Metodi Matematici per la Fisica

Prova scritta - 25 luglio 2018

Si risolvano cortesemente i seguenti problemi, sapendo che verranno valutati:

1. la correttezza del risultato ottenuto e della procedura utilizzata;
2. la completezza dei passaggi riportati;
3. il livello di esemplificazione con cui sono espressi i risultati (ad esempio un risultato numerico reale non deve contenere l'unità immaginaria);
4. la correttezza del formalismo utilizzato;
5. la chiarezza dell'esposizione e la leggibilità del testo.

Primo problema (punteggio: 6/30)

Si ottenga il valore dell'integrale

$$D = \int_0^{\infty} f(x) \log(x)\, dx\,,$$

con

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k}{(x-x_k)^2}\,, \qquad C_k = \frac{e^k}{k\,k!}\,, \qquad x_k = e^{i\pi+k}\,, \qquad k \in \mathbb{N}\,.$$

Suggerimento. Se $R(x)$ è una funzione razionale con poli non appartenenti al semiasse reale positivo e tale che $R(x) = o(1/x)$ per $x \to \infty$, allora

$$\int_0^{\infty} R(x) \ln(x)\, dx = -\frac{1}{2} \sum_{\forall z_j} \operatorname{Res}\left[R(z)\,(\ln(z) - i\pi)^2, z_j\right]\,.$$

Soluzione del primo problema

La serie che rappresenta la funzione $f(x)$ converge uniformemente $\forall\, x \in (0,\infty)$, poiché può essere maggiorata dalla serie della funzione esponenziale. Infatti, poiché dato $x \in (0,\infty)$, si ha

$$\mu = \min_{k\in\mathbb{N}} \left\{ \left|x - z_k\right|^2 \right\} > 0\,,$$

per il modulo della serie vale la maggiorazione

$$0 \le \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k}{(x-x_k)^2} \right| \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^k/(k\,k!)}{|x-x_k|^2} \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^k/(k\,k!)}{\min_{k\in\mathbb{N}} \left\{ \left|x - z_k\right|^2 \right\}} \le \frac{1}{\mu} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^k}{k\,k!} \le \frac{1}{\mu} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^k}{k!} \le \frac{1}{\mu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^k}{k!} = \frac{e}{\mu}\,.$$

Ne consegue che l'integrale della serie coincide con la serie degli integrali, ovvero

$$D = \int_0^{\infty} \log(x) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k}{x - x_k}\, dx = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \int_0^{\infty} \frac{\log(x)}{(x-x_k)^2}\, dx\,.$$

L'integrale k-esimo puó essere calcolato con la formula data, infatti l'integranda è il prodotto della funzione logaritmo e una funzione razionale che ha un solo polo doppio in $z = x_k$, per cui

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln(x)}{(x-x_k)^2}\, dx = -\frac{1}{2} \operatorname{Res}\left[\frac{(\ln(z) - i\pi)^2}{(z-x_k)^2}, z = x_k \right] = -\frac{1}{2} \left. \frac{d}{dz} (\ln(z) - i\pi)^2 \right|_{z=x_k} = -\frac{\ln(x_k) - i\pi}{x_k} = k\, e^{-k}\,.$$

L'integrale cercato vale

$$D = \sum_{k=1}^{\infty} C_k\, k\, e^{-k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^k}{k\,k!}\, k\, e^{-k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} = e - 1\,.$$

Secondo problema (punteggio 6/30)

Si calcoli l'integrale in valore principale

$$P = \mathrm{Pr}\oint_{\tau} \frac{dz}{\left(z^2-a^2\right)(z-ib)}\,,$$

con $a,\, b>0$ e dove τ è il triangolo di vertici: $v_1=-a$, $v_2=a$, $v_3=ib$.

