Metodi Matematici per la Fisica

Prova scritta - 26 febbraio 2013

Si svolgano cortesemente i seguenti esercizi.

Esercizio 1 (6 punti)
Si calcoli l'integrale

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a^x}{b^x + 1} dx \,,$$

con a e b reali e $1 < a < b$.

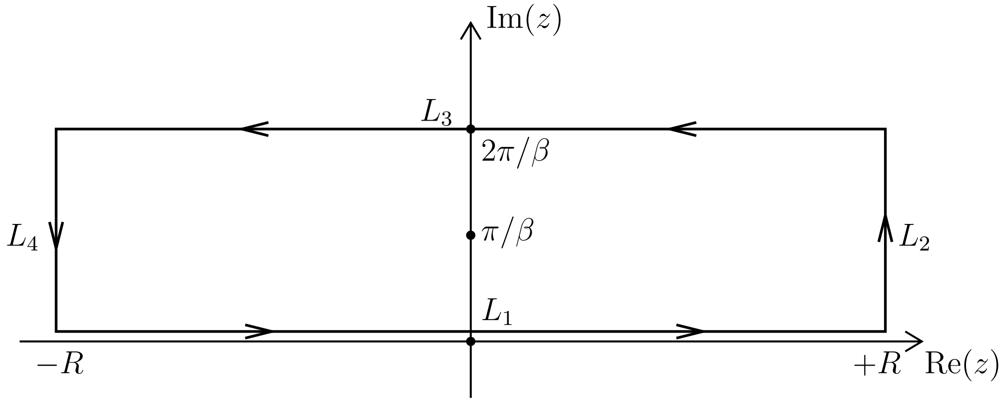
. . . .

Soluzione
Riscriviamo l'integrale come

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{x\ln(a)}}{e^{x\ln(b)} + 1} dx \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\alpha x}}{e^{\beta x} + 1} dx \,,$$

dove si sono posti: $\alpha = \ln(a)$ e $\beta = \ln(b)$. Avendo per ipotesi che $1 < a < b$, si ha, di conseguenza, $0 < \alpha < \beta$. L'integranda ha infiniti poli semplici nei punti $\{z_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$, tali che

$$e^{\beta z_k} = -1 = e^{(2k+1)i\pi} \qquad \Rightarrow \qquad z_k = \frac{(2k+1)i\pi}{\beta} \,, \qquad k \in \mathbb{Z} \,.$$



Consideriamo il percorso chiuso, Γ, mostrato in figura, composto dai quattro tratti rettilinei, paralleli agli assi, L_k, $k = 1, 2, 3, 4$, cioè: $\Gamma = \cup_{k=1}^{4} L_k$. All'interno di Γ cade il solo polo $z_1 = \pi/\beta$, quindi

$$\oint_\Gamma \frac{e^{\alpha z}}{e^{\beta z} + 1} dz = \sum_{k=1}^{4} \int_{L_k} \frac{e^{\alpha z}}{e^{\beta z} + 1} dz = \sum_{k=1}^{4} I_k = 2i\pi \,\mathrm{Res}\left[\frac{e^{\alpha z}}{e^{\beta z} + 1}, \frac{i\pi}{\beta}\right] \,,$$

dove si è posto

$$I_k = \int_{L_k} \frac{e^{\alpha z}}{e^{\beta z} + 1} dz \,, \qquad k = 1, 2, 3, 4 \,.$$

Il contributo sui tratti verticali $L_{2,4} = \{z : z = \pm R + iy, \pm y \in [0, 2\pi/\beta]\}$, nel limite $R \to \infty$ si annulla, infatti

