Metodi Matematici per la Fisica

Prova scritta - 25 luglio 2019

Si risolvano cortesemente i seguenti problemi, sapendo che verranno valutati:

1. la correttezza del risultato ottenuto e della procedura utilizzata;
2. la completezza dei passaggi riportati;
3. il livello di esemplificazione con cui sono espressi i risultati (ad esempio un risultato numerico reale non deve contenere l'unità immaginaria);
4. la correttezza del formalismo utilizzato;
5. la chiarezza dell'esposizione e la leggibilità del testo.

Primo problema (punteggio: 6/30)

Si calcoli l'integrale

$$T = \int_0^\infty \frac{dx}{\cosh(2\ln(x))} .$$

Soluzione del primo problema

Usando la definizione della funzione coseno iperbolico si ha

$$T = \int_0^\infty \frac{dx}{\cosh(2\ln(x))} = \int_0^\infty \frac{dx}{\cosh\left(\ln\left(x^2\right)\right)} = 2\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+1/x^2} = 2\int_0^\infty \frac{x^2dx}{x^4+1} = \int_{-\infty}^\infty \frac{x^2dx}{x^4+1}$$
$$T = \frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2+i} + \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2-i}\right) .$$

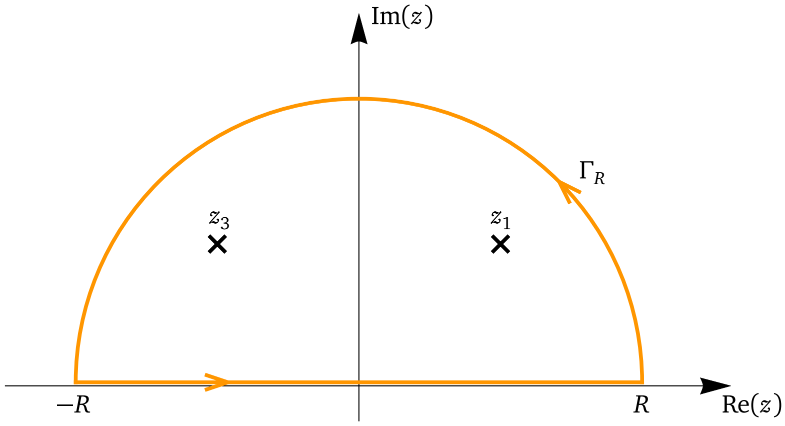
Ciascuna delle due funzioni integrande ha due poli semplici. In particolare, la seconda ha poli nei punti

$$z_1 = e^{i\pi/4}, \qquad z_2 = e^{5i\pi/4};$$

la prima nei punti

$$z_3 = e^{3i\pi/4}, \qquad z_4 = e^{7i\pi/4}.$$

Consideriamo il percorso chiuso $\Gamma_R = [-R,R] \cup \gamma_R^+$ dove $\gamma_R^+ = \left\{z : z = R^{i\theta}, \theta \in [0,\pi]\right\}$ mostrato in figura.



L'integrale sul percorso chiuso, con $R > 1$, può essere calcolato con il teorema dei residui e si ha

$$\frac{1}{2}\left(\oint_{\Gamma_R} \frac{dz}{z^2+i} + \oint_{\Gamma_R} \frac{dz}{z^2-i}\right) = i\pi\left(\text{Res}\left[\frac{1}{z^2+i}, z_3\right] + \text{Res}\left[\frac{1}{z^2-i}, z_1\right]\right),$$

inoltre, considerando i contributi sul tratto rettilineo $[-R,R]$ e sull'arco γ_R^+, possiamo riscrivere lo stesso integrale come

$$\frac{1}{2}\left(\oint_{\Gamma_R}\frac{dz}{z^2+i}+\oint_{\Gamma_R}\frac{dz}{z^2-i}\right)=\oint_{\Gamma_R}\frac{z^2dz}{z^4+1}=\int_{-R}^{R}\frac{x^2dx}{x^4+1}+\int_{\gamma_R^+}\frac{z^2dz}{z^4+1}\,.$$

Nel limite $R\to\infty$ si hanno

$$\begin{aligned}\lim_{R\to\infty}\frac{1}{2}\left(\oint_{\Gamma_R}\frac{dz}{z^2+i}+\oint_{\Gamma_R}\frac{dz}{z^2-i}\right)&=i\pi\left(\text{Res}\left[\frac{1}{z^2+i},z_3\right]+\text{Res}\left[\frac{1}{z^2-i},z_1\right]\right),\\ \lim_{R\to\infty}\frac{1}{2}\left(\oint_{\Gamma_R}\frac{dz}{z^2+i}+\oint_{\Gamma_R}\frac{dz}{z^2-i}\right)&=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2dx}{x^4+1}+\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R^+}\frac{z^2dz}{z^4+1}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2dx}{x^4+1}=T\,.\end{aligned}\tag{1}$$

Dove si è usato

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R^+}\frac{z^2dz}{z^4+1}=0\,,$$

infatti, sull'arco γ_R^+, ovvero con $z=Re^{i\theta}$, $\theta\in[0,\pi]$, si ha

$$\left|z\frac{z^2}{z^4+1}\right|=\frac{R^3}{|z^4+1|}\le\frac{R^3}{|R^4-1|}\underset{R\to\infty}{\longrightarrow}0\,,$$

quindi vale il limite

$$\lim_{R\to\infty}z\frac{z^2}{z^4+1}\overset{\text{unif.}}{=}0\,,$$

da cui il valore limite nullo dell'integrale su γ_R^+. Dall'Eq. (1) si ottiene

$$T=i\pi\left(\text{Res}\left[\frac{1}{z^2+i},z_3\right]+\text{Res}\left[\frac{1}{z^2-i},z_1\right]\right),$$

i residui sono

$$\begin{aligned}\text{Res}\left[\frac{1}{z^2+i},z_3\right]&=\frac{1}{2z_3}=\frac{e^{-3i\pi/4}}{2}\,,\\ \text{Res}\left[\frac{1}{z^2-i},z_1\right]&=\frac{1}{2z_1}=\frac{e^{-i\pi/4}}{2}\,,\end{aligned}$$

da cui

$$T=i\pi\left(e^{-3i\pi/4}+e^{-i\pi/4}\right)=\frac{i\pi}{2\sqrt{2}}\Big[-1-i+1-i\Big]=\frac{\pi}{\sqrt{2}}\,.$$

