Metodi Matematici per la Fisica

Prova scritta - 25 luglio 2017

Si risolvano cortesemente i seguenti problemi, sapendo che verranno valutati:

1. la correttezza del risultato ottenuto e della procedura utilizzata;
2. la completezza dei passaggi riportati;
3. il livello di esemplificazione con cui sono espressi i risultati (ad esempio un risultato numerico reale non deve contenere l'unità immaginaria);
4. la correttezza del formalismo utilizzato;
5. la chiarezza dell'esposizione e la leggibilità del testo.

Primo problema (punteggio: 6/30)

Si calcoli l'integrale

$$G = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{\cosh(x)+2} dx \, .$$

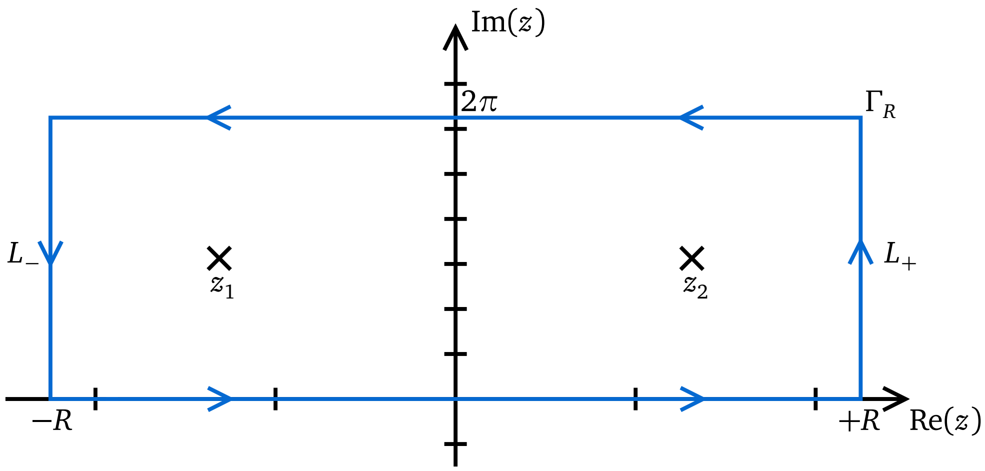
Suggerimento. Potrebbe essere conveniente considerare un percorso rettangolare.

Soluzione del primo problema

Si considera l'integrale sul percorso chiuso, rettangolare, mostrato in figura, composto dai quattro segmenti

$$\Gamma_R = [-R, +R] \cup L_+ \cup [+R+2i\pi, -R+2i\pi] \cup L_- \, , \qquad L_\pm = \pm[\pm R, \pm R + 2i\pi] \, ,$$

dove si è usata la notazione $[P_1, P_2] = -[P_2, P_1]$ per indicare il segmento di estremi P_1 e P_2, orientato nel verso che va dal primo al secondo punto.



L'integranda ha singolarità nei punti z, tali che $\cosh(z) = -2$, ovvero gli zeri dell'equazione

$$\cosh(z) + 2 = 0 \qquad \to \qquad e^{2z} + 4e^z + 1 = 0 \qquad \to \qquad e^z = -2 \pm \sqrt{3} \, ,$$

da cui si ottengono i due insiemi di soluzioni

$$z_{-,k} = \ln\left(-2+\sqrt{3}\right) + 2ik\pi \, , \qquad z_{+,k} = \ln\left(-2-\sqrt{3}\right) + 2ik\pi \, , \qquad k \in \mathbb{Z} \, .$$

Gli argomenti dei logaritmi sono negativi, quindi, usando la notazione polare: $\left(-2+\sqrt{3}\right) = \left(2-\sqrt{3}\right)e^{i\pi}$ e $\left(-2-\sqrt{3}\right) = \left(2+\sqrt{3}\right)e^{i\pi}$, si ottengono

$$z_{-,k} = \ln\left(2-\sqrt{3}\right) + (2k+1)i\pi \, , \qquad z_{+,k} = \ln\left(2+\sqrt{3}\right) + (2k+1)i\pi \, , \qquad k \in \mathbb{Z} \, .$$

Infine, poichè

$$2-\sqrt{3}=\left(2-\sqrt{3}\right)\frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=\frac{1}{2+\sqrt{3}}\,,$$

i logaritmi dei moduli, ovvero le parti reali dei numeri $z_{\pm,k}$, sono opposti

$$\ln\left(2-\sqrt{3}\right)=-\ln\left(2+\sqrt{3}\right)\,,$$

quindi, per le singolarità si ha la forma compatta

$$z_{\pm,k}=\pm\ln\left(2+\sqrt{3}\right)+(2k+1)i\pi\equiv\pm x_0+(2k+1)i\pi\,,\qquad k\in\mathbb{Z}\,,$$

dove si è posto $x_0=\ln\left(2+\sqrt{3}\right)$. Le singolarità sono poli semplici, infatti si hanno i residui

$$\begin{aligned}
R_{\pm,k}&=\lim_{z\to z_{\pm,k}}\frac{\cos(z)(z-z_{\pm,k})}{\cosh(z)+2}=\frac{\cos(z_{\pm,k})}{\operatorname{senh}(z_{\pm,k})}=\frac{\cos(x_0)\cos\left((2k+1)i\pi\right)\mp\operatorname{sen}(x_0)\operatorname{sen}\left((2k+1)i\pi\right)}{\pm\operatorname{senh}(x_0)\cosh\left((2k+1)i\pi\right)+\cosh(x_0)\operatorname{senh}\left((2k+1)i\pi\right)}\\
&=\frac{\cos(x_0)\cos\left((2k+1)i\pi\right)\mp\operatorname{sen}(x_0)\operatorname{sen}\left((2k+1)i\pi\right)}{\mp\operatorname{senh}(x_0)}\\
&=\frac{\mp\cos(x_0)\cos\left((2k+1)i\pi\right)+\operatorname{sen}(x_0)\operatorname{sen}\left((2k+1)i\pi\right)}{\operatorname{senh}(x_0)}\,,
\end{aligned}$$

dove abbiamo usato le identità: $\cosh\left((1+2k)i\pi\right)=(-1)^{2k+1}=-1$ e $\operatorname{senh}\left((1+2k)i\pi\right)=0$. Il valore dell'integrale lungo il percorso chiuso Γ_R, per $R\to\infty$, si ottiene con il teorema dei residui e vale

$$\lim_{R\to\infty}\oint_{\Gamma_R}\frac{\cos(z)}{\cosh(z)+2}dz=2i\pi\left(\operatorname{Res}\left[\frac{\cos(z)}{\cosh(z)+2},-x_0+i\pi\right]+\operatorname{Res}\left[\frac{\cos(z)}{\cosh(z)+2},+x_0+i\pi\right]\right)\,.$$