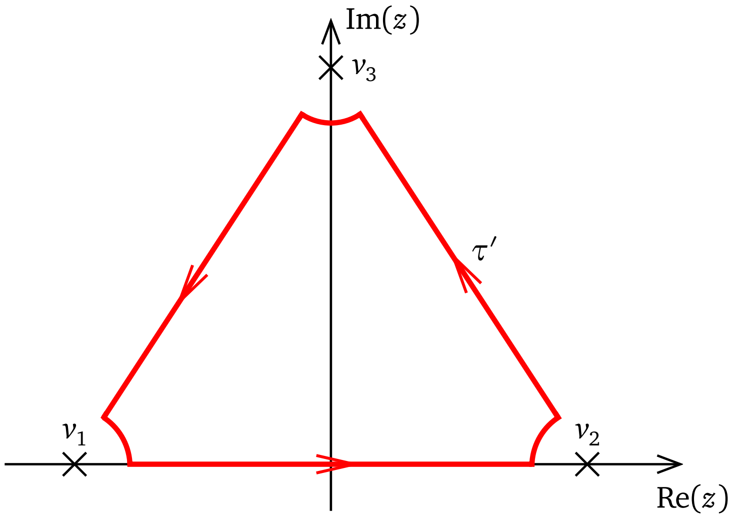
Soluzione del secondo problema

I tre vertici coincidono con i poli semplici della funzione integranda. Indicando con α_j l'angolo interno relativo al vertice v_j, $j=1,2,3$, si hanno i seguenti valori

$$\alpha_1=\alpha_2=\arctan\left(\frac{b}{a}\right)\,, \qquad \alpha_3=2\arctan\left(\frac{a}{b}\right)\,.$$

All'interno del triangolo τ non ci sono poli dell'integranda, quindi, applicando il teorema dei residui all'integrale sul percorso chiuso τ' mostrato in figura, si ha

$$\oint_{\tau'} \frac{dz}{\left(z^2-a^2\right)(z-ib)} = 0\,.$$



Questo integrale nel limite $\epsilon\to 0^+$, dove ϵ è il raggio degli archi centrati nei vertici, γ_j con $j=1,2,3$, vale

$$0=\lim_{\epsilon\to 0^+}\oint_{\tau'} \frac{dz}{\left(z^2-a^2\right)(z-ib)} = P-\sum_{j=1}^{3}\int_{\gamma_j}\frac{dz}{\left(z^2-a^2\right)(z-ib)} = P - i\alpha_j\lim_{z\to v_j}\frac{z-v_j}{\left(z^2-a^2\right)(z-ib)}\,.$$

I limiti dell'ultimo membro valgono

$$\lim_{z\to v_j}\frac{z-v_j}{\left(z^2-a^2\right)(z-ib)} = \begin{cases} \dfrac{1}{(v_1-v_2)(v_1-v_3)} = \dfrac{1}{2a(a+ib)} & j=1 \\[2ex] \dfrac{1}{(v_2-v_1)(v_2-v_3)} = \dfrac{1}{2a(a-ib)} & j=2 \\[2ex] \dfrac{1}{(v_3-v_1)(v_3-v_2)} = -\dfrac{1}{(a^2+b^2)} & j=3 \end{cases}\,.$$

Ne consegue che l'integrale cercato

$$
\begin{aligned}
P &= i\alpha_j \lim_{z \to v_j} \frac{z - v_j}{\left(z^2 - a^2\right)(z - ib)} \\
&= \frac{i\alpha_1}{2a}\left(\frac{1}{a + ib} + \frac{1}{a - ib}\right) - \frac{i\alpha_3}{a^2 + b^2} \\
&= \frac{i}{a^2 + b^2}\left(\arctan\left(\frac{b}{a}\right) - 2\arctan\left(\frac{a}{b}\right)\right).
\end{aligned}
$$

Terzo problema (punteggio 6/30)

Dopo aver stabilito i domini di convergenza di tutte le serie di Laurent centrate in $z = -1$ della funzione

$$
f(z) = \frac{1}{\left(z^2 + 1\right)\left(z^2 - 2\right)},
$$

si determini quella che converge nell'origine.