Secondo problema (punteggio 6/30)

Si calcoli l'integrale

$$B=\oint_{|z|=1}\frac{dz}{z\left(z^2+1-\cosh^2(z)\right)}\,,$$

verificando che l'unica singolarità della funzione integranda interna al cerchio unitario si trova nell'origine.

Soluzione del secondo problema

La funzione integranda ha una singolarità nell'origine, dovuta al fattore $1/z$, e in corrispondenza degli zeri della funzione

$$g(z) = z^2 + 1 - \cosh^2(z) .$$

Anche quest'ultima si annulla ancora nell'origine e per verificare la natura dello zero ne facciamo uno sviluppo in serie di potenze, sfruttando quello noto della funzione coseno iperbolico e l'indentità

$$\cosh^2(z) = \frac{\cosh(2z)+1}{2} .$$

Per la funzione $g(z)$ avremo

$$g(z) = z^2 + 1 - \frac{\cosh(2z)+1}{2} = z^2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(2z)^{2j}}{(2j)!} = z^2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{(2z)^2}{2!}\right) - \frac{1}{2}\sum_{j=2}^{\infty}\frac{(2z)^{2j}}{(2j)!} ,$$

da cui

$$g(z) = -\frac{1}{2}\sum_{j=2}^{\infty}\frac{(2z)^{2j}}{(2j)!} = -\frac{1}{2}\frac{(2z)^4}{4!} - \frac{1}{2}\frac{(2z)^6}{6!} - \frac{1}{2}\frac{(2z)^8}{8!} + O(z^{10}) = -\frac{2^3 z^4}{4!} - \frac{2^5 z^6}{6!} - \frac{2^7 z^8}{8!} + O(z^{10}) .$$

Ne consegue che la funzione $g(z)$ ha uno zero di ordine 4 nell'origine e che quindi la funzione integranda ha, sempre nell'origine, un polo di ordine 5.
Per verificare che la funzione integranda non abbia altri zeri nel cerchio unitario e quindi interni alla circonferenza unitaria, usiamo il teorema di Rouché. In particolare, vogliamo dimostrare che l'unico zero della funzione $g(z)$, è quello di ordine 4 che si trova nell'origine. Definiamo le due funzioni

$$g_1(z) = -\frac{z^4}{3} , \qquad g_2(z) = \frac{z^4}{3} + z^2 + 1 - \cosh^2(z) = \frac{z^4}{3} + g(z) ,$$

ovvero, la funzione $g_1(z)$ è il primo termine della serie di $g(z)$. Entrambe le funzioni $g_1(z)$ e $g_2(z)$ sono intere e la somma è pari a $g(z)$. Studiamo i moduli sulla circonferenza unitaria, $|z| = 1$. Per la funzione $g_1(z)$ il modulo è costante, infatti

$$|g_1(z)| = \left| -\frac{z^4}{3} \right| = \frac{|z|^4}{3} = \frac{1}{3} .$$

Vorremmo dimostrare che il modulo della seconda funzione sulla circonferenza unitaria sia strettamente minore di $1/3$. Procediamo usando la disuguaglianza triangolare e la serie della funzione coseno iperbolico con $|z| = 1$, si ha

$$\begin{aligned}
|g_2(z)| = \left|\frac{z^4}{3} + g(z)\right| = \left|-\frac{1}{2}\sum_{j=3}^{\infty}\frac{(2z)^{2j}}{(2j)!}\right| \le \frac{1}{2}\sum_{j=3}^{\infty}\frac{(2|z|)^{2j}}{(2j)!} = \frac{1}{2}\sum_{j=3}^{\infty}\frac{2^{2j}}{(2j)!} &= \frac{1}{2}\left(\cosh(2) - \sum_{j=0}^{2}\frac{2^{2j}}{(2j)!}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\cosh(2) - 1 - \frac{2^2}{2!} - \frac{2^4}{4!}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\cosh(2) - 1 - 2 - \frac{2}{3}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{e^2 + e^{-2}}{2} - \frac{11}{3}\right) \simeq 0.048 < \frac{1}{20} .
\end{aligned}$$

Questo valore è strettamente minore di $1/3$, quindi, sulla circonferenza unitaria, ovvero per $|z| = 1$, si ha

$$|g_1(z)| = \frac{1}{3} > \frac{1}{2}\left(\frac{e^2 + e^{-2}}{2} - \frac{11}{3}\right) \ge |g_2(z)| ,$$

segue, per il teorema di Rouché, che all'interno del cerchio unitario le due funzioni $g_1(z)$ e $g_1(z) + g_2(z) = g(z)$ hanno lo stesso numero di zeri. La funzione $g_1(z)$ è un polinomio di quarto grado che ha nell'origine e quindi all'interno del cerchio unitario, uno zero di ordine 4, di conseguenza che la funzione $g(z)$ ha nello stesso cerchio

unitario quattro zeri. Poiché abbiamo verificato che l'origine rappresenta un zero di ordine 4 anche per la funzione $g(z)$, concludiamo che la stessa funzione non ha altri zeri con $|z| < 1$.
L'integrale cercato può essere ottenuto usando il teorema dei residui

$$B = \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z\left(z^2+1-\cosh^2(z)\right)} = 2i\pi\,\mathrm{Res}\left[\frac{1}{z\left(z^2+1-\cosh^2(z)\right)}, z=0\right].$$