In termini dei singoli tratti rettilinei di Γ_R, indicando con $f(z)$ la funzione integranda,

$$\begin{aligned}
\lim_{R\to\infty}\oint_{\Gamma_R}\frac{\cos(z)}{\cosh(z)+2}dz&=\lim_{R\to\infty}\left(\int_{[-R,+R]}f(x)dx+\int_{[+R,+R+2i\pi]}f(z)dz+\int_{[-R+2i\pi,+R+2i\pi]}f(z)dz+\int_{[-R+2i\pi,-R]}f(z)dz\right)\\
&=\int_{[-\infty,+\infty]}f(z)dz-\int_{[-\infty,+\infty]}f(x+2i\pi)dx\\
&=G-\int_{[-\infty,+\infty]}f(x+2i\pi)dx\,,
\end{aligned}$$

dove abbiamo usato l'annullamento dei valori limite sui tratti verticali, cioè

$$\lim_{R\to\infty}\int_{[+R,+R+2i\pi]}f(z)dz=\lim_{R\to\infty}\int_{[-R+2i\pi,-R]}f(z)dz=0\,.$$

Inoltre, per il secondo integrale si ha

$$\begin{aligned}
\int_{[-\infty,+\infty]}f(x+2i\pi)dx&=\int_{[-\infty,+\infty]}\frac{\cos\left(x+2i\pi\right)}{\cosh(x)+2}dx\\
&=\int_{[-\infty,+\infty]}\frac{\cos\left(x\right)\cos\left(2i\pi\right)-\operatorname{sen}\left(x\right)\operatorname{sen}\left(2i\pi\right)}{\cosh(x)+2}dx\\
&=\int_{[-\infty,+\infty]}\frac{\cos\left(x\right)\cos\left(2i\pi\right)}{\cosh(x)+2}dx\\
&=\cos\left(2i\pi\right)\,G\,,
\end{aligned}$$

l'integrale con la funzione seno a numeratore si annulla in quanto l'integranda è dispari e l'intervallo di integrazione è simmetrico. Usando questo risultato si arriva all'espressione

$$\left(1-\cos(2i\pi)\right)G=\lim_{R\to\infty}\oint_{\Gamma_R}\frac{\cos(z)}{\cosh(z)+2}dz=2i\pi\left(\operatorname{Res}\left[\frac{\cos(z)}{\cosh(z)+2},-x_0+i\pi\right]+\operatorname{Res}\left[\frac{\cos(z)}{\cosh(z)+2},+x_0+i\pi\right]\right)\,,$$

da cui si ottiene G come

$$\begin{aligned} G &= \frac{2i\pi}{1-\cos(2i\pi)}\left(\operatorname{Res}\left[\frac{\cos(z)}{\cosh(z)+2}, -x_0+i\pi\right] + \operatorname{Res}\left[\frac{\cos(z)}{\cosh(z)+2}, +x_0+i\pi\right]\right) \\ &= \frac{2i\pi}{1-\cos(2i\pi)}\left(R_{-,0}+R_{+,0}\right). \end{aligned}$$

I residui dei poli semplici, $R_{\pm,0}$, sono

$$R_{\pm,0} = \frac{\mp\cos(x_0)\cos(i\pi)+\operatorname{sen}(x_0)\operatorname{sen}(i\pi)}{\operatorname{senh}(x_0)},$$

quindi

$$G = \frac{2i\pi}{1-\cos(2i\pi)}\left(R_{-,0}+R_{+,0}\right) = 4i\pi\frac{\operatorname{sen}(x_0)\operatorname{sen}(i\pi)}{\operatorname{senh}(x_0)(1-\cos(2i\pi))} = 4\pi\frac{-\operatorname{sen}(x_0)\operatorname{senh}(\pi)}{\operatorname{senh}(x_0)(1-\cosh(2\pi))}.$$

In definitiva, usando $x_0 = \ln\left(2+\sqrt{3}\right)$ e

$$\operatorname{senh}\left(\ln\left(2+\sqrt{3}\right)\right) = \frac{e^{\ln\left(2+\sqrt{3}\right)} - e^{-\ln\left(2+\sqrt{3}\right)}}{2} = \frac{e^{\ln\left(2+\sqrt{3}\right)} - e^{\ln\left(2-\sqrt{3}\right)}}{2} = \frac{2+\sqrt{3}-\left(2-\sqrt{3}\right)}{2} = \sqrt{3},$$

si ottiene il risultato cercato

$$G = 4\pi\frac{\operatorname{sen}\left(\ln\left(2+\sqrt{3}\right)\right)\operatorname{senh}(\pi)}{\sqrt{3}\left(\cosh(2\pi)-1\right)}.$$

Secondo problema (punteggio 6/30)

Si calcoli l'espressione formale dei coefficienti della prima serie di Laurent della funzione

$$f(z) = \frac{\operatorname{sen}(z+1)}{z^2-3z+2},$$

centrate in $z=1$. Si determinino le espressioni numeriche dei primi quattro coefficienti non nulli.
Suggerimento. È sicuramente utile usare le serie di Taylor note, con l'accortezza, però, di scegliere sempre come centro dello sviluppo il punto $z=1$.

