Metodi Matematici per la Fisica

Prova scritta - 26 febbraio 2014

Si svolgano cortesemente i seguenti esercizi.

Esercizio 1 (6 punti)

Si calcoli l'integrale

$$J = \int_L \frac{dz}{(z^*)^m z^n}\,,$$

con $m, n \in \mathbb{N}$ ed $L = \{z : \mathrm{Im}(z) = l > 0\}$.

Soluzione 1

Sulla retta L si ha: $z^* = z - 2il$, quindi l'integrale può essere scritto come

$$J = \int_L \frac{dz}{(z-2il)^m z^n}\,.$$

Possiamo applicare il lemma di Jordan e, chiudendo sopra, si ha

$$\begin{aligned}
J &= \int_L \frac{dz}{(z-2il)^m z^n} \\
&= 2i\pi\,\mathrm{Res}\left[\frac{1}{(z-2il)^m z^n}, z = 2il\right] \\
&= \frac{2i\pi}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\frac{1}{z^n}\bigg|_{z=2il} \\
&= \frac{2\pi(i)^{m-n}(m+n-2)!}{(m-1)!(n-1)!(2l)^{m+n-1}}\,.
\end{aligned}$$

Esercizio 2 (6 punti)

Calcolare l'integrale

$$T = \int_0^{2\pi} \frac{\cos(mt)}{a + \mathrm{sen}(t)}dt\,,$$

con $a > 1$ e $m \in \mathbb{N}$.

Soluzione 2

Si fa la sostituzione $z = e^{it}$, quindi

$$\begin{aligned}
T &= \int_{|z|=1} \frac{z^m + 1/z^m}{2ia + z - 1/z}\frac{dz}{z} \\
&= \int_{|z|=1} \frac{z^m}{z^2 + 2iaz - 1}dz + \int_{|z|=1} \frac{1/z^m}{z^2 + 2iaz - 1}dz = T_1 + T_2\,.
\end{aligned}$$

Gli zeri del denominatore sono

$$z_\pm = -ia \pm \sqrt{-a^2 + 1} = i(-a \pm \sqrt{a^2 - 1})\,,$$

si ha $z_+ z_- = -1$ e in particolare

$$|z_-| > 1\,, \qquad |z_+| < 1\,,$$

ovvero solo z_+ è all'interno del cerchio unitario. Il primo integrale ha un solo residuo ed è

$$\begin{aligned} T_1 &= \int_{|z|=1} \frac{z^m}{z^2+2iaz-1} dz = \int_{|z|=1} \frac{z^m}{(z-z_-)(z-z_+)} dz = 2i\pi \frac{z_+^m}{z_+ - z_-} \\ T_1 &= \frac{\pi z_+^m}{\sqrt{a^2-1}}\,. \end{aligned}$$

Per il secondo si ha

$$\begin{aligned} T_2 &= \int_{|z|=1} \frac{dz}{(z^2+2iaz-1)z^m} = \int_{|z|=1} \frac{dz}{(z-z_-)(z-z_+)z^m} \\ &= \frac{1}{z_+ - z_-}\left(\underbrace{\int_{|z|=1} \frac{dz}{(z-z_+)z^m}}_{=0} - \int_{|z|=1} \frac{dz}{(z-z_-)z^m} \right) \\ &= \frac{1}{2i\sqrt{a^2-1}}\left(-\int_{|z|=1} \frac{dz}{(z-z_-)z^m} \right) \\ &= (-1)^m \frac{\pi z_+^m}{\sqrt{a^2-1}}\,. \end{aligned}$$

L'annullamento del primo contributo nella seconda riga si ottiene applicando il teorema dei residui all'esterno del cerchio unitario, dove l'integranda non ha poli, anche il residuo all'infinito è nullo.
Il risultato finale è

$$T = T_1 + T_2 = \frac{\pi z_+^m}{\sqrt{a^2-1}}\left[1 + (-1)^m\right]\,,$$

ovvero l'integrale è diverso da zero solo per valori pari di m.

Esercizio 3 (5 punti)

Si scriva la serie di Laurent della funzione

$$f(z) = \operatorname{sen}\left(\frac{z}{1-z}\right)\,.$$

centrata in $z = 1$ e i primi tre termini di quella centrata in $z = \infty$.