Calcoliamo il residuo ottenendo il coefficiente "-1" della serie di Laurent dell'integranda centrata nell'origine. A tal fine, usiamo la somma della serie geometrica, ovvero si ha

$$\begin{aligned}\frac{1}{z\left(z^2+1-\cosh^2(z)\right)} &= \frac{1}{z\left(-2^3z^4/4!-2^5z^6/6!-2^7z^8/8!+O(z^{10})\right)}\\ &= \frac{-3}{z^5\left[1+3(2^5z^2/6!)+3(2^7z^4/8!)+O(z^6)\right]}\\ &= -\frac{3}{z^5}\frac{1}{1+\alpha},\end{aligned}$$

dove si è posto

$$\alpha = 3\frac{2^5z^2}{6!}+3\frac{2^7z^4}{8!}+O(z^6).$$

Poiché nel limite $z\to 0$ si ha $\alpha \to 0$, il fattore $1/(1+\alpha)$ pu'ò essere scritto come la somma di una serie geometrica di ragione $-\alpha$, quindi

$$\begin{aligned}\frac{1}{z\left(z^2+1-\cosh^2(z)\right)} &= -\frac{3}{z^5}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\alpha^k\\ &= -\frac{3}{z^5}\left[1-\left(3\frac{2^5}{6!}z^2+3\frac{2^7}{8!}z^4+O(z^6)\right)+\left(3\frac{2^5}{6!}z^2+3\frac{2^7}{8!}z^4+O(z^6)\right)^2+\dots\right].\end{aligned}$$

Siamo interessati solo al coefficiente della potenza z^{-1}, calcoliamo quindi solo quelli che vanno dalla potenza minima z^{-5} fino, appunto, a quello della potenza z^{-1}. Inoltre, poiché la funzione è dispari, solo i coefficienti dispari sono non nulli, i primi tre sono

$$\begin{aligned}\frac{1}{z\left(z^2+1-\cosh^2(z)\right)} &= -\frac{3}{z^5}+\frac{1}{z^3}\left(3^2\frac{2^5}{6!}\right)+\frac{1}{z}\left[3^2\frac{2^7}{8!}-3\left(3\frac{2^5}{6!}\right)^2\right]+O(z)\\ &= -\frac{3}{z^5}+\frac{1}{z^3}\frac{2}{5}+\frac{1}{z}\left[\frac{1}{35}-\frac{4}{75}\right]+O(z)\\ &= -\frac{3}{z^5}+\frac{1}{z^3}\frac{2}{5}-\frac{1}{z}\frac{13}{525}+O(z),\end{aligned}$$

ovvero $C_{-1} = -13/525$. L'integrale cercato vale

$$\begin{aligned}B &= 2i\pi\,\mathrm{Res}\left[\frac{1}{z\left(z^2+1-\cosh^2(z)\right)}, z=0\right] = 2i\pi\, C_{-1}\\ B &= -\frac{26}{525}\,i\pi.\end{aligned}$$

Terzo problema (punteggio 6/30)

Si ottenga lo sviluppo di Mittag-Leffler della funzione

$$g(z) = \frac{1}{(e^z-1)^2}.$$

Suggerimento. Potrebbe essere utile il valore della funzione Zeta di Riemann: $\zeta(2) = \pi^2/6$.

Soluzione del terzo problema

La funzione è meromorfa, in quanto rapporto di funzioni intere. Ha poli doppi nei punti $z_k = 2ki\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$. Si tratta di poli doppi poiché z_k rappresenta un polo semplice per la funzione $1/(e^z - 1)$, infatti

$$\lim_{z\to z_k} \frac{z - z_k}{e^z - 1} = \lim_{z\to z_k} \frac{1}{e^z} = \frac{1}{e^{z_k}} = e^{-z_k} = e^{-2ik\pi} = 1\,.$$

Lo sviluppo di Mittag-Leffler ha la forma

$$g(z) = \phi(z) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k(z)\,,$$

dove la funzione $\phi(z)$ è un polinomio che rappresenta la parte intera della funzione $g(z)$, mentre

$$F_k(z) = \frac{C_{-2}^{(k)}}{\left(z - z_k\right)^2} + \frac{C_{-1}^{(k)}}{z - z_k}\,, \qquad k \in \mathbb{Z}\,,$$

rappresenta la parte principale della serie di Laurent di $g(z)$ centrata nel k-esimo polo z_k. Per ottenere i coefficienti, calcoliamo la serie di Laurent usando la serie di Taylor della funzione a denominatore, si ha

$$\frac{1}{g(z)} = (e^z - 1)^2 = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \left.\frac{d^j}{dz^j}(e^z - 1)^2\right|_{z=z_k} \left(z - z_k\right)^j\,,$$

le derivate sono

$$\begin{aligned}
\left.\frac{d^0}{dz^0}(e^z - 1)^2\right|_{z=z_k} &= 0 \\
\left.\frac{d}{dz}(e^z - 1)^2\right|_{z=z_k} &= 2e^z\left(e^z - 1\right)\big|_{z=z_k} = 0 \\
\left.\frac{d^2}{dz^2}(e^z - 1)^2\right|_{z=z_k} &= \left[2e^z\left(e^z - 1\right) + 2e^{2z}\right]_{z=z_k} = 2 \\
\left.\frac{d^3}{dz^3}(e^z - 1)^2\right|_{z=z_k} &= \left[2e^z\left(e^z - 1\right) + 6e^{2z}\right]_{z=z_k} = 6 \\
&\vdots \\
\left.\frac{d^j}{dz^j}(e^z - 1)^2\right|_{z=z_k} &= \left[2e^z\left(e^z - 1\right) + e^{2z}\sum_{l=1}^{j-1} 2^l\right]_{z=z_k} = \left[2e^z\left(e^z - 1\right) + \left(2^j - 2\right)e^{2z}\right]_{z=z_k} = 2^j - 2\,,
\end{aligned}$$