Soluzione del secondo problema

La funzione $f(z)$ è meromorfa ed ha due poli semplici nei punti

$$z_1 = 1, \qquad z_2 = 2, \tag{1}$$

che rappresentano gli zeri del polinomio di secondo grado a denominatore, quindi

$$f(z) = \frac{\operatorname{sen}(z+1)}{(z-1)(z-2)}.$$

Il dominio di convergenza della prima serie di Laurent è la corona circolare

$$C_1 = \{z : 0 < |z-1| < 1\}.$$

Al fine di sfruttare gli sviluppi in serie noti, riscriviamo sia l'argomento della funzione seno che del secondo fattore a denominatore in termini di $(z-1)$, ovvero

$$f(z) = -\frac{\operatorname{sen}(z-1+2)}{(z-1)(1-(z-1))} = -\frac{\operatorname{sen}(z-1)\cos(2)+\operatorname{sen}(2)\cos(z-1)}{(z-1)(1-(z-1))}.$$

Si usano i seguenti sviluppi

$$\operatorname{sen}(z-1)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(z-1)^{2k+1}}{(2k+1)!}\,,\qquad \cos(z-1)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(z-1)^{2k}}{(2k)!}\,,\qquad \frac{1}{1-(z-1)}=\sum_{k=0}^{\infty}(z-1)^k\,,$$

le prime due serie hanno raggio di convergenza infinito, mentre l'ultima, la serie geometrica, converge per $|z-1|<1$, quindi nella corona circolare C_1 sono tutte e tre convergenti. Componendo questi risultati si ha la serie cercata

$$\begin{aligned} f(z) &= -\frac{1}{z-1}\left(\cos(2)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(z-1)^{2k+1}}{(2k+1)!}+\operatorname{sen}(2)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(z-1)^{2k}}{(2k)!}\right)\sum_{m=0}^{\infty}(z-1)^m \\ &= \sum_{k,m=0}^{\infty}(-1)^k\left(-\cos(2)\frac{(z-1)^{2k+m}}{(2k+1)!}-\operatorname{sen}(2)\frac{(z-1)^{2k+m-1}}{(2k)!}\right). \end{aligned} \tag{2}$$

Poiché la funzione ha in $z=1$ un polo semplice la serie di Laurent ha una parte principale con un solo termine, il primo, ovvero

$$\sum_{n=-1}^{\infty}C_n(z-1)^n\,.$$

Il primo coefficiente, C_{-1}, si ottiene dal secondo termine della serie di Eq. (2), con $k=m=0$, quindi

$$C_{-1}=-\operatorname{sen}(2)\,.$$

Il secondo coefficiente è C_0, ad esso contribuiscono sia il primo termine, con $k=m=0$, che il secondo, con $k=0$ e $m=1$, si ha

$$C_0=-\cos(2)-\operatorname{sen}(2)\,.$$

Il terzo coefficiente, C_1, ha un contributo dal primo termine, con $k=0$ e $m=1$, mentre dal secondo, ne ha due, quelli con $(k,m)=(0,2)$ e $(k,m)=(1,0)$

$$C_1=-\cos(2)-\operatorname{sen}(2)\left(1-\frac{1}{2}\right)=-\cos(2)-\frac{\operatorname{sen}(2)}{2}\,.$$

Infine, il quarto coefficiente, C_2, ha due contributi dal primo termine, con $(k,m)=(0,2)$ e $(k,m)=(1,0)$, e due anche dal secondo, con $(k,m)=(0,3)$ e $(k,m)=(1,1)$

$$C_2=-\cos(2)\left(1-\frac{1}{3!}\right)-\operatorname{sen}(2)\left(1-\frac{1}{2}\right)=-\frac{5\cos(2)}{6}-\frac{\operatorname{sen}(2)}{2}\,.$$

Terzo problema (punteggio 6/30)

Si dimostri che lo sviluppo di Mittag-Leffler della funzione

$$h(z)=\frac{1}{\cos(z)+2\operatorname{sen}(z)+3}$$

ha la forma

$$h(z)=\frac{1}{4}+\ln\left(\sqrt{5}\right)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{(z-2k\pi-\alpha)^2+\ln^2\left(\sqrt{5}\right)}-\frac{1}{(2k\pi+\alpha)^2+\ln^2\left(\sqrt{5}\right)}\right),$$

con $\alpha=\arctan(2)$.

Soluzione del terzo problema

La funzione $h(z)$ è meromorfa in quanto rapporto di funzioni intere ed ha poli in corrispondenza degli zeri della funzione trigonometrica a denominatore che saranno, quindi, un'infinità numerabile. Otteniamo le espressioni dei poli risolvendo l'equazione

$$\cos(z)+2\operatorname{sen}(z)+3=0\,,$$

che, scrivendo le funzioni seno e coseno in termini degli esponenziali e moltiplicando ambo i membri per $2ie^{iz}$, diventa

$$(2+i)e^{2iz} + 6i\,e^{iz} - 2 + i = 0\,.$$

È un'equazione di secondo grado per e^{iz}, le soluzioni sono

$$e^{iz_{1,2}} = -\frac{3 \pm 2}{1-2i}\,, \qquad \begin{cases} e^{iz_1} = -\dfrac{5}{1-2i} = -1-2i \\[2ex] e^{iz_2} = -\dfrac{1}{1-2i} = \dfrac{1}{-1+2i} \end{cases},$$

quindi

$$z_{1,k} = 2k\pi - i\ln(-1-2i)\,, \qquad z_{2,k} = 2k\pi + i\ln(-1+2i)\,, \qquad k \in \mathbb{Z}\,.$$