Soluzione del terzo problema

La funzione $f(z)$ ha quattro poli semplici nei punti

$$
z_{1,2} = \pm i, \qquad z_{3,4} = \pm\sqrt{2}.
$$

Ci sono quattro serie di Laurent centrate in $z = -1$ convergenti nei domini

$$
\begin{aligned}
C_1 &= \left\{z : |z + 1| < \sqrt{2} - 1\right\}, \\
C_2 &= \left\{z : \sqrt{2} - 1 < |z + 1| < \sqrt{2}\right\}, \\
C_3 &= \left\{z : \sqrt{2} < |z + 1| < 1 + \sqrt{2}\right\}, \\
C_4 &= \left\{z : |z + 1| > 1 + \sqrt{2}\right\},
\end{aligned}
$$

si tratta di un cerchio, il primo, e tre corone circolari. È immediato verificare che L'origine, $z = 0$, appartiene alla corona circolare C_2, infatti la condizione $\sqrt{2} - 1 < |z + 1| < \sqrt{2}$ è banalmente vera per $z = 0$, per cui si ha $\sqrt{2} - 1 < 1 < \sqrt{2}$. Per ottenere la serie di Laurent scriviamo la funzione $f(z)$ come somma di poli semplici, ne facciamo cioè lo sviluppo di Mittag-Leffler

$$
f(z) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{z^2 - 2} - \frac{1}{z^2 + 1}\right) = \frac{1}{6\sqrt{2}}\left(\frac{1}{z - \sqrt{2}} - \frac{1}{z + \sqrt{2}}\right) - \frac{1}{6i}\left(\frac{1}{z - i} - \frac{1}{z + i}\right).
$$

Sommiamo e sottraiamo l'unità a denominatore

$$
f(z) = \frac{1}{6\sqrt{2}}\left(\frac{1}{(z + 1) - \left(1 + \sqrt{2}\right)} - \frac{1}{(z + 1) - \left(1 - \sqrt{2}\right)}\right) - \frac{1}{6i}\left(\frac{1}{(z + 1) - (1 + i)} - \frac{1}{(z + 1) - (1 - i)}\right).
$$

Confrontiamo i termini a denominatore con $z \in C_2$

$$
|z + 1| < \sqrt{2} < |1 + \sqrt{2}| = 1 + \sqrt{2}, \qquad |z + 1| > |1 - \sqrt{2}| = \sqrt{2} - 1, \qquad |z + 1| < \sqrt{2} = |1 + i| = |1 - i|,
$$

ovvero

$$
\left|\frac{z + 1}{1 + \sqrt{2}}\right| < 1, \qquad \left|\frac{1 - \sqrt{2}}{z + 1}\right| < 1, \qquad \left|\frac{z + 1}{1 \pm i}\right| < 1.
$$

Alla luce di questi risultati mettiamo in evidenza $(1+\sqrt{2})$ e $(1\pm i)$ nel primo, nel terzo e nel quarto termine, mentre mettiamo in evidenza $(z+1)$ nel secondo, così da poter sfruttare la somma della serie geometrica, infatti

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{6\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{1+\sqrt{2}}\frac{1}{1-\frac{z+1}{1+\sqrt{2}}}-\frac{1}{z+1}\frac{1}{1-\frac{1-\sqrt{2}}{z+1}}\right)-\frac{1}{6i}\left(-\frac{1}{1+i}\frac{1}{1-\frac{z+1}{1+i}}+\frac{1}{1-i}\frac{1}{1-\frac{z+1}{1-i}}\right)\\
&= -\frac{1}{6\sqrt{2}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z+1)^k}{\left(1+\sqrt{2}\right)^{k+1}}-\frac{1}{6\sqrt{2}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(1-\sqrt{2}\right)^k}{(z+1)^{k+1}}+\frac{1}{6i}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z+1)^k}{(1+i)^{k+1}}-\frac{1}{6i}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z+1)^k}{(1-i)^{k+1}}\\
&= -\frac{1}{6\sqrt{2}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z+1)^k}{\left(1+\sqrt{2}\right)^{k+1}}+\frac{1}{6i}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z+1)^k}{(1+i)^{k+1}}-\frac{1}{6i}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z+1)^k}{(1-i)^{k+1}}-\frac{1}{6\sqrt{2}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(1-\sqrt{2}\right)^k}{(z+1)^{k+1}}\\
&= -\frac{1}{6}\sum_{k=0}^{\infty}(z+1)^k\left(\frac{1/\sqrt{2}}{\left(1+\sqrt{2}\right)^{k+1}}+\frac{i}{(1+i)^{k+1}}-\frac{i}{(1-i)^{k+1}}\right)-\frac{1}{6\sqrt{2}}\sum_{k=-\infty}^{-1}\frac{(z+1)^k}{\left(1-\sqrt{2}\right)^{k+1}}\\
&\equiv \sum_{k=-\infty}^{\infty}C_k(z+1)^k\,.
\end{aligned}$$