e la serie di Taylor diventa

$$\frac{1}{g(z)} = (e^z - 1)^2 = \sum_{j=2}^{\infty} \frac{2^j - 2}{j!}\left(z - z_k\right)^j = \left(z - z_k\right)^2 + \left(z - z_k\right)^3 + \frac{7}{12}\left(z - z_k\right)^4 + O\left[\left(z - z_k\right)^5\right]\,.$$

La serie di Laurent della funzione $g(z)$ centrata in z_k si ottiene a partire dall'espressione

$$g(z) = \frac{1}{\left(z - z_k\right)^2} \frac{1}{1 + \left(z - z_k\right) + \frac{7}{12}\left(z - z_k\right)^2 + O\left[\left(z - z_k\right)^3\right]}\,,$$

usando, nel limite $z \longrightarrow z_k$, la somma della serie geometrica di ragione

$$\alpha = \left(z - z_k\right) + \frac{7}{12}\left(z - z_k\right)^2 + O\left[\left(z - z_k\right)^3\right]\,,$$

da cui

$$
\begin{aligned}
g(z) &= \frac{1}{(z-z_k)^2}\left[1-\left((z-z_k)+\frac{7}{12}(z-z_k)^2+O\left[(z-z_k)^3\right]\right)\right. \\
&\qquad \left. +\left((z-z_k)+\frac{7}{12}(z-z_k)^2+O\left[(z-z_k)^3\right]\right)^2+\dots\right] \\
&= \frac{1}{(z-z_k)^2}-\frac{1}{z-z_k}+\left(-\frac{7}{12}+1\right)(z-z_k)^0+O(z-z_k) \\
&= \frac{1}{(z-z_k)^2}-\frac{1}{z-z_k}+\frac{5}{12}+O(z-z_k)\,.
\end{aligned}
$$

Si evince che la parte principale $F_k(z)$ è

$$
F_k(z)=\frac{1}{(z-z_k)^2}-\frac{1}{z-z_k}\,, \qquad k\in\mathbb{Z}\,,
$$

ovvero si hanno i coefficienti di Laurent $C_{-2}^{(k)}=1$ e $C_{-1}^{(k)}=-1$, con $k\in\mathbb{Z}$. Riscriviamo lo sviluppo di Mittag-Leffler inserendo questo risultato e sfruttando la simmetria dei poli $z_k=-z_{-k}$ per cui

$$
\begin{aligned}
g(z) &= \phi(z)+\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{(z-z_k)^2}-\frac{1}{z-z_k}\right] \\
&= \phi(z)+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(z-z_k)^2}+\frac{1}{(z+z_k)^2}-\frac{1}{z-z_k}-\frac{1}{z+z_k}\right]+\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z} \\
&= \phi(z)+2\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{z^2+z_k^2}{(z^2-z_k^2)^2}-\frac{z}{z^2-z_k^2}\right]+\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z}\,.
\end{aligned}
$$

La funzione non ha singolarità all'infinito, consideriamo la successione $\left\{p_l=(2l+1)\pi e^{i\theta}\right\}_{l=0}^{\infty}$, che si accumula all'infinito nella direzione $\theta\in[0,2\pi]$ e non interseca mai i poli. Calcoliamo il limite del modulo della funzione sulla successione $\left\{p_l=(2l+1)\pi e^{i\theta}\right\}_{l=0}^{\infty}$, si ha

$$
\begin{aligned}
\lim_{l\to\infty}|g(p_l)| &= \lim_{l\to\infty}\frac{1}{|e^{p_l}-1|^2} \\
&= \lim_{l\to\infty}\frac{1}{|e^{p_l}|^2+1-2\mathrm{Re}(e^{p_l^*})} \\
&= \lim_{l\to\infty}\frac{1}{e^{2(2l+1)\pi\cos(\theta)}+1-2e^{(2l+1)\pi\cos(\theta)}\cos\left((2l+1)\pi\,\mathrm{sen}(\theta)\right)} \\
&= \begin{cases} 0 & \cos(\theta)>0 \\ 1/4 & \cos(\theta)=0\,,\ \mathrm{sen}(\theta)=\pm1 \\ 1 & \cos(\theta)<0 \end{cases}\,.
\end{aligned}
$$

Ne consegue che, come anticipato, la funzione è regolare all'infinito e che quindi la parte intera $\phi(x)$ è costante, la indichiamo con $\phi(x)=\phi_0$. Per ottenerne il valore, valutiamo in $z=0$ la differenza tra la funzione data e $(1/z^2-1/z)$, ovvero

$$
\lim_{z\to0}\left(g(z)-\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z}\right)=\phi_0+2\lim_{z\to0}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{z^2+z_k^2}{(z^2-z_k^2)^2}-\frac{z}{z^2-z_k^2}\right]\,.
$$