Soluzione 3

Nel caso in cui il centro è $z = 1$ i coefficienti di Laurent possono essere determinati in almeno due modi.
Il primo consiste nell'usare la definizione e quindi calcolare gli integrali

$$c_k = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\gamma_1} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{z}{1-z}\right)}{(z-1)^{k+1}} dz\,, \qquad k \in \mathbb{Z}\,.$$

A tal fine si considera la serie

$$\operatorname{sen}\left(\frac{z}{1-z}\right)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{(2j+1)!}\left(\frac{z}{1-z}\right)^{2j+1}.$$

Per i coefficienti della parte regolare, $k\geq 0$, si ha

$$\begin{aligned}
c_k &= -\frac{1}{2i\pi}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{(2j+1)!}\oint_{\gamma_1}\frac{z^{2j+1}}{(z-1)^{2j+k+2}}dz \\
&= -\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{(2j+1)!}\frac{1}{(2j+k+1)!}\left.\frac{d^{2j+k+1}}{dz^{2j+k+1}}z^{2j+1}\right|_{z=1},
\end{aligned}$$

ovvero solo c_0 è diverso da zero e vale

$$c_0 = -\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{(2j+1)!}=-\operatorname{sen}(1).$$

Per quelli della parte principale invece, $k\leq -1$, consideriamo due casi: $-k$ pari e dispari. Se $-k$ è pari, cioè $k=-2m$, con $m\geq 1$, si ha

$$\begin{aligned}
c_k &= -\sum_{j=m}^{\infty}\frac{(-1)^j}{(2j+1)!}\frac{1}{(2j-2m+1)!}(2j+1)(2j)\ldots(1+2m) \\
&= -\sum_{j=m}^{\infty}\frac{(-1)^j}{(2m)!}\frac{1}{(2j-2m+1)!}, \qquad l=j-m, \\
&= -\frac{(-1)^m}{(2m)!}\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l\frac{1}{(2l+1)!} \\
&= -\frac{i^{2m}}{(2m)!}\operatorname{sen}(1)=-\frac{1}{(2m)!}\cos(m\pi)\operatorname{sen}(1) \\
c_k &= -\frac{1}{(-k)!}\cos(k\pi/2)\operatorname{sen}(1)=-\frac{1}{(-k)!}\operatorname{sen}(1-k\pi/2).
\end{aligned}$$

Se $k\leq -1$ e dispari, cioè $k=-2m-1$, con $m\geq 0$

$$\begin{aligned}
c_k &= -\sum_{j=m}^{\infty}\frac{(-1)^j}{(2j+1)!}\frac{1}{(2j-2m)!}(2j+1)(2j)\ldots(2+2m) \\
&= -\sum_{j=m}^{\infty}\frac{(-1)^j}{(2m+1)!}\frac{1}{(2j-2m)!}, \qquad l=j-m, \\
&= -\frac{(-1)^m}{(2m+1)!}\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l\frac{1}{(2l)!} \\
&= -\frac{i^{2m}}{(2m+1)!}\cos(1) \\
c_k &= \frac{1}{(-k)!}\operatorname{sen}(k\pi/2)\cos(1)=-\frac{1}{(-k)!}\operatorname{sen}(1-k\pi/2).
\end{aligned}$$

Hanno la stessa forma, quindi

$$f(z) = -\sum_{k=-\infty}^{0} \frac{\mathrm{sen}(1-k\pi/2)}{(-k)!}(z-1)^k, \qquad 0 < |z-1| < \infty .$$

Il secondo metodo si basa sull'utilizzo delle serie di Taylor del seno e del coseno centrate nell'origine. Usando le formule di addizione, il seno può essere scritto come

$$\begin{aligned}
\mathrm{sen}\left(\frac{z}{1-z}\right) &= \mathrm{sen}\left(\frac{1}{1-z}-1\right) \\
&= \mathrm{sen}\left(\frac{1}{1-z}\right)\cos(1) - \cos\left(\frac{1}{1-z}\right)\mathrm{sen}(1) \\
&= -\mathrm{sen}\left(\frac{1}{z-1}\right)\cos(1) - \cos\left(\frac{1}{z-1}\right)\mathrm{sen}(1) .
\end{aligned}$$

Per il seno ed il coseno con argomento non costante usiamo gli sviluppi in serie noti, quindi

$$\begin{aligned}
\mathrm{sen}\left(\frac{z}{1-z}\right) &= -\cos(1)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!(z-1)^{2k+1}} - \mathrm{sen}(1)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!(z-1)^{2k}} \\
&= -\cos(1)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathrm{sen}[(2k+1)\pi/2]}{(2k+1)!(z-1)^{2k+1}} - \mathrm{sen}(1)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos[2k\pi/2]}{(2k)!(z-1)^{2k}} \\
&= -\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathrm{sen}[1+(2k+1)\pi/2]}{(2k+1)!(z-1)^{2k+1}} - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathrm{sen}[1+2k\pi/2]}{(2k)!(z-1)^{2k}} \\
&= -\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathrm{sen}(1+k\pi/2)}{k!(z-1)^k} \\
&= -\sum_{k=-\infty}^{0}\frac{\mathrm{sen}(1-k\pi/2)}{(-k)!}(z-1)^k .
\end{aligned}$$