$$\begin{aligned}
\lim_{R\to\infty} |I_{2,4}| = \lim_{R\to\infty} \left| \int_{L_{2,4}} \frac{e^{\alpha z}}{e^{\beta z}+1} dz \right| &= \lim_{R\to\infty} \left| \int_0^{2\pi/\beta} \frac{e^{\pm\alpha R + i\alpha y}}{e^{\pm\beta R + i\beta y}+1} dy \right| \\
&\leq \lim_{R\to\infty} \int_0^{2\pi/\beta} \left| \frac{e^{\pm\alpha R + i\alpha y}}{e^{\pm\beta R + i\beta y}+1} \right| |dy| \\
&= \lim_{R\to\infty} \int_0^{2\pi/\beta} \frac{e^{\pm\alpha R}}{|e^{\pm\beta R + i\beta y}+1|} |dy| \\
&\leq \lim_{R\to\infty} \int_0^{2\pi/\beta} \frac{e^{\pm\alpha R}}{\left| |e^{\pm\beta R + i\beta y}| - |1| \right|} |dy| \\
&= \lim_{R\to\infty} \int_0^{2\pi/\beta} \frac{e^{\pm\alpha R}}{|e^{\pm\beta R} - 1|} |dy| = \frac{2\pi}{\beta} \lim_{R\to\infty} \frac{e^{\pm\alpha R}}{|e^{\pm\beta R} - 1|} = 0\,.
\end{aligned}$$

Verifichiamo l'annullamento dei limiti. Nel caso "positivo", con i segni alti, si ha

$$\lim_{R\to\infty} \frac{e^{\alpha R}}{|e^{\beta R} - 1|} = \lim_{R\to\infty} e^{(\alpha-\beta)R} = 0\,,$$

perché $\alpha < \beta$.
Nel caso "negativo", segni bassi, invece,

$$\lim_{R\to\infty} \frac{e^{-\alpha R}}{|e^{-\beta R} - 1|} = \lim_{R\to\infty} e^{-\alpha R} = 0\,,$$

perché α e β sono strettamente positivi.
Il contributo sul tratto L_1 è semplicemente:

$$I_1 = \int_{L_1} \frac{e^{\alpha z}}{e^{\beta z}+1} dz = \int_{-R}^{R} \frac{e^{\alpha x}}{e^{\beta x}+1} dx\,,$$

e si ha che

$$\lim_{R\to\infty} I_1 = I\,.$$

Per il tratto $L_3 = \{z : z = x + 2i\pi/\beta, -x \in [-R, R]\}$

$$I_3 = \int_{L_3} \frac{e^{\alpha z}}{e^{\beta z}+1} dz = -\int_{-R}^{R} \frac{e^{\alpha x + 2i\pi\alpha/\beta}}{e^{\beta x + 2i\pi}+1} dx = -e^{2i\pi\alpha/\beta} \int_{-R}^{R} \frac{e^{\alpha x}}{e^{\beta x}+1} dx = -e^{2i\pi\alpha/\beta} I_1\,.$$

Ne consegue che

$$\lim_{R\to\infty} \oint_\Gamma \frac{e^{\alpha z}}{e^{\beta z}+1} dz = \lim_{R\to\infty} \left(1 - e^{2i\pi\alpha/\beta}\right) I_1 = \left(1 - e^{2i\pi\alpha/\beta}\right) I = 2i\pi \operatorname{Res}\left[\frac{e^{\alpha z}}{e^{\beta z}+1}, \frac{i\pi}{\beta}\right]\,,$$

da cui il risultato finale

$$\begin{aligned}
I &= \frac{2i\pi}{1-e^{2i\pi\alpha/\beta}}\,\mathrm{Res}\left[\frac{e^{\alpha z}}{e^{\beta z}+1},\frac{i\pi}{\beta}\right] \\
&= \frac{2i\pi}{1-e^{2i\pi\alpha/\beta}}\lim_{z\to i\pi/\beta}\frac{e^{\alpha z}}{e^{\beta z}+1}(z-i\pi/\beta) \\
&= \frac{2i\pi}{1-e^{2i\pi\alpha/\beta}}\frac{e^{i\pi\alpha/\beta}}{\beta e^{i\pi}} \\
&= \frac{2i\pi/\beta}{e^{i\pi\alpha/\beta}-e^{-i\pi\alpha/\beta}} = \frac{\pi/\beta}{\mathrm{sen}\,(\pi\alpha/\beta)}\,.
\end{aligned}$$

. . . .

Esercizio 2 (6 punti)
Data la funzione meromorfa

$$F(z) = \frac{f(z)}{\tan(z)}\,,$$

dove $f(z)$ è anch'essa meromorfa con un numero finito M di poli $\{z_j\}_{j=1}^{M}$ non appartenenti all'asse reale, si verifichi la relazione

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k\pi) = -\sum_j \mathrm{Res}[F(z), z_j]\,.$$

Utilizzando questo risultato si calcoli la somma della serie

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k\pi)^2+b^2}\,,$$

con b reale e $b>0$.