Per il membro di destra si ha

$$
[\text{membro destro}]=\phi_0+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{z_k^2}=\phi_0+\frac{2}{(2i\pi)^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\phi_0-\frac{1}{2\pi^2}\zeta(2)=\phi_0-\frac{1}{2\pi^2}\frac{\pi^2}{6}=\phi_0-\frac{1}{12}\,,
$$

dove la funzione $\zeta(z)$ è la Zeta di Riemann. Per calcolare il membro sinistro sfruttiamo la serie di Laurent della funzione $g(z)$ nell'origine, cioè,

$$g(z) = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} + \frac{5}{12} + O(z),$$

e quindi si ha

$$[\text{membro sinistro}] = \lim_{z\to 0}\left(g(z) - \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z}\right) = \lim_{z\to 0}\left(\frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} + \frac{5}{12} + O(z) - \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z}\right) = \frac{5}{12}.$$

Uguagliando i due membri si ottiene il valore di ϕ_0

$$\phi_0 = \frac{1}{2},$$

e lo sviluppo di Mittag-Leffler completo, usando i valori espliciti dei poli $z_k = 2i\pi k$, è

$$g(z) = \frac{1}{2} + 2\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{z^2 - 4\pi^2k^2}{(z^2+4\pi^2k^2)^2} - \frac{z}{z^2+4\pi^2k^2}\right] + \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z}.$$

Quarto problema (punteggio 6/30)

Nello spazio vettoriale a 4 dimensioni delle matrici 2×2 ad elementi complessi $M_{2\times 2}(\mathbb{C})$ si definisce l'operatore

$$\mathscr{H} = \sum_{j=1}^{3}\sum_{k=0}^{2}(\cdot,\sigma_j)(\sigma_k,\cdot),$$

in termini delle matrici di Puali $\{\sigma_j\}_{j=1}^3$, dell'identità $\sigma_0 = \mathrm{diag}(1,1)$ e del prodotto scalare, che $\forall A,B \in M_{2\times 2}(\mathbb{C})$, è dato da

$$(A,B) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\left(A^\dagger B\right).$$

Ne consegue che le azioni da sinistra verso destra e da destra verso sinistra dell'operatore $\mathscr{H}$ sul vettore $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{C})$ sono definite come

$$\mathscr{H}A = \sum_{j=1}^{3}\sum_{k=0}^{2}(\sigma_k,A)\sigma_j \in M_{2\times 2}(\mathbb{C}), \qquad A\mathscr{H} = \sum_{j=1}^{3}\sum_{k=0}^{2}(A,\sigma_j)\sigma_k \in M_{2\times 2}(\mathbb{C}).$$

- Si verifichi che l'operatore non ammette un insieme di autovettori ortonormali.
- Si ottengano gli autovalori e un insieme di autovettori.

Soluzione del quarto problema

Al fine di verificare che l'operatore non ammette un insieme di autovettori ortonormali è sufficiente dimostrare che non è normale, ovvero che non commuta con il suo aggiunto hermitiano, che definiamo come

$$\mathscr{H}^\dagger = \left(\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=0}^{2}(\cdot,\sigma_j)(\sigma_k,\cdot)\right)^\dagger = \sum_{j=1}^{3}\sum_{k=0}^{2}(\cdot,\sigma_k)(\sigma_j,\cdot).$$

Il commutatore dell'operatore e del suo aggiunto è diverso da zero, infatti

$$\begin{aligned}\left[\mathscr{H},\mathscr{H}^\dagger\right] = \mathscr{H}\mathscr{H}^\dagger - \mathscr{H}^\dagger\mathscr{H} &= \sum_{j,j'=1}^{3}\sum_{k,k'=0}^{2}\left[(\cdot,\sigma_j)\underbrace{(\sigma_k,\sigma_{k'})}_{\delta^k_{k'}}(\sigma_{j'},\cdot) - (\cdot,\sigma_k)\underbrace{(\sigma_j,\sigma_{j'})}_{\delta^j_{j'}}(\sigma_{k'},\cdot)\right] \\ &= \sum_{j,j'=1}^{3}\sum_{k=0}^{2}(\cdot,\sigma_j)(\sigma_{j'},\cdot) - \sum_{j=1}^{3}\sum_{k,k'=0}^{2}(\cdot,\sigma_k)(\sigma_{k'},\cdot) \\ &= 3\left(\sum_{j,j'=1}^{3}(\cdot,\sigma_j)(\sigma_{j'},\cdot) - \sum_{k,k'=0}^{2}(\cdot,\sigma_k)(\sigma_{k'},\cdot)\right) \neq 0.\end{aligned}$$

Non è nullo in quanto gli intervalli delle somme sono diversi.
L'insieme delle tre matrici di Pauli e la matrice identità $\left\{\sigma_j\right\}_{j=0}^{3}$, con $\sigma_0 = \mathrm{diag}(1,1)$, rappresenta una base ortonormale, rispetto al prodotto scalare dato, dello spazio vettoriale $M_{2\times 2}(\mathbb{C})$. Consideriamo la rappresentazione matriciale dell'operatore $\mathscr{H}$ rispetto a tale base, indichiamo con H la matrice 4×4, ovvero si ha $\mathscr{H} \hookleftarrow H$ e gli elementi sono

$$H^m_n = \sigma_m \mathscr{H} \sigma_n = \sum_{j=1}^{3}\sum_{k=0}^{2}(\sigma_m,\sigma_j)(\sigma_k,\sigma_n) = \sum_{j=1}^{3}\sum_{k=0}^{2}\delta^m_j\delta^k_n\,, \qquad m,n=0,1,2,3\,.$$

