\
&= \frac{1}{1+z}\left(-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z+1)^k}{(1+i\sqrt{3})^{k+1}} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z+1)^k}{(1-i\sqrt{3})^{k+1}}\right)\frac{1}{2i\sqrt{3}} \\
&= \frac{1}{1+z}\left(-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z+1)^k e^{-i\pi(k+1)/3}}{2^{k+1}} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z+1)^k e^{i\pi(k+1)/3}}{2^{k+1}}\right)\frac{1}{2i\sqrt{3}} \\
&= \frac{1}{1+z}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z+1)^k}{2^{k+1}}\left(e^{i\pi(k+1)/3} - e^{-i\pi(k+1)/3}\right)\frac{1}{2i\sqrt{3}} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(\pi(k+1)/3)}{2^{k+1}\sqrt{3}}(z+1)^{k-1}\,.
\end{aligned}$$

In definitiva

$$f(z) = \sum_{k=-1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(\pi(k+2)/3)}{2^{k+2}\sqrt{3}}(z+1)^k\,,$$

ovvero i coefficienti di Laurent sono

$$C_k = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(\pi(k+2)/3)}{2^{k+2}\sqrt{3}} & k \geq -1 \\ 0 & k < -1 \end{cases}\,.$$

Sesto problema (punteggio 2.5/30)

Usando il teorema di Eugène Rouché si dimostri che tutti gli zeri del polinomio

$$P_7(z) = z^7 + 6z^4 + 3\,,$$

appartengono al cerchio $C_2(0) = \{z : |z| < 2\}$ e, in particolare, che tre di essi si trovano nella corona circolare $C_{1,2}(0) = \{z : 1 < |z| < 2\}$ e nessuno nel cerchio $C_{1/2}(0) = \{z : |z| < 1/2\}$.

Soluzione del sesto Problema

Per dimostrare che il polinomio ha n zeri nel cerchio C, centrato nell'origine, dobbiamo scomporlo nella somma di due polinomi uno dei quali di grano n e con un solo termine, quindi tale da avere nell'origine una zero di ordine n. A questo punto basta verificare che sulla frontiere ∂C il modulo del polinomio di grado n sia strettamente maggiore del modulo dell'altro, così, per il teorema di Rouché, si ha che il polinomio completo ha, nel cerchio C, lo stesso numero di zeri di quello con un solo termine e grado n, quindi n.
Al fine di dimostrare che i sette zeri di $P_7(z)$ sono nel cerchio di raggio 2 e centro $z = 0$, consideriamo la decomposizione

$$P_7(z) = f_7(z) + g_4(z)\,, \qquad \begin{cases} f_7(z) = z^7 \\ g_4(z) = 6z^4 + 3 \end{cases}$$

e verifichiamo che sulla frontiera di $C_2(0)$ valga la disuguaglianza stretta $|g_4(z)| < |f_7(z)|$. Ovvero, per $|z| = 2$,

$$|g_4(z)| = |6z^4 + 3| \leq 6|z|^4 + 3 = 6 \cdot 16 + 3 = 99 < 128 = |z|^7 = |f_7(z)|\,.$$

Questo dimostra che $f_7(z)$ e $f_7(z) + g_4(z)$ hanno in $C_2(0)$ lo stesso numero di zeri, quindi sette.
Per verificare che nella corona $C_{1,2}(0)$ ci sono 3 zeri è sufficiente dimostrare che ce ne sono quattro nel cerchio $C_1(0)$.
A tal fine facciamo la decomposizione

$$P_7(z) = f_4(z) + g_7(z)\,, \qquad \begin{cases} f_4(z) = 6z^4 \\ g_7(z) = z^7 + 3 \end{cases}.$$

Sulla circonferenza unitaria, $|z| = 1$, si ha

$$|g_7(z)| = |z^7 + 3| \leq |z|^7 + 3 = 4 < 6 = 6|z|^4 = |f_4(z)|^2\,.$$

$P_7(z)$ ha, nel cerchio unitario, lo stesso numero di zeri di $f_4(z)$, ovvero ne ha quattro, ne consegue che nella corona circolare $C_{1,2}(0)$ il polinomio ha tre zeri.
Infine consideriamo la decomposizione

$$P_7(z) = f_0(z) + h_7(z)\,, \qquad \begin{cases} f_0(z) = 3 \\ h_7(z) = z^7 + 6z^4 \end{cases}.$$

Sulla circonferenza $z = 1/2$

$$|h_7(z)| \leq |z|^4(|z|^3 + 4) = \frac{33}{128} < 3\,.$$

La funzione costante $f_0(z) = 3$ ha in $C_{1/2}(0)$ lo stesso numero di zeri di $f_0(z) + h_7(z) = P_7(z)$, quindi non ne ha, ovvero ne ha zero.