. . . .

Soluzione
Dal teorema della somma totale dei residui si ha

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\mathrm{Res}[F(z), k\pi] = -\sum_{j=1}^{M}\mathrm{Res}[F(z), z_j]\,.$$

I residui dovuti ai poli semplici della cotangente sono

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}[F(z), k\pi] &= \lim_{z\to k\pi} F(z)(z-k\pi) \\
&= f(k\pi)\lim_{z\to k\pi}\frac{z-k\pi}{\tan(z)} = f(k\pi)\,,
\end{aligned}$$

da cui

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k\pi) = -\sum_{j=1}^{M}\mathrm{Res}[F(z), z_j]\,.$$

Scegliendo

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + b^2}\,,$$

dalla relazione precedente si ha

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(k\pi)^2 + b^2} = -\sum_{j=1}^{M} \mathrm{Res}[F(z), z_j]\,.$$

In questo si hanno solo due poli semplici: $z_{1,2} = \pm ib$, i cui residui sono

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}[F(z), \pm ib] &= \lim_{z\to\pm ib} \frac{z - (\pm ib)}{(z^2 + b^2)\tan(z)} \\ &= \frac{1}{\tan(\pm ib)} \frac{1}{\pm 2ib} = \frac{1}{2ib\tan(ib)} = -\frac{1}{2b\tanh(b)}\,. \end{aligned}$$

Ne consegue che la serie ha come somma

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(k\pi)^2 + b^2} = \frac{1}{b\tanh(b)}\,.$$

Possiamo riordinarne i termini, sfruttandone la simmetria, per ottenere la somma desiderata, ovvero con indici $k \in \mathbb{N}$, si ha

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k\pi)^2 + b^2} + \frac{1}{b^2} + \sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{1}{(k\pi)^2 + b^2} &= \frac{1}{b\tanh(b)} \\ 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k\pi)^2 + b^2} + \frac{1}{b^2} + &= \frac{1}{b\tanh(b)} \\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k\pi)^2 + b^2} &= \frac{1}{2b\tanh(b)} - \frac{1}{2b^2}\,. \end{aligned}$$

. . . .

Esercizio 3 (5 punti)
Verificare la convergenza uniforme della serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(kz)}{k^2}\,,$$

in $|z| < 1$.

. . . .

Soluzione
Ponendo: $z = x + iy$, si ha

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(kz)}{k^2} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(e^{ikz} - e^{-ikz})}{2ik^2} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(e^{ikx-ky} - e^{-ikx+ky}\right)}{2ik^2} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-ky}\left[\,\cos(kx) + i\sin(kx)\right]}{2ik^2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{ky}\left[\,\cos(kx) - i\sin(kx)\right]}{2ik^2}\,. \end{aligned}$$

Le due serie convergono per $y \geq 0$ e $y \leq 0$ rispettivamente. Ne consegue che, in generale, non si ha convergenza in $|z| \leq 1$. Si avrà solo se $y = 0$, ovvero per valori reali di z, con $|z| \leq 1$, cioè per $z = x$ e $-1 \leq x \leq 1$. Infatti, in questo caso, il termine generico della serie può essere minorato in modulo come

$$\left| \frac{\sin(kz)}{k^2} \right| \leq \frac{1}{k^2}\,,$$

quindi, dall'M-test di Weierstrass, la serie converge.

. . . .

Esercizio 4 (5 punti)
Calcolare la trasformata di Fourier della funzione

$$f(x) = x^2 e^{-a\,x^2}\,,$$

con a reale e strettamente positivo.

. . . .