I coefficienti di Laurent sono

$$C_k=\begin{cases}-\dfrac{\left(1-\sqrt{2}\right)^{-k-1}}{6\sqrt{2}} & k<0\\[2ex] -\dfrac{\left(1-\sqrt{2}\right)^{-k-1}/\sqrt{2}+i(1+i)^{-k-1}-i(1-i)^{-k-1}}{6} & k\geq 0\end{cases}\,.$$

Quarto problema (punteggio 6/30)

Sia T una generica matrice complessa $N\times N$ e T' la matrice che si ottiene sommando alla k-esima riga di T la j-esima moltiplicata per α. Si ottenga la matrice C che rappresenta questa operazione, ovvero tale da verificare l'identità

$$T'=CT\,.$$

Nello spazio delle matrici complesse 3×3, si determinino la matrice Q e la sua inversa Q^{-1}, sapendo che la coniugata hermitiana $Q^\dagger$ si riduce all'identità se soggetta alla sequenza ordinata delle tre operazioni:

- sommare alla prima la seconda riga moltiplicata per 2;
- sommare alla seconda la terza riga moltiplicata per 3;
- sommare alla terza la prima riga.

Suggerimento. Può essere utile usare le rappresentazioni matriciali delle operazioni.

Soluzione del quarto problema

L'elemento (m,l), con $m,l\in\{1,2,\ldots,N\}$, della matrice T' in termini degli elementi della matrice T è

$${T'}^m_{\ l}=T^m_{\ l}+\alpha\delta^m_{\ k}T^j_{\ l}\,,$$

dove k e j sono fissati e la delta di Kronecker indica che il secondo termine è non nullo solo per la k esima riga. Al fine di scrivere T' come il prodotto di una matrice da determinare e la matrice T, introduciamo due altre delta di Kronecker, sottintendendo la somma sugli indici ripetuti in posizione covariante e controvariante,

$${T'}^m_{\ l}=T^m_{\ l}+\alpha\delta^m_{\ k}\delta^j_{\ i}T^i_{\ l}=\delta^m_{\ i}T^i_{\ l}+\alpha\delta^m_{\ k}\delta^j_{\ i}T^i_{\ l}=\left(I+\alpha P_{[k,j]}\right)^m_{\ i}T^i_{\ l}\,.$$

La matrice $P_{[k,j]}$, definita come prodotto di due delta di Kronecker ciascuna con un indice fissato, ha solo un elemento non nullo ed uguale ad uno, quello della k-esima riga e j-esima colonna, si ha cioè

$$\left(P_{[k,j]}\right)^m_{\ l} = \delta^m_k \delta^j_l = \begin{pmatrix} 0 & 0 & & \cdots & & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & & \left(P_{[k,j]}\right)^k_{\ j} & & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & \cdots & & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

La matrice X che, nello spazio delle matrici complesse 3×3, rappresenta l'operazione di somma alla prima riga della seconda moltiplica per 2, si ottiene usando l'espressione di $P\left(P_{[1,2]}\right)$ nel caso di $N = 3$, con $(k, j) = (1, 2)$ e $\alpha = 2$ ed è

$$X \equiv I + 2\,P_{[1,2]} = I + \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Infatti, per una generica matrice A si ha

$$XA = A + \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^1_1 & A^1_2 & A^1_3 \\ A^2_1 & A^2_2 & A^2_3 \\ A^3_1 & A^3_2 & A^3_3 \end{pmatrix} = A + \begin{pmatrix} 2A^2_1 & 2A^2_2 & 2A^2_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^1_1 + 2A^2_1 & A^1_2 + 2A^2_2 & A^1_3 + 2A^2_3 \\ A^2_1 & A^2_2 & A^2_3 \\ A^3_1 & A^3_2 & A^3_3 \end{pmatrix} .$$