Nel caso in cui si centri la serie in $z=\infty$, i coefficienti sono

$$\begin{aligned}
c_k &= \frac{1}{2i\pi}\oint_{|z|>2}\frac{\mathrm{sen}(z/(1-z))}{z^{k+1}}dz \\
&= \frac{1}{2i\pi}\oint_{|w|<2}\frac{\mathrm{sen}(1/(w-1))}{w^{-k+1}}dw \\
&= \begin{cases} 0 & k \geq 1 \\ \frac{1}{(-k)!}\frac{d^{-k}}{dz^{-k}}\,\mathrm{sen}(1/(w-1))\big|_{w=0} & k \leq 0 \end{cases} .
\end{aligned}$$

In particolare, i primi tre sono

$$\begin{aligned}
c_0 &= -\mathrm{sen}(1); \\
c_{-1} &= \frac{d}{dw}\mathrm{sen}(1/(w-1))\bigg|_{w=0} = -\frac{\cos(1/(w-1))}{(w-1)^2}\bigg|_{w=0} = -\cos(1); \\
c_{-2} &= \frac{1}{2}\frac{d^2}{dw^2}\mathrm{sen}(1/(w-1))\bigg|_{w=0} = \frac{\mathrm{sen}(1)-2\cos(1)}{2} .
\end{aligned}$$

Quindi la serie di Laurent è

$$f(z) = -\text{sen}(1) - \frac{\cos(1)}{z} + \frac{\text{sen}(1) - 2\cos(1)}{2z^2} + \dots, \qquad |z| > 1.$$

Esercizio 4 (5 punti)

Usando il teorema di Rouché si stabilisca il numero di zeri che la funzione

$$F(z) = z e^{\alpha - z^2} - \beta$$

ha nel cerchio unitario se $\alpha > 1$ e $0 < \beta < 1$.

Soluzione 4

Possiamo riscrivere

$$F(z) = e^{-z^2}(z e^{\alpha} - \beta e^{z^2}),$$

posto: $f(z) = z e^{\alpha}$ e $g(z) = \beta e^{z^2}$, sulla circonferenza unitaria, si ha

$$|g(z)| = \beta |e^{z^2}| = \beta e^{|z^2|\cos[\arg(z^2)]} \le \beta e^{|z|^2} = \beta e < e < e^{\alpha} = |z| e^{\alpha} = |f(z)|.$$

Per cui, nel cerchio unitario, $f(z) + g(z)$ ha lo stesso numero di zeri di $f(z)$, ovvero ne ha uno solo. Lo stesso dicasi per $F(z)$ essendo il fattore e^{-z^2} sempre diverso da zero in $|z| \le 1$.

Esercizio 5 (5 punti)

Si determini la funzione di Green dell'operatore differenziale del secondo ordine

$$\hat{O}_x = -\frac{d^2}{dx^2} + \lambda^2,$$

con $\lambda > 0$.

Soluzione 5

Dalla definizione si ha

$$\begin{aligned}
\hat{O}_x G(x) &= \delta(x) \\
\mathscr{F}_k\left[-\frac{d^2 G}{dx^2} + \lambda^2 G\right] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \\
(k^2 + \lambda^2)\tilde{G}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \\
\tilde{G}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{k^2 + \lambda^2} \\
G(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx} dk}{k^2 + \lambda^2} = \frac{1}{2\lambda} e^{-\lambda|x|}.
\end{aligned}$$

Esercizio 6 (6 punti)

Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 \\ i & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

si trovino i valori di $\beta \in \mathbb{C}$ in cui la matrice

$$B = \frac{1}{A^2 + I\beta^2} \,,$$

dove I è la matrice identità 3×3, non è definita. Si determinino autovalori e autovettori di B quando β è diversa da tali valori.

Soluzione 6

Risolvendo l'equazione secolare per A si ottengono gli autovalori

$$\alpha_1 = -1 \,, \qquad \alpha_2 = 1 \,, \qquad \alpha_3 = 2 \,.$$

Gli autovettori corrispondenti sono

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} i \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} , \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} , \quad u_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Gli autovalori della matrice $B = f(A)$, dove $f(x) = (x^2 + \beta^2)^{-1}$, sono $\beta_k = f(\alpha_k)$, con $k = 1, 2, 3$, se $f(x)$ è analitica negli intorni di ciascun α_k. È quindi necessario richiedere che

$$\beta \neq \pm i\alpha_k \,,$$

ovvero $\beta \notin \{\pm i, \pm 2i\}$. In questo caso gli autovalori di B sono

$$\beta_1 = \frac{1}{1+\beta^2} \,, \qquad \beta_2 = \frac{1}{1+\beta^2} \,, \qquad \beta_3 = \frac{1}{4+\beta^2} \,.$$