Soluzione
Sfruttiamo la relazione

$$\mathcal{F}_k\left[\frac{d^n f}{dx^n}\right] = (ik)^n \mathcal{F}_k[f]\,.$$

Consideriamo la derivata seconda della gaussiana e^{-ax^2}

$$\frac{d^2}{dx^2} e^{-ax^2} = \frac{d}{dx}(-2ax\,e^{-ax^2}) = -2a\,e^{-ax^2} + 4a^2x^2e^{-ax^2}\,,$$

da cui si ottiene la funzione $f(x)$ come

$$f(x) = \left(\frac{d^2}{dx^2}e^{-ax^2} + 2a\,e^{-ax^2}\right)\frac{1}{4a^2}\,.$$

Sapendo che la trasformata di Fourier della gaussiana è

$$\mathcal{F}_k\left[e^{-ax^2}\right] = \frac{1}{\sqrt{2a}}\,e^{-\frac{k^2}{4a}}\,,$$

si ha

$$\mathcal{F}_k[f] = \frac{(ik)^2 + 2a}{4a^2}\,\mathcal{F}_k\left[e^{-ax^2}\right] = \frac{2a - k^2}{4a^2}\,\frac{1}{\sqrt{2a}}\,e^{-\frac{k^2}{4a}}\,.$$

. . . .

Esercizio 5 (6 punti)
Si consideri la matrice A definita dall'equazione

$$A\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}i\alpha + \gamma\\ \beta\\ \alpha + i\gamma\end{pmatrix}\,,$$

- si determini la matrice A rispetto alla base canonica;
- si calcolino autovalori e autovettori;
- si determini, qualora esista, l'inversa A^{-1}.

. . . .

Soluzione
La matrice A ha espressione

$$A = \begin{pmatrix} i & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & i \end{pmatrix} .$$

Gli autovalori sono

$$\lambda_1 = -1 + i \,, \qquad \lambda_2 = 1 + i \,, \qquad \lambda_3 = 1 \,.$$

Gli autovettori si ottengono dall'identità

$$Au_k = \begin{pmatrix} i\alpha_k + \gamma_k \\ \beta_k \\ \alpha_k + i\gamma_k \end{pmatrix} = \lambda_k u_k = \lambda_k \begin{pmatrix} \alpha_k \\ \beta_k \\ \gamma_k \end{pmatrix} \,, \qquad k = 1, 2, 3 \,.$$

Nel caso $k = 1$, posto $\alpha_1 = 1$, si hanno le equazioni

$$\begin{aligned} i + \gamma_1 = -1 + i \qquad &\Rightarrow \qquad \gamma_1 = -1 \\ \beta_1 = (-1 + i)\beta_1 \qquad &\Rightarrow \qquad \beta_1 = 0 \,, \end{aligned}$$

per cui

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

Nel caso $k = 2$, ancora con $\alpha_2 = 1$, si ha

$$\begin{aligned} i + \gamma_2 = 1 + i \qquad &\Rightarrow \qquad \gamma_2 = 1 \\ \beta_2 = (1 + i)\beta_2 \qquad &\Rightarrow \qquad \beta_2 = 0 \,, \end{aligned}$$

per cui

$$u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Nel caso $k = 3$ con $\lambda_3 = 1$ abbiamo

$$\begin{aligned} i\alpha_3 + \gamma_3 &= \alpha_3 \\ \beta_3 &= \beta_3 \\ \alpha_3 + i\gamma_3 &= \gamma_3 \,, \end{aligned}$$

da cui $\alpha_3 = \gamma_3 = 0$ e $\beta_3 = 1$, quindi

$$u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice unitaria che diagonalizza A è

$$U = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice inversa di A nella base degli autovettori è

$$A'^{-1} = \begin{pmatrix} 1/(-1+i) & 0 & 0 \\ 0 & 1/(1+i) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(1+i)/2 & 0 & 0 \\ 0 & (1-i)/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

In rappresentazione canonica

$$\begin{aligned} A^{-1} &= UA'^{-1}U^\dagger \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1+i}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1-i}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{i}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{i}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

. . . .

Esercizio 6 (6 punti)
Si risolva l'equazione di Fredholm

$$f(x) - \alpha \int_{-1}^{1} K(x,y) f(y) dy = \phi(x),$$

con $\alpha \in \mathbb{C}$, nucleo

$$K(x,y) = x^2 y^3 + x y^4$$

e la funzione termine noto

$$\phi(x) = 1 + \beta x, \quad \beta \in \mathbb{C}.$$

. . . .