Allo stesso modo, le operazione di somma alla seconda riga della terza moltiplicate per 3 e di somma alla terza riga della prima sono rappresentate, rispettivamente, da

$$Y \equiv I + 3\,P_{[2,3]} = I + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ,$$

$$Z \equiv I + P_{[3,1]} = I + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Poiché l'ordine delle operazioni segue l'ordine di azione degli operatori, che va da sinistra, dove si trova il primo che agisce, a destra, avremo

$$ZYXQ^\dagger = I ,$$

ne consegue che il prodotto ZYX rappresenta l'inversa dell'aggiunta

$$\left(Q^\dagger\right)^{-1} = ZYX = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} .$$

La matrice $Q^\dagger$ si ottiene invertendo sia le operazioni, ovvero anziché sommare si sottrae, che l'ordine di esecuzione. Le operazioni invertite e le matrici che le rappresentano sono:

- sottrarre alla terza la prima riga

$$Z' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} ;$$

- sottrarre alla seconda la terza riga moltiplicata per 3

$$Y' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ;$$

- sottrarre alla prima la seconda riga moltiplicata per 2

$$X' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Ne consegue

$$Q^\dagger = X'Y'Z' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -2 & 6 \\ 3 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Le matrici richieste sono

$$Q = \begin{pmatrix} -5 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 6 & -3 & 1 \end{pmatrix} , \qquad Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Verifichiamo

$$Q^{-1}Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 6 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ,$$

$$QQ^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 6 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Per ottenere Q^{-1} dall'inversa della matrice aggiunta $\left(Q^\dagger\right)^{-1}$, abbiamo usato l'identità facilmente dimostrabile

$$\left(Q^\dagger\right)^{-1} = \left(Q^{-1}\right)^\dagger .$$

Infatti, partendo dalla definizione di inversa

$$QQ^{-1} = Q^{-1}Q = I ,$$

e facendo la coniugazione hermitiana dei tre membri si ha

$$\left(Q^{-1}\right)^\dagger Q^\dagger = Q^\dagger \left(Q^{-1}\right)^\dagger = I ,$$

che implica: $\left(Q^{-1}\right)^\dagger = \left(Q^\dagger\right)^{-1}$.

Quinto problema (punteggio 6/30)

Si determino la matrice 3×3 hermitiana A e il numero complesso x tali che

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \qquad A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ x \end{pmatrix} , \qquad \mathrm{Tr}\,(A) = 0 .$$

Soluzione del quinto problema

I due vettori normalizzati

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} , \qquad u_2 = \frac{1}{\sqrt{2+|x|^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ x \end{pmatrix} ,$$

sono autovettori di A con, rispettivamente, autovalori $\alpha_1 = 0$ e $\alpha_2 = 1$. Il fatto che la matrice sia hermitiana e gli autovalori distinti implica che gli autovettori siano ortogonali, ovvero

$$0 = u_1^\dagger u_2 = \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{2+|x|^2}} (1\;1\;1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ x \end{pmatrix} = \frac{2+x}{\sqrt{3}\sqrt{2+|x|^2}} \qquad \Rightarrow \qquad x = -2 .$$

Inoltre, poiché la traccia coincide con la somma degli autovalori, il terzo autovalore si ottiene come

$$0 = \mathrm{Tr}(A) = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1 + \alpha_3 \qquad \Rightarrow \qquad \alpha_3 = -1\,.$$

È diverso dai precedenti, l'autovettore corrispondente, u_3, è ortogonale sia a u_1 che a u_2. I tre autovettori formano una base ortonormale. Per determinare u_3 partiamo dalla forma generica

$$u_3 = \frac{1}{\sqrt{|a|^2+|b|^2+|c|^2}} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

e imponiamo l'ortogonalità

$$\begin{cases} 0 = u_1^\dagger u_3 = \dfrac{a+b+c}{\sqrt{3}\sqrt{|a|^2+|b|^2+|c|^2}} \\ 0 = u_1^\dagger u_2 = \dfrac{a+b-2c}{\sqrt{6}\sqrt{|a|^2+|b|^2+|c|^2}} \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{matrix} c = 0 \\ b = -a \end{matrix}\;,$$

posto $a = 1$, si ha

$$u_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

In definitiva i tre autovalori e gli autovettori corrispondenti sono

$$\begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 1 \\ \alpha_3 = -1 \end{cases}, \qquad u_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad u_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad u_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La rappresentazione diagonale di A è $A_d = \mathrm{diag}(0,1,-1)$ e la matrice unitaria diagonalizzante, U, tale che

$$A = U A_d U^\dagger\,,$$

si ottiene allineando gli autovettori

$$U = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice cercata è

$$A = U A_d U^\dagger = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

Sesto problema (punteggio 6/30)