I logaritmi possono essere scritti in forma cartesiana, si hanno

$$\begin{aligned} \ln(-1-2i) &= \ln|-1-2i| + i\arg(-1-2i) = \ln\left(\sqrt{5}\right) + i\alpha\,, \\ \ln(-1+2i) &= \ln|-1+2i| + i\arg(-1+2i) = \ln\left(\sqrt{5}\right) - i\alpha\,, \end{aligned}$$

dove è stata scelta la determinazione principale $\alpha \in (-\pi, \pi)$ e posto $\alpha = \arg(-1-2i) = \arctan(2) \in (-\pi, -\pi/2)$, infatti il numero $-1-2i$ si trova nel terzo quadrante del piano complesso. Grazie al termine generico $2k\pi$, presente nelle definizioni di $z_{1,k}$ e $z_{2,k}$, il risultato è indipendente dalla scelta delle determinazione. Riscriviamo i poli nella forma

$$z_{1,k} = 2k\pi + \alpha - i\ln\left(\sqrt{5}\right)\,, \qquad z_{2,k} = 2k\pi + \alpha + i\ln\left(\sqrt{5}\right) = z_{1,k}^*\,, \qquad k \in \mathbb{Z}\,,$$

in modo che sia evidente come l'uno rappresenti il complesso coniugato dell'altro. È banale provare che i poli sono semplici, dimostrando che tali sono gli zeri del denominatore. A tal fine è sufficiente verificare che la derivata prima della funzione trigonometrica a denominatore non si annulla nei punti $z_{1,k}$ e $z_{2,k}$. Useremo questo argomento per calcolare i residui, infatti

$$\begin{aligned} R_{1(2),k} \equiv \text{Res}\left[h(z), z_{1(2),k}\right] &= \lim_{z \to z_{1(2),k}} \frac{z - z_{1(2),k}}{\cos(z) + 2\,\text{sen}(z) + 3} \\ &= \frac{-1}{\text{sen}(z_{1(2),k}) - 2\cos(z_{1(2),k})} \\ &= \left(\frac{-1}{\text{sen}(z_{1,k}) - 2\cos(z_{1,k})}\right)^{(*)}\,, \end{aligned}$$

l'ultima identità vale grazie al principio di riflessione di Schwarz, che implica: $\text{sen}(z^*) = \text{sen}^*(z)$ e $\cos(z^*) = \cos^*(z)$, $\forall\, z \in \mathbb{C}$. Ovviamente, per la periodicità delle funzioni seno e coseno, i residui non dipendono da $k \in \mathbb{Z}$,

$$R_{1(2),k} = R_{1(2),0} = \left(\frac{1}{-\text{sen}(z_{1,0}) + 2\cos(z_{1,0})}\right)^{(*)} \equiv R_{1(2)}\,.$$

Calcoliamo il seno ed il coseno di $z_{1(2),0}$ usando le espressioni esponenziali

$$\begin{aligned} \text{sen}(z_{1,0}) &= \frac{e^{iz_{1,0}} - e^{-iz_{1,0}}}{2i} = \frac{-1-2i-1/(-1-2i)}{2i} = \frac{-6-2i}{5}\,, \\ \cos(z_{1,0}) &= \frac{e^{iz_{1,0}} + e^{-iz_{1,0}}}{2} = \frac{-1-2i+1/(-1-2i)}{2} = \frac{-3-4i}{5}\,, \end{aligned}$$

allora i residui sono

$$R_1 = \frac{5}{-(-6-2i) + 2(-3-4i)} = \frac{1}{-2i} = \frac{i}{2} \qquad R_2 = R_1^* = -\frac{i}{2}\,.$$

Lo sviluppo di Mittag-Leffler è

$$\begin{aligned}
h(z) &= \phi(z) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{R_1}{z - z_{1,k}} + \frac{R_2}{z - z_{2,k}} \right) \\
&= \phi(z) + \frac{i}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{z - 2k\pi - \alpha + i\ln\left(\sqrt{5}\right)} - \frac{1}{z - 2k\pi - \alpha - i\ln\left(\sqrt{5}\right)} \right) \\
&= \phi(z) + \ln\left(\sqrt{5}\right) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z - 2k\pi - \alpha)^2 + \ln^2\left(\sqrt{5}\right)} \,,
\end{aligned}$$

dove la funzione $\phi(z)$ rappresenta la parte intera di $h(z)$. Il comportamento asintotico della funzione $h(z)$ è regolare. Consideriamo, ad esempio, la successione assolutamente divergente $\left\{a_j = 2j\pi e^{i\theta}\right\}_{j=1}^{\infty}$, dove la fase $\theta \in [0, 2\pi]$ definisce la direzione di divergenza, si hanno i seguenti casi

$$\lim_{j\to\infty} \left|h(a_j)\right| = \begin{cases} \sim \dfrac{2e^{-2j\pi \mathrm{sen}(\theta)}}{\sqrt{5}} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0 & \theta \in (0, \pi)\,, \mathrm{sen}(\theta) > 0 \\ 1/4 & \theta = 0, \pi, 2\pi\,, \mathrm{sen}(\theta) = 0 \\ \sim \dfrac{2e^{2j\pi \mathrm{sen}(\theta)}}{\sqrt{5}} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0 & \theta \in (\pi, 2\pi)\,, \mathrm{sen}(\theta) < 0 \end{cases} \,,$$

ne consegue che la parte intera $\phi(z)$ è costante. Possiamo ottenerne il valore, che chiamiamo ϕ_0, valutando la funzione $h(z)$ nell'origine, infatti

$$\phi_0 = h(0) - \ln\left(\sqrt{5}\right) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2k\pi + \alpha)^2 + \ln^2\left(\sqrt{5}\right)} = \frac{1}{4} - \ln\left(\sqrt{5}\right) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2k\pi + \alpha)^2 + \ln^2\left(\sqrt{5}\right)} \,.$$

L'espressine completa che si ottiene è quella cercata, ovvero

$$h(z) = \frac{1}{4} + \ln\left(\sqrt{5}\right) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{(z - 2k\pi - \alpha)^2 + \ln^2\left(\sqrt{5}\right)} - \frac{1}{(2k\pi + \alpha)^2 + \ln^2\left(\sqrt{5}\right)} \right) \,.$$

Quarto problema (punteggio 6/30)

Si determinino autovalori e autovettori dell'operatore $\hat{A}$, definito in uno spazio di Hilbert a 4 dimensioni, E_4, dall'azione sui vettori di una base ortonormale $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^4 \subset E_4$,

$$\begin{aligned}
\hat{A}|e_k\rangle &= |e_k\rangle - |e_{k+1}\rangle \,, \qquad k = 1, 2, 3 \,, \\
\hat{A}|e_4\rangle &= |e_4\rangle - |e_1\rangle \,.
\end{aligned}$$

Si verifichi, inoltre, che l'operatore è normale.