Soluzione
Il kernel è separabile, definiamo le funzioni

$$\begin{cases} M_1(x) = x^2 \\ M_2(x) = x \end{cases} \qquad \begin{cases} N_1(x) = x^3 \\ N_2(x) = x^4 \end{cases},$$

e riscriviamo l'equazione come

$$f(x) - \alpha \sum_{k=1}^{2} M_k(x) \int_{-1}^{1} N_k(y) f(y) dy = \phi(x)\,,$$

moltiplichiamo ambo i membri per $N_j(x)$ e integriamo in dx sull'intervallo $[-1, 1]$

$$\underbrace{\int_{-1}^{1} N_j(x) f(x) dx}_{C_j} - \alpha \sum_{k=1}^{2} \underbrace{\int_{-1}^{1} N_j(x) M_k(x) dx}_{A_{jk}} \underbrace{\int_{-1}^{1} N_k(y) f(y) dy}_{C_k} = \underbrace{\int_{-1}^{1} N_j(x) \phi(x) dx}_{B_j}\,,$$

si ha quindi l'identità vettoriale, ovvero il sistema,

$$(I - \alpha A)C = B\,,$$

dove $(I - \alpha A)$ è la matrice dei coefficienti, B il vettore termine noto, e C il vettore incognito. Le componenti di A sono

$$\begin{aligned}
A_{11} &= \int_{-1}^{1} N_1(x) M_1(x) dx = \int_{-1}^{1} x^5 dx = 0 \\
A_{12} &= \int_{-1}^{1} N_1(x) M_2(x) dx = \int_{-1}^{1} x^4 dx = \frac{2}{5} \\
A_{21} &= \int_{-1}^{1} N_2(x) M_1(x) dx = \int_{-1}^{1} x^6 dx = \frac{2}{7} \\
A_{22} &= \int_{-1}^{1} N_2(x) M_2(x) dx = \int_{-1}^{1} x^5 dx = 0\,.
\end{aligned}$$

Mentre quelle di B sono

$$\begin{aligned}
B_1 &= \int_{-1}^{1} N_1(x)(1 + \beta x) dx = \int_{-1}^{1} x^3 (1 + \beta x) dx = \frac{2}{5}\,\beta \\
B_2 &= \int_{-1}^{1} N_2(x)(1 + \beta x) dx = \int_{-1}^{1} x^4 (1 + \beta x) dx = \frac{2}{5}\,.
\end{aligned}$$

Il sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{5}\alpha \\ -\frac{2}{7}\alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5}\beta \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}\,,$$

ha soluzione solo se

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{5}\alpha \\ -\frac{2}{7}\alpha & 1 \end{pmatrix} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha \neq \pm \frac{\sqrt{35}}{2}\,.$$

La soluzione del sistema si ottiene come

$$C_1 = \frac{\det\begin{pmatrix} \frac{2}{5}\beta & -\frac{2}{5}\alpha \\ \frac{2}{5} & 1 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{5}\alpha \\ -\frac{2}{7}\alpha & 1 \end{pmatrix}} = \frac{\frac{2}{5}\left(\beta + \frac{2}{5}\alpha\right)}{1 - \frac{4}{35}\alpha^2}$$

$$C_2 = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{5}\beta \\ -\frac{2}{7}\alpha & \frac{2}{5} \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{5}\alpha \\ -\frac{2}{7}\alpha & 1 \end{pmatrix}} = \frac{\frac{2}{5}\left(1 + \frac{2}{7}\alpha\beta\right)}{1 - \frac{4}{35}\alpha^2} \,.$$

La funzione, unica soluzione dell'equazione nel caso $\alpha \neq \pm\sqrt{35}/2$, è

$$\begin{aligned} f(x) &= \phi(x) + \alpha \sum_{k=1}^{2} M_k(x) C_k \\ &= 1 + \beta\, x + \alpha\, \frac{\frac{2}{5}\left(1 + \frac{2}{7}\alpha\beta\right)}{1 - \frac{4}{35}\alpha^2}\, x + \alpha\, \frac{\frac{2}{5}\left(\beta + \frac{2}{5}\alpha\right)}{1 - \frac{4}{35}\alpha^2}\, x^2 \\ &= 1 + \frac{\frac{2}{5}\alpha + \beta}{1 - \frac{4}{35}\alpha^2}\, x + \alpha\, \frac{\frac{2}{5}\left(\beta + \frac{2}{5}\alpha\right)}{1 - \frac{4}{35}\alpha^2}\, x^2 \,. \end{aligned}$$