Nello spazio delle funzioni a quadrato sommabili $L^2(\mathbb{R})$ si calcoli la norma della convoluzione $(f * g)(x) \in L^2(\mathbb{R})$ con

$$f(x) = \frac{\mathrm{sen}(x)}{x}\,, \qquad g(x) = \theta(-x)\, e^x\,,$$

dove $\theta(x)$ è la funzione a gradino di Heaviside.
Suggerimento. Potrebbe essere utile l'identità di Parseval per la trasformate di Fourier.

Soluzione del sesto Problema

L'identità di Parseval per la trasformate di Fourier (TF) che data una funzione $h(x) \in L^2(\mathbb{R})$, indicandone con $\tilde{h}(k)$ la TF si ha

$$\|h\| = \|\tilde{h}\| \qquad \Leftrightarrow \qquad \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |h(x)|^2\, dx} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \left|\tilde{h}(k)\right|^2 dk}\,.$$

Ne consegue che

$$\left\|f * g\right\| = \left\|\mathscr{F}_k\left[f * g\right]\right\|,$$

inoltre il teorema della convoluzione afferma che

$$\mathscr{F}_k\left[f * g\right] = \sqrt{2\pi}\,\mathscr{F}_k\left[f\right]\mathscr{F}_k\left[g\right] = \sqrt{2\pi}\,\tilde{f}(k)\,\tilde{g}(k)\,,$$

per cui

$$\left\|f * g\right\| = \left\|\mathscr{F}_k\left[f * g\right]\right\| = \sqrt{2\pi}\left\|\tilde{f}(k)\,\tilde{g}(k)\right\|.$$

Ovvero la norma può essere ottenuto come norma delle due TF.
Calcoliamo la TF di $f(x)$ deformando il percorso di integrazione in modo da aggirare l'origine con una semicirconferenza immersa nel semipiano delle parti immaginarie positive. L'integrale non cambia in quanto l'origine è una singolarità eliminabile, si ha

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} e^{-ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\Gamma} \frac{\operatorname{sen}(z)}{z} e^{-ikz} dz = \frac{1}{2i\sqrt{2\pi}} \int_{\Gamma} \frac{e^{-iz(k-1)} - e^{-iz(k+1)}}{z} dz\,,$$

dove $\Gamma = (-\infty, -\epsilon) \cup \left\{z : z = \epsilon e^{i\theta}, \theta \in (0, \pi)\right\} \cup (\epsilon, \infty)$. Applicando il lemma di Jordan e il teorema dei residui si ottiene

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{2i\sqrt{2\pi}} \int_{\Gamma} \frac{e^{-iz(k-1)} - e^{-iz(k+1)}}{z} dz = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\left[-\theta(k-1) + \theta(k+1)\right] = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \begin{cases} 1 & |k| < 1 \\ 0 & |k| > 1 \end{cases}.$$

La TF della funzione $g(x)$ vale

$$\tilde{g}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \theta(-x) e^{x} e^{-ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{x(1-ik)} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{1-ik} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{i}{i+k}\,.$$

In definitiva la norma richiesta vale

$$\begin{aligned} \left\|f * g\right\| &= \sqrt{2\pi}\left\|\tilde{f}(k)\,\tilde{g}(k)\right\| = \sqrt{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \left|\tilde{f}(k)\tilde{g}(k)\right|^2 dk\right)^{1/2} = \sqrt{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \left|\tilde{f}(k)\right|^2 \left|\tilde{g}(k)\right|^2 dk\right)^{1/2} \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\int_{-1}^{1} \left|\frac{i}{i+k}\right|^2 dk\right)^{1/2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+k^2} dk\right)^{1/2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\arctan(k)\big|_{-1}^{1}\right)^{1/2} \\ \left\|f * g\right\| &= \frac{\pi}{2}\,. \end{aligned}$$