Soluzione del quarto problema

La matrice A, che rappresenta l'operatore rispetto a $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^4$, essendo la base ortonormale, ha elementi

$$A^j_k = \langle e_j|\hat{A}|e_k\rangle \,, \qquad j, k = 1, 2, 3, 4 \,,$$

per le prime tre colonne si ha

$$A^j_k = \langle e_j|\hat{A}|e_k\rangle = \langle e_j|e_k\rangle - \langle e_j|e_{k+1}\rangle = \delta^j_k - \delta^j_{k+1} \,, \qquad j = 1, 2, 3, 4 \,, \qquad k = 1, 2, 3 \,,$$

mentre per la quarta colonna

$$A^j_4 = \langle e_j|\hat{A}|e_4\rangle = \langle e_j|e_4\rangle - \langle e_j|e_1\rangle = \delta^j_4 - \delta^j_1 \,, \qquad j = 1, 2, 3, 4 \,.$$

In definitiva la matrice è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Gli autovalori dell'operatore $\hat{A}$ si ottengono come soluzioni dell'equazione secolare

$$\det(A - Ix) = \det \begin{pmatrix} 1-x & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1-x & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-x & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-x \end{pmatrix} = (1-x)^4 - 1 = 0 .$$

Si hanno le quattro soluzioni

$$(1-x_k)^4 = e^{2i(k-1)\pi} \qquad \Rightarrow \qquad x_k = 1 - e^{i(k-1)\pi/2} , \qquad k = 1,2,3,4 ,$$

i cui valori numerici sono

$$x_1 = 0 , \qquad x_2 = 1 - i , \qquad x_3 = 1 + i , \qquad x_4 = 2 .$$

Gli autovettori possono essere determinati direttamente usando le azioni note dell'operatore sui vettori della base. Indichiamo con $|v_k\rangle$ l'autovettore relativo al k-esimo autovalore x_k, la sua decomposizione è

$$|v_k\rangle = v^j_{(k)} |e_j\rangle , \qquad k = 1,2,3,4 ,$$

dove j è l'indice controvariante e il pedice (k) indica invece l'autovettore considerato. L'equazione agli autovalori, sviluppata considerando le azioni note dell'operatore sui vettori della base, è

$$\begin{aligned} \hat{A}|v_k\rangle &= x_k |v_k\rangle , \\ \hat{A}\left(v^j_{(k)}|e_j\rangle\right) &= x_k \left(v^j_{(k)}|e_j\rangle\right) \\ v^1_{(k)}\left(|e_1\rangle - |e_2\rangle\right) + v^2_{(k)}\left(|e_2\rangle - |e_3\rangle\right) + v^3_{(k)}\left(|e_3\rangle - |e_4\rangle\right) + v^4_{(k)}\left(|e_4\rangle - |e_1\rangle\right) &= x_k \left(v^1_{(k)}|e_1\rangle + v^2_{(k)}|e_2\rangle + v^3_{(k)}|e_3\rangle + v^4_{(k)}|e_4\rangle\right) \\ \left(v^1_{(k)} - v^4_{(k)}\right)|e_1\rangle + \left(v^2_{(k)} - v^1_{(k)}\right)|e_2\rangle + \left(v^3_{(k)} - v^2_{(k)}\right)|e_3\rangle + \left(v^4_{(k)} - v^3_{(k)}\right)|e_4\rangle &= x_k \left(v^1_{(k)}|e_1\rangle + v^2_{(k)}|e_2\rangle + v^3_{(k)}|e_3\rangle + v^4_{(k)}|e_4\rangle\right) , \end{aligned}$$

da cui, uguagliando i coefficienti, si hanno le quattro equazioni

$$v^1_{(k)} - v^4_{(k)} = x_k v^1_{(k)} , \qquad v^2_{(k)} - v^1_{(k)} = x_k v^2_{(k)} , \qquad v^3_{(k)} - v^2_{(k)} = x_k v^3_{(k)} , \qquad v^4_{(k)} - v^3_{(k)} = x_k v^4_{(k)} .$$

Poniamo la prima componente uguale ad uno per tutti i vettori, $v^1_{(k)} = 1$, $k = 1,2,3,4$, ottenendo così le espressioni per le rimanenti tre componenti in termini degli autovalori, ovvero

$$\begin{aligned} 1 - v^4_{(k)} = x_k &\qquad \rightarrow \qquad v^4_{(k)} = 1 - x_k \\ v^2_{(k)} - 1 = x_k v^2_{(k)} &\qquad \rightarrow \qquad v^2_{(k)} = \frac{1}{1-x_k} \\ v^3_{(k)} - v^2_{(k)} = x_k v^3_{(k)} &\qquad \rightarrow \qquad v^3_{(k)} = \frac{v^2_{(k)}}{1-x_k} = \frac{1}{(1-x_k)^2} , \end{aligned}$$

le combinazioni $1 - x_k$, $k = 1,2,3,4$, da cui dipendono tutti i coefficienti sono

$$1 - x_1 = 1 , \qquad 1 - x_2 = i , \qquad 1 - x_3 = -i , \qquad 1 - x_4 = -1 .$$

In definitiva le rappresentazioni rispetto alla base $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^4$ degli autovettori normalizzati sono

$$v_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} , \qquad v_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \\ i \end{pmatrix} , \qquad v_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \\ -i \end{pmatrix} , \qquad v_4 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} . \tag{3}$$