Poiché le delta di Kronecker hanno indici diversi, gli elementi della matrice H possono assumere i soli valori uno o zero, in particolare, tenendo conto del fatto che le somme su gli indici j e k non coprono tutto l'intervallo,

$$H = \begin{pmatrix} H^0_0 & H^0_1 & H^0_2 & H^0_3 \\ H^1_0 & H^1_1 & H^1_2 & H^1_3 \\ H^2_0 & H^2_1 & H^2_2 & H^2_3 \\ H^3_0 & H^3_1 & H^3_2 & H^3_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Gli autovalori si ottengono come soluzioni dell'equazione caratteristica

$$\begin{aligned} \det(H - Ix) &= 0 \\ \det\begin{pmatrix} -x & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1-x & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1-x & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -x \end{pmatrix} &= 0 \\ -x\left[-x(1-x)^2 + x\right] &= 0 \\ x^2\left[(1-x)^2 - 1\right] &= 0 \\ x^3(x-2) &= 0\,, \end{aligned}$$

si hanno gli autovalori

$$x_0 = 2\,, \qquad x_{1,2,3} = 0\,,$$

quindi l'autovalore nullo è degenere con ordine di degenerazione pari a 3. Gli autovettori sono le soluzioni non banali dei sistemi omogenei

$$\begin{pmatrix} -x_n & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1-x_n & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1-x_n & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -x_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

L'autovettore relativo all'autovalore non degenere è $(n=0)$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \\ d_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad a_0 = 0\,, \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_0 \\ c_0 \\ d_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

posto che $b_0 = 1$ si hanno $c_0 = b_0 = 1$ e $d_0 = b_0 = 1$, ovvero l'autovettore normalizzato è

$$v_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Nei casi dell'autovalore degenere si ha

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} a_n + b_n + c_n = 0 \\ \qquad d_n = \text{arbitrario} \end{cases}, \qquad n = 1,2,3\,,$$

scegliamo i valori di a_n, b_n e d_n richiedendo l'ortogonalità dell'insieme dei quattro autovettori. L'ortogonalità al primo autovettore v_0,

$$0 = v_0^\dagger \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ -a_n - b_n \\ d_n \end{pmatrix} = \frac{-a_n + d_n}{\sqrt{3}} \qquad \Rightarrow \qquad d_n = a_n \qquad \Rightarrow \qquad \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ -a_n - b_n \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Otteniamo una possibile terna di autovettori v_1, v_2 e v_3, a partire dalla forma precedente, ponendo rispettivamente $a_1 = 0$, $b_2 = 0$ e $-a_3 - b_3 = 0$, si hanno

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Le espressioni matriciali sono

$$\begin{aligned}
\mathscr{V}_0 &= \frac{1}{\sqrt{3}} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1-i \\ 1+i & -1 \end{pmatrix}, \\
\mathscr{V}_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\sigma_1 - \sigma_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1+i \\ 1-i & 0 \end{pmatrix}, \\
\mathscr{V}_2 &= \frac{1}{\sqrt{3}} (\sigma_0 - \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 2 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \\
\mathscr{V}_3 &= \frac{1}{\sqrt{3}} (\sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_3) = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

dove si intende $\mathscr{V}_n \hookleftarrow v_n$, con $n = 0, 1, 2, 3$.

Quinto problema (punteggio 6/30)

Si determini, rispetto alla base degli autovettori di $\hat{\sigma}_3$, la matrice che rappresenta l'operatore

$$\hat{P} = e^{\hat{\sigma}_1 + \hat{\sigma}_2} - e^{\hat{\sigma}_1} e^{\hat{\sigma}_2},$$

dove $\hat{\sigma}_j$, $j = 1, 2, 3$, è il j-simo operatore di Pauli.

Soluzione del quinto problema

Rispetto alla base degli autovettori di $\hat{\sigma}_3$ le matrici che rappresentano gli operatori $\hat{\sigma}_1$, $\hat{\sigma}_2$ e $\hat{\sigma}_3$ sono le ben note matrici di Pauli

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

La matrice P che rappresenta l'operatore $\hat{P}$ ha l'espressione formale

$$P = e^{\sigma_1 + \sigma_2} - e^{\sigma_1} e^{\sigma_2}.$$

Per "linearizzarla", sfruttiamo l'algebra delle matrici di Pauli, ovvero le regole di commutazione e anticommutazione

$$[\sigma_k, \sigma_m] = 2i\epsilon_{kmn}\sigma_n, \qquad \{\sigma_k, \sigma_m\} = 2I\delta_{km}, \qquad \sigma_k\sigma_m = I\delta_{km} + i\epsilon_{kmn}\sigma_n, \qquad k, m, n = 1, 2, 3.$$

Consideriamo gli sviluppi in serie di potenze per i due termini della matrice P, per il primo si ha

$$e^{\sigma_1 + \sigma_2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\sigma_1 + \sigma_2)^k}{k!},$$

le potenze pari della somma della prima e seconda matrice di Pauli sono

$$\begin{aligned}
(\sigma_1 + \sigma_2)^0 &= I, \\
(\sigma_1 + \sigma_2)^2 &= \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_1 = 2I + \{\sigma_1, \sigma_2\} = 2I, \\
(\sigma_1 + \sigma_2)^{2n} &= 2^n I, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N},
\end{aligned}$$

da cui si ottengono anche le dispari

$$(\sigma_1+\sigma_2)^{2n+1} = (\sigma_1+\sigma_2)\,(\sigma_1+\sigma_2)^{2n} = 2^n\,(\sigma_1+\sigma_2)\,, \qquad \forall\, n\in\mathbb{N}\,.$$