Nei casi $\alpha = \pm\sqrt{35}/2$ abbiamo

$$\begin{pmatrix} 1 & \mp\frac{\sqrt{35}}{5} \\ \mp\frac{\sqrt{35}}{7} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5}\beta \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix} .$$

Le due equazioni hanno i primi membri proporzionali, essendo nullo il determinante della matrice dei coefficienti. Moltiplicando la seconda equazione per $\mp\frac{\sqrt{35}}{5}$ si ottiene un'equazione che ha lo stesso primo membro della prima, infatti

$$\left(\mp\frac{\sqrt{35}}{7} C_1 + C_2\right) \times \left(\mp\frac{\sqrt{35}}{5}\right) = \frac{2}{5} \times \left(\mp\frac{\sqrt{35}}{5}\right)$$

$$C_1 \mp \frac{\sqrt{35}}{5} C_2 = \mp\frac{2\sqrt{35}}{25} \,.$$

Confrontando con la prima equazione

$$C_1 \mp \frac{\sqrt{35}}{5} C_2 = \frac{2}{5}\beta \,,$$

si ottengono le condizioni su β per cui l'equazione ammetta infinite soluzioni, ovvero

$$\beta_\pm = \mp\frac{\sqrt{35}}{5} \,.$$

In questo caso, posto $C_2^\pm = c_\pm$, si ha

$$C_1^\pm = \pm\frac{\sqrt{35}}{5} c_\pm \mp \frac{2\sqrt{35}}{25} = \pm\frac{\sqrt{35}}{5}\left(c_\pm - \frac{2}{5}\right) \,,$$

e la soluzione è

$$
\begin{aligned}
f_{\pm}(x) &= 1 \mp \frac{\sqrt{35}}{5}\, x + \frac{7}{2}\left(c_{\pm} - \frac{2}{5}\right) x^2 \pm \frac{\sqrt{35}}{2} c_{\pm} x \\
&= 1 \pm \frac{\sqrt{35}}{2}\left(c_{\pm} - \frac{2}{5}\right) x + \frac{7}{2}\left(c_{\pm} - \frac{2}{5}\right) x^2 \\
&= 1 \pm \frac{\sqrt{35}}{2}\left(c_{\pm} - \frac{2}{5}\right)\left(x \pm \frac{\sqrt{35}}{5}\, x^2\right) \\
&= 1 + d_{\pm}\left(x \pm \frac{\sqrt{35}}{5}\, x^2\right).
\end{aligned}
$$

Possiamo verificare nei due casi "$\pm$" che il primo membro dell'equazione dà il termine noto, ovvero l'equazione è verificata, in dettaglio si ha

$$
\begin{aligned}
f_{\pm}(x) \mp \frac{\sqrt{35}}{2}\int_{-1}^{1}(x^2y^3 + xy^4) f_{\pm}(y)dy &= 1 + d_{\pm}\left(x \pm \frac{\sqrt{35}}{5}\, x^2\right) \\
&\quad \mp \frac{\sqrt{35}}{2}\int_{-1}^{1}\left(d_{\pm}x^2y^4 + xy^4 \pm d_{\pm}\frac{\sqrt{35}}{5} xy^6\right) dy \\
&= 1 + d_{\pm}\left(x \pm \frac{\sqrt{35}}{5}\, x^2\right) \mp \left[\frac{\sqrt{35}}{5}\left(d_{\pm}x^2 + x\right) \pm d_{\pm}x\right] \\
&= 1 + \left(d_{\pm} \mp \frac{\sqrt{35}}{5} - d_{\pm}\right) x + \left(\pm\frac{\sqrt{35}}{5} d_{\pm} \mp \frac{\sqrt{35}}{5} d_{\pm}\right) x^2 \\
&= 1 \mp \frac{\sqrt{35}}{5}\, x = 1 + \beta_{\pm}\, x = \phi_{\pm}(x)\,.
\end{aligned}
$$