Per verificare che l'operatore $\hat{A}$ è normale, possiamo: o calcolare direttamente il commutatore in forma matriciale $[A, A^\dagger]$, dove la matrice $A^\dagger$ rappresenta l'operatore aggiunto $\hat{A}^\dagger$ rispetto alla base ortonormale $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^4$ ed è

$$A^\dagger = \left(A^T\right)^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ;$$

ovvero, possiamo usare la rappresentazione diagonale di $\hat{A}$ rispetto alla base di autovettori $\{|v_k\rangle\}_{k=1}^4$, dove abbiamo indicato con $|v_k\rangle \in E_4$, $k = 1, 2, 3, 4$, i vettori che hanno, rispetto alla base ortonormale $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^4$, le rappresentazioni matriciali riportare in Eq. (3). I vettori dell'insieme $\{|v_k\rangle\}_{k=1}^4$ costituiscono una base ortonormale di E_4 poiché sono 4, ortogonali e quindi linearmente indipendenti e normalizzati all'unità, ovvero

$$\langle v_k | v_j \rangle = \left(v_k^T\right)^* v_j = \delta_j^k , \qquad k, j = 1, 2, 3, 4 .$$

La matrice A_d, che rappresenta l'operatore $\hat{A}$ rispetto alla base $\{|v_k\rangle\}_{k=1}^4$, è ovviamente diagonale, infatti ha elementi

$$\left(A_d\right)_j^k = \langle v_k | \hat{A} | v_j \rangle = x_j \langle v_k | v_j \rangle = x_j \delta_j^k , \qquad k, j = 1, 2, 3, 4 ,$$

nella seconda identità abbiamo usato l'equazione agli autovalori: $\hat{A}|v_j\rangle = x_j |v_j\rangle$. La matrice $A_d^\dagger$, che rappresenta l'operatore aggiunto $\hat{A}^\dagger$ rispetto alla stessa base $\{|v_k\rangle\}_{k=1}^4$, si ottiene partendo dall'equazione agli autovalori di $\hat{A}$, facendone il duale e moltiplicando a destra per un autovalore "ket" generico,

$$\hat{A}|v_k\rangle = x_k |v_k\rangle \xrightarrow{\text{duale}} \langle v_k | \hat{A}^\dagger = x_k^* \langle v_k | \xrightarrow{\text{per } |v_j\rangle} \langle v_k | \hat{A}^\dagger | v_j \rangle = x_k^* \langle v_k | v_j \rangle = x_j^* \delta_j^k , \qquad k, j = 1, 2, 3, 4 ,$$

l'ultima equazione non è altro che l'espressione per gli elementi della matrice $A_d^\dagger$, che rappresenta l'operatore $\hat{A}^\dagger$ rispetto alla base $\{|v_k\rangle\}_{k=1}^4$, cioè

$$\left(A_d^\dagger\right)_j^k = x_j^* \delta_j^k ,$$

che è quindi diagonale. Il commutatore matriciale $[A_d, A_d^\dagger]$ ha tutti gli elementi nulli, infatti

$$[A_d, A_d^\dagger]_j^k = \left(A_d\right)_m^k \left(A_d^\dagger\right)_j^m - \left(A_d^\dagger\right)_n^k \left(A_d\right)_j^n = x_m x_j^* \delta_m^k \delta_j^m - x_j x_n^* \delta_n^k \delta_j^n = |x_j|^2 \delta_j^k - |x_j|^2 \delta_j^k = 0 , \qquad k, j = 1, 2, 3, 4 ,$$

da cui segue che anche il commutatore tra gli operatori è nullo, per cui $\hat{A}$ è un operatore normale.

Quinto problema (punteggio 6/30)

Le tre matrici 3×3 E_l, con $l=1,2,3$, sono definite in termini del tensore antisimmetrico di Tullio Levi-Civita

$$\epsilon_{lmn} = \begin{cases} +1 & (l,m,n)=(1,2,3),\,(2,3,1),\,(3,1,2) \\ -1 & (l,m,n)=(3,2,1),\,(1,3,2),\,(2,1,3) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases},$$

dalla relazione

$$\left(E_l\right)_{mn} = -i\epsilon_{lmn}\,, \qquad l,m,n=1,2,3\,,$$

ovvero, il numero $-i\epsilon_{lmn}$ rappresenta l'elemento dell'm-esima riga ed n-esima colonna della matrice E_l.

- Si dimostri che le matrici E_l, $l=1,2,3$, seguono l'algebra delle matrici di Pauli, ovvero

$$[E_j,E_k] = i\sum_{m=1}^{3}\epsilon_{jkm}E_m\,;$$

- si calcolino gli autovalori delle tre matrici e gli autovettori;
- si ottengano le rappresentazioni degli autovettori di E_2 e E_3 rispetto alla base formata dagli autovettori di E_1.

Suggerimento. La contrazione su un indice di due tensori di Tullio Levi-Civita è

$$\sum_{i=1}^{3}\epsilon_{ijk}\epsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn}-\delta_{jn}\delta_{km}\,.$$

Soluzione del quinto problema

Per verificare la regola di commutazione, consideriamo il prodotto tra due generiche matrici, l'elemento (l,n) è

$$\left(E_jE_k\right)_{ln} = \sum_{t=1}^{3}\left(E_j\right)_{lt}\left(E_k\right)_{tn} = -\sum_{t=1}^{3}\epsilon_{jlt}\epsilon_{ktn} = \sum_{t=1}^{3}\epsilon_{tjl}\epsilon_{tkn} = \delta_{jk}\delta_{ln}-\delta_{jn}\delta_{lk}\,,$$

il prodotto in ordine invertito si ottiene scambiando gli indici j e k, ovvero

$$\left(E_kE_j\right)_{ln} = \sum_{t=1}^{3}\left(E_k\right)_{lt}\left(E_j\right)_{tn} = \delta_{jk}\delta_{ln}-\delta_{kn}\delta_{lj}\,,$$

infine il commutatore

$$[E_j,E_k]_{ln} = \left(E_jE_k\right)_{ln}-\left(E_kE_j\right)_{ln} = -\delta_{jn}\delta_{lk}+\delta_{kn}\delta_{lj} = \underbrace{-\delta_{jn}\delta_{kl}+\delta_{jl}\delta_{kn}}_{\text{indici riordinati}}$$

$$= \underbrace{-\sum_{m=1}^{3}\epsilon_{mjk}\epsilon_{mnl}}_{\text{contrazione di due tensori}} \underbrace{= i\sum_{m=1}^{3}\epsilon_{mjk}i\epsilon_{mnl} =}_{-1=i^2} \underbrace{i\sum_{m=1}^{3}\epsilon_{jkm}\left(-i\epsilon_{mln}\right)}_{\text{scambio indici nel secondo tensore}} = i\sum_{m=1}^{3}\epsilon_{jkm}\left(E_m\right)_{ln}\,,$$

ovviamente la relazione vale per ogni $l,n=1,2,3$, abbiamo quindi dimostrato la validità della relazione di commutazione.