Ne consegue che il primo termine della matrice P ha la forma

$$\begin{aligned}
e^{\sigma_1+\sigma_2} &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\sigma_1+\sigma_2)^k}{k!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\sigma_1+\sigma_2)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\sigma_1+\sigma_2)^{2n+1}}{(2n+1)!}\\
&= I\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{(2n)!} + (\sigma_1+\sigma_2)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{(2n+1)!}\\
&= I\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\sqrt{2}\right)^{2n}}{(2n)!} + \frac{\sigma_1+\sigma_2}{\sqrt{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\sqrt{2}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!}\\
&= I\cosh\left(\sqrt{2}\right) + \frac{\sigma_1+\sigma_2}{\sqrt{2}}\,\mathrm{senh}\left(\sqrt{2}\right)\\
&= \begin{pmatrix} \cosh\left(\sqrt{2}\right) & \dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\,\mathrm{senh}\left(\sqrt{2}\right)\\ \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\,\mathrm{senh}\left(\sqrt{2}\right) & \cosh\left(\sqrt{2}\right)\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Per ottenere il secondo termine della matrice P, il prodotto degli esponenziali, sfruttiamo il fatto che le potenze intere di una generica matrice di Pauli verificano una proprietà simile a quella delle potenze della somma, ovvero

$$\sigma_j^{2n} = I\,, \qquad \sigma_j^{2n+1} = \sigma_j\,, \qquad j=1,2,3\,, \qquad \forall\, n\in\mathbb{N}\,.$$

Quindi per il secondo termine si ha

$$\begin{aligned}
e^{\sigma_1}e^{\sigma_2} &= \sum_{j=0}^{\infty}\frac{\sigma_1^j}{j!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sigma_2^k}{k!} = \left(I\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!} + \sigma_1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}\right)\left(I\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m)!} + \sigma_2\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)!}\right)\\
&= \left(I\cosh(1)+\sigma_1\,\mathrm{senh}(1)\right)\left(I\cosh(1)+\sigma_2\,\mathrm{senh}(1)\right)\\
&= I\cosh^2(1) + \sigma_1\sigma_2\,\mathrm{senh}^2(1) + (\sigma_1+\sigma_2)\cosh(1)\,\mathrm{senh}(1)\\
&= I\cosh^2(1) + i\sigma_3\,\mathrm{senh}^2(1) + (\sigma_1+\sigma_2)\cosh(1)\,\mathrm{senh}(1)\\
&= \begin{pmatrix}\cosh^2(1)+i\,\mathrm{senh}^2(1) & (1-i)\cosh(1)\,\mathrm{senh}(1)\\ (1+i)\cosh(1)\,\mathrm{senh}(1) & \cosh^2(1)-i\,\mathrm{senh}^2(1)\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}\dfrac{1+i}{2}\cosh(2)+\dfrac{1-i}{2} & \dfrac{1-i}{2}\,\mathrm{senh}(2)\\ \dfrac{1+i}{2}\,\mathrm{senh}(2) & \dfrac{1-i}{2}\cosh(2)+\dfrac{1+i}{2}\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

In definitiva l'espressione esplicita della matrice P è

$$P = \begin{pmatrix}\cosh\left(\sqrt{2}\right)-\dfrac{1+i}{2}\cosh(2)+\dfrac{1-i}{2} & \dfrac{1-i}{2}\left(\sqrt{2}\,\mathrm{senh}\left(\sqrt{2}\right)-\mathrm{senh}(2)\right)\\ \dfrac{1+i}{2}\left(\sqrt{2}\,\mathrm{senh}\left(\sqrt{2}\right)-\mathrm{senh}(2)\right) & \cosh\left(\sqrt{2}\right)-\dfrac{1-i}{2}\cosh(2)+\dfrac{1+i}{2}\end{pmatrix}.$$

Sesto problema (punteggio 6/30)

Usando il metodo della serie di Neumann e quindi dell'operatore risolvente, dopo aver stabilito per quali valori del parametro $\alpha\in\mathbb{C}$ tale operatore è definito, si ottenga la soluzione dell'equazione integrale

$$f(x) = \alpha\int_0^1 K(x,y)f(y)dy + \phi(x)\,,$$

dove il nucleo e la funzione termine noto sono

$$K(x,y) = \frac{x^3}{y+1}\,, \qquad \phi(x) = x^3\,, \qquad (x,y)\in[0,1]\times[0,1]\,.$$

Soluzione del sesto Problema

L'equazione integrale data può essere interpretata come la rappresentazione funzionale dell'equazione operatoriale

$$|f\rangle = \alpha\hat{K}|f\rangle + |\phi\rangle\,,$$

con le ovvie associazioni

$$|f\rangle \hookleftarrow f(x)\,, \qquad |\phi\rangle \hookleftarrow f(x)\,, \qquad \hat{K} \hookleftarrow K(x,y)\,.$$

Possiamo risolvere formalmente l'equazione introducendo l'operatore risolvente come somma della serie di Neumann, ovvero

$$|f\rangle = \alpha\hat{K}|f\rangle + |\phi\rangle \qquad \Rightarrow \qquad |f\rangle = \left(\hat{I} - \alpha\hat{K}\right)^{-1}|\phi\rangle = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\alpha\hat{K}\right)^{k}|\phi\rangle\,,$$

dove si assunta la condizione di convergenza della serie di Neumann $|\alpha|\,\|K\| < 1$. Verifichiamo la condizione usando la norma

$$\|K\| = \left(\int_0^1 \left|K(x,y)\right|^2 dxdy\right)^{1/2} = \left(\int_0^1 \frac{x^6}{(y+1)^2}dxdy\right)^{1/2} = \left(\int_0^1 x^6 dx \int_0^1 \frac{dy}{(y+1)^2}dy\right)1/2 = \frac{1}{\sqrt{14}}\,.$$

Ne consegue che il dominio di convergenza della serie di Neumann è il cerchio $\left\{\alpha : |\alpha| < 1/\,\|K\| = \sqrt{14}\right\}$. Indichiamo con $R(x,y)$ la rappresentazione dell'operatore risolvente e con $K_n(x,y)$ la rappresentazione della potenza n-esima dell'operatore nucleo $\hat{K}$, cioè

$$\left(\hat{I} - \alpha\hat{K}\right)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\alpha\hat{K}\right)^{k} = \sum_{k=0}^{\infty}\alpha^k\hat{K}^k \;\hookleftarrow\; \sum_{k=0}^{\infty}\alpha^k K_k(x,y) = R(x,y)\,.$$

La funzione $K_n(x,y)$ si ottiene come integrale multiplo $(n-1)$-esimo del prodotto di n funzioni nucleo con variabili concatenate. Partendo dal quadrato si hanno le rappresentazioni

$$\begin{aligned}
\hat{K}^2 &\quad\hookleftarrow\quad K_2(x,y) = \int_0^1 K(x,x_1)K(x_1,y)dx_1\,,\\
\hat{K}^3 &\quad\hookleftarrow\quad K_3(x,y) = \int_0^1 K(x,x_1)K(x_1,x_2)K(x_2,y)dx_1dx_2 = \int_0^1 K(x,x')K_2(x',y)dx'\,,\\
&\vdots \qquad\quad \vdots\\
\hat{K}^n &\quad\hookleftarrow\quad K_k(x,y) = \int_0^1 K(x,x_1)K(x_1,x_2)\cdots K(x_{n-1},y)dx_1dx_2\cdots dx_{k-1} = \int_0^1 K(x,x')K_{n-1}(x',y)dx'\,.
\end{aligned}$$

Nel caso in questione, ovvero con

$$K(x,y) = \frac{x^3}{y+1}\,,$$

la rappresentazione del quadrato dell'operatore è proporzionale al nucleo $K(x,y)$, infatti si ha

$$\begin{aligned}
K_2(x,y) &= \int_0^1 K(x,x_1)K(x_1,y)dx_1 = \int_0^1 \frac{x^3}{x_1+1}\frac{x_1^3}{y+1}dx_1 = \frac{x^3}{y+1}\int_0^1 \frac{x_1^3}{x_1+1}dx_1 \qquad \{w = x_1+1\}\\
&= \frac{x^3}{y+1}\int_1^2 \frac{(w-1)^3}{w}dw = \frac{x^3}{y+1}\int_1^2\left(w^2 - 3w + 3 - \frac{1}{w}\right)dw = \frac{x^3}{y+1}\left(\frac{2^3-1}{3} - 3\frac{2^2-1}{2} + 3 - \ln(2)\right)\\
&= \frac{x^3}{y+1}\left(\frac{5}{6} - \ln(2)\right)\,,
\end{aligned}$$

quindi

$$K_2(x,y) = \left(\frac{5}{6} - \ln(2)\right)K(x,y)\,.$$

Alla luce di questo risultato, è facile dedurre che la rappresentazione della potenza n-esima, con $n \geq 2$, sia

$$K_n(x,y) = \left(\frac{5}{6} - \ln(2)\right)^{n-1} K(x,y).$$

La serie che dà la rappresentazione del risolvente assume la forma

$$R(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n K_n(x,y) = \delta(x-y) + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n K_n(x,y),$$

dove abbiamo introdotto la distribuzione delta di Dirac come rappresentazione dell'operatore identità, cioè, dato un generico vettore $|g\rangle$ rappresentato dalla funzione $g(x)$ con $x \in [0,1]$, si ha

$$\hat{I}|g\rangle = |g\rangle \;\leftrightarrow\; \int_0^1 \delta(x-y) g(y) dy = g(x).$$

Usando le funzioni $K_n(x,y)$ si ottiene $R(x,y)$ coma somma della serie di Neumann, che rappresenta una serie geometrica, infatti si ha

$$R(x,y) = \delta(x-y) + K(x,y) \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \left(\frac{5}{6} - \ln(2)\right)^{n-1} = \delta(x-y) + \alpha K(x,y) \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \left(\frac{5}{6} - \ln(2)\right)^{n},$$

la ragione della serie è $\alpha(5/6 - \ln(2))$, quindi la serie converge se

$$|\alpha| \left|\frac{5}{6} - \ln(2)\right| = |\alpha| \left(\frac{5}{6} - \ln(2)\right) < 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad |\alpha| < \frac{1}{5/6 - \ln(2)} \simeq 7,13,$$

ma $|\alpha| < \sqrt{14} \simeq 3.74$, quindi la condizione è verificata.
La somma della serie geometrica è

$$R(x,y) = \delta(x-y) + \frac{\alpha K(x,y)}{1 - \alpha(5/6 - \ln(2))}.$$

La soluzione per $\phi(x) = x^3$ è data dall'integrale

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^1 R(x,y)\phi(y) dy = \phi(x) + \frac{\alpha}{1 - \alpha(5/6 - \ln(2))} \int_0^1 K(x,y)\phi(y) dy \\ &= \phi(x) + \frac{\alpha}{1 - \alpha(5/6 - \ln(2))} \int_0^1 \frac{x^3}{y+1} \phi(y) dy = x^3 + \frac{\alpha x^3}{1 - \alpha(5/6 - \ln(2))} \int_0^1 \frac{y^3}{y+1} dy \end{aligned}$$

da cui

$$f(x) = x^3 \left(1 + \alpha \frac{5/6 - \ln(2)}{1 - \alpha(5/6 - \ln(2))}\right) \equiv \frac{x^3}{1 - \alpha\beta},$$

dove $\beta = 5/6 - \ln(2)$.
Verifichiamo il risultato calcolando

$$\alpha \int_0^1 K(x,y) f(y) dy + \phi(x) = \alpha \frac{1}{1-\alpha\beta} x^3 \int_0^1 \frac{y^3}{y+1} dy + x^3 = x^3 \left(\frac{\alpha\beta}{1-\alpha\beta} + 1\right) = \frac{x^3}{1-\alpha\beta} = f(x).$$

Ne consegue che la funzione ottenuta è soluzione dell'equazione integrale.