Gli autovalori si ottengono con la procedura standard, come soluzionei dell'equazione secolare. Le espressioni complete delle tre matrici sono

$$E_1 = \begin{pmatrix} -i\epsilon_{111} & -i\epsilon_{112} & -i\epsilon_{113} \\ -i\epsilon_{121} & -i\epsilon_{122} & -i\epsilon_{123} \\ -i\epsilon_{131} & -i\epsilon_{132} & -i\epsilon_{133} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_2 = \begin{pmatrix} -i\epsilon_{211} & -i\epsilon_{212} & -i\epsilon_{213} \\ -i\epsilon_{221} & -i\epsilon_{222} & -i\epsilon_{223} \\ -i\epsilon_{231} & -i\epsilon_{232} & -i\epsilon_{233} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_3 = \begin{pmatrix} -i\epsilon_{311} & -i\epsilon_{312} & -i\epsilon_{313} \\ -i\epsilon_{321} & -i\epsilon_{322} & -i\epsilon_{323} \\ -i\epsilon_{331} & -i\epsilon_{332} & -i\epsilon_{333} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

è immediato verificare che le tre equazioni secolari sono identiche e quindi che le matrici hanno gli stessi autovalori, infatti si ha

$$\det\left(E_k - I\lambda\right) = \lambda\left(1-\lambda^2\right) = 0\,,$$

da cui

$$\lambda_0 = 0\,, \qquad \lambda_- = -1\,, \qquad \lambda_+ = +1\,.$$

L'autovettore a_k della matrice E_1, relativo all'autovalore λ_k, con $k = 0, -, +$, si ottiene dall'equazione

$$E_1 a_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^1_{(k)} \\ a^2_{(k)} \\ a^3_{(k)} \end{pmatrix} = \lambda_k \begin{pmatrix} a^1_{(k)} \\ a^2_{(k)} \\ a^3_{(k)} \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{array}{l} \lambda_k a^1_{(k)} = 0 \\ \lambda_k a^2_{(k)} = -i a^3_{(k)} \\ \lambda_k a^3_{(k)} = i a^2_{(k)} \end{array}\,.$$

Per gli autovalori non nulli, $\lambda_\pm = \pm 1$, poniamo $a^1_{(\pm)} = 0$ e $a^2_{(\pm)} = 1$, ne consegue $a^3_{(\pm)} = i\lambda_\pm = \pm i$, mentre nel caso dell'autovalore nullo, poniamo $a^1_{(\pm)} = 1$ e $a^2_{(\pm)} = a^3_{(\pm)} = 0$, quindi, normalizzando all'unità, si ottengono gli autovettori

$$a_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad a_- = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}, \qquad a_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix}.$$

Indichiamo con b_k l'autovettore della matrice E_2, relativo all'autovalore λ_k, avremo

$$E_2 b_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b^1_{(k)} \\ b^2_{(k)} \\ b^3_{(k)} \end{pmatrix} = \lambda_k \begin{pmatrix} b^1_{(k)} \\ b^2_{(k)} \\ b^3_{(k)} \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{array}{l} \lambda_k b^1_{(k)} = i b^3_{(k)} \\ \lambda_k b^2_{(k)} = 0 \\ \lambda_k b^3_{(k)} = -i b^1_{(k)} \end{array}\,,$$

da cui, seguendo la stessa procedura, si hanno

$$b_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad b_- = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}, \qquad b_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -i \end{pmatrix}.$$

Infine gli autovettori c_k, $k = 0, -, +$, della matrice E_3 si ricavano dall'equazione

$$E_3 c_k = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c^1_{(k)} \\ c^2_{(k)} \\ c^3_{(k)} \end{pmatrix} = \lambda_k \begin{pmatrix} c^1_{(k)} \\ c^2_{(k)} \\ c^3_{(k)} \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{array}{l} \lambda_k c^1_{(k)} = -i c^2_{(k)} \\ \lambda_k c^2_{(k)} = i c^1_{(k)} \\ \lambda_k c^3_{(k)} = 0 \end{array}\,,$$

e sono

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad c_- = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad c_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Tutte le terne ottenuto sono insiemi ortonormali e quindi basi ortonormali dello spazio dei vettori colonna 3×1 a elementi complessi. La rappresentazione degli autovettori delle matrici E_2 e E_3 rispetto alla base $\{a_0, a_+, a_-\}$, degli autovettori della matrice E_1, sono

$$\begin{aligned} b_j &= \tilde{b}^k_{(j)} a_k\,, \qquad & \tilde{b}^k_{(j)} &= \langle a_k | b_j \rangle = \left(a_k^T\right)^* b_j\,, \\ c_j &= \tilde{c}^k_{(j)} a_k\,, \qquad & \tilde{c}^k_{(j)} &= \langle a_k | c_j \rangle = \left(a_k^T\right)^* c_j\,, \end{aligned}$$

dove con $|a_k\rangle$, $|b_k\rangle$, $|c_k\rangle$ abbiamo indicato i vettori di uno spazio di Hilbert di dimensione 3 che hanno, rispettivamente, le rappresentazioni canoniche a_k, b_k, c_k, con $k = 0, -, +$; mentre $\tilde{b}^k_{(j)}$ e $\tilde{c}^k_{(j)}$ sono le componenti k-esime dei j-esimi autovettori delle matrici E_2 ed E_3 rispetto alla base ortonormale $\{a_0, a_+, a_-\}$. Partiamo da b_0, le nuove componenti sono

$$\left.\begin{aligned} \tilde{b}^0_{(0)} &= \left(a_0^T\right)^* b_0 = (1\,0\,0)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \\ \tilde{b}^-_{(0)} &= \left(a_-^T\right)^* b_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0\,1\,i)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \tilde{b}^+_{(0)} &= \left(a_+^T\right)^* b_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0\,1\,-i)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}\right\} \qquad \Rightarrow \qquad \tilde{b}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

il vettore $\tilde{b}_0$ è la rappresentazione di $|b_0\rangle$ rispetto alla base $\{a_0, a_-, a_+\}$. Per i due vettori $b_\pm$ si hanno le espressioni

$$\left.\begin{aligned} \tilde{b}^0_{(\pm)} &= \left(a_0^T\right)^* b_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(1\,0\,0)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \mp i \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \tilde{b}^-_{(\pm)} &= \left(a_-^T\right)^* b_\pm = \frac{1}{2}(0\,1\,i)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \mp i \end{pmatrix} = \pm\frac{1}{2} \\ \tilde{b}^+_{(\pm)} &= \left(a_+^T\right)^* b_\pm = \frac{1}{2}(0\,1\,-i)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \mp i \end{pmatrix} = \mp\frac{1}{2} \end{aligned}\right\} \qquad \Rightarrow \qquad \tilde{b}_\pm = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \pm 1 \\ \mp 1 \end{pmatrix}.$$

Infine, le rappresentazioni $\tilde{c}_k$ degli autovettori della terza matrice E_3 sono

$$\left.\begin{aligned}
\tilde{c}^0_{(0)} &= \left(a^T_0\right)^* c_0 = (1\,0\,0)\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = 0\\
\tilde{c}^-_{(0)} &= \left(a^T_-\right)^* c_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0\,1\,i)\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \frac{i}{\sqrt{2}}\\
\tilde{c}^+_{(0)} &= \left(a^T_+\right)^* c_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0\,1\,-i)\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = -\frac{i}{\sqrt{2}}
\end{aligned}\right\} \quad\Rightarrow\quad \tilde{c}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\i\\-i\end{pmatrix},$$

$$\left.\begin{aligned}
\tilde{c}^0_{(\pm)} &= \left(a^T_0\right)^* c_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(1\,0\,0)\begin{pmatrix}1\\\pm i\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\\
\tilde{c}^-_{(\pm)} &= \left(a^T_-\right)^* c_\pm = \frac{1}{2}(0\,1\,i)\begin{pmatrix}1\\\pm i\\0\end{pmatrix} = \pm\frac{i}{2}\\
\tilde{c}^+_{(\pm)} &= \left(a^T_+\right)^* c_\pm = \frac{1}{2}(0\,1\,-i)\begin{pmatrix}1\\\pm i\\0\end{pmatrix} = \pm\frac{i}{2}
\end{aligned}\right\} \quad\Rightarrow\quad \tilde{c}_\pm = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\\pm i\\\pm i\end{pmatrix}.$$

SESTO PROBLEMA (PUNTEGGIO 6/30)

Usando il metodo delle trasformate di Fourier si ottenga la soluzione $f(x)$ dell'equazione integro-differenziale

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-y|} f(y)dy = f''(x) + f(x) + e^{-|x|}.$$

Suggerimento. L'anti-trasformata di Fourier della funzione $1/k$ è

$$\mathscr{F}_{-x}\left[\frac{1}{k}\right] = i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\text{segno}(x).$$

SOLUZIONE DEL SESTO PROBLEMA

Facciamo la trasformata di Fourier di ambo i membri, usando per l'integrale il teorema della convoluzione e ponendo $\tilde{f}(k) = \mathscr{F}_k[f]$, si ha

$$\frac{1}{2}\sqrt{2\pi}\,\mathscr{F}_k\left[e^{-|x|}\right]\tilde{f}(k) = (ik)^2\tilde{f}(k) + \tilde{f}(k) + \mathscr{F}_k\left[e^{-|x|}\right].$$

La trasformata di Fourier della funzione $e^{-|x|}$ si ottiene integrando direttamente

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}_k\left[e^{-|x|}\right] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}e^{-ikx}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\int_{-\infty}^{0} e^{-x(ik-1)}dx + \int_0^{\infty} e^{-x(ik+1)}dx\right]\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{1}{-ik+1} + \frac{1}{ik+1}\right] = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{k^2+1}.
\end{aligned}$$

Si arriva ad un'equazione algebrica per la trasformata di Fourier della soluzione

$$\left[\frac{1}{2}\sqrt{2\pi}\,\mathscr{F}_k\left[e^{-|x|}\right] - (ik)^2 - 1\right]\tilde{f}(k) = \mathscr{F}_k\left[e^{-|x|}\right]$$

$$\left[\frac{1}{k^2+1} + k^2 - 1\right]\tilde{f}(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{k^2+1},$$

da cui

$$\tilde{f}(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{k^4}\,.$$

La soluzione in x si ottiene facendo l'anti-trasformata di Fourier della funzione $\tilde{f}(k)$

$$f(x) = \mathscr{F}_{-x}\left[\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{k^4}\right] = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\mathscr{F}_{-x}\left[\frac{1}{k^4}\right]\,.$$

L'anti-trasformata di Fourier della funzione $1/k^4$ si può ottenere a partire da quella di $1/k$, data nel "suggerimento", scrivendo $1/k^4$ in termini della derivata terza di $1/k$, ovvero

$$\frac{1}{k^4} = -\frac{1}{3!}\frac{d^3}{dk^3}\frac{1}{k}\,.$$

Otteniamo qui la soluzione cercata come

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\mathscr{F}_{-x}\left[\frac{1}{k^4}\right] = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\mathscr{F}_{-x}\left[-\frac{1}{3!}\frac{d^3}{dk^3}\frac{1}{k}\right] = -\frac{1}{6}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\mathscr{F}_{-x}\left[\frac{d^3}{dk^3}\frac{1}{k}\right] = -\frac{1}{6}\sqrt{\frac{2}{\pi}}(-ix)^3\mathscr{F}_{-x}\left[\frac{1}{k}\right]$$
$$f(x) = \frac{x^3\,\text{segno}(x)}{6}\,,$$

dove il fattore $(-ix)$ compare con il segno meno in quanto si sta considerando un'anti-trasformata.