Metodi Matematici per la Fisica

Prova scritta - 25 luglio 2012

Si svolgano cortesemente i seguenti esercizi.

Esercizio 1 (6 punti)
Calcolare l'integrale

$$D = \int_0^1 d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, \frac{x+2\alpha}{x^4+2\alpha} \delta\left[\cos(\alpha\pi)\right] .$$

. . . .

Soluzione
Si integra in $d\alpha$ sfruttando la proprietà delle delta di Dirac per cui

$$\int_{\mathcal{I}} \delta[f(x)]dx = \left|\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0}^{-1} , \qquad \text{con: } f(x_0) = 0 \, , \quad \text{e } x_0 \in \mathcal{I} \, .$$

In questo caso l'argomento della delta si annulla nell'intervallo d'integrazione, infatti $\cos(\alpha\pi) = 0$ quando $\alpha = 1/2 \in (0,1)$, per cui dall'integrazione in $d\alpha$ si ottiene

$$\begin{aligned} D &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[\frac{x+2\alpha}{x^4+2\alpha} \frac{1}{|\pi \sin(\alpha\pi)|}\right]_{\alpha=1/2} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x+1}{x^4+1} \, dx \, . \end{aligned}$$

Procediamo usando il lemma di Jordan con "$k=0$", consideriamo il cammino $\Gamma_R = \{z : z = Re^{i\theta}, \, \theta \in [0,\pi]\} \cup [-R,R]$ con R reale positivo. Si ha

$$2\,i\pi \left\{ \sum_k \text{Res}\left[\frac{1}{\pi}\frac{z+1}{z^4+1}, z_k\right] + \text{Res}\left[\frac{1}{\pi}\frac{z+1}{z^4+1}, \infty\right] \right\} = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma_R} \frac{z+1}{z^4+1} \, dz = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x+1}{x^4+1} \, dx \, .$$

I quattro poli semplici dell'integranda sono le quattro radici quarte di -1, ovvero:

$$z_k = e^{i\pi(1+2k)/4} , \qquad k = 0,1,2,3 \, .$$

Nel semipiano superiore ci sono z_0 e z_1 e si hanno:

$$\begin{aligned} \text{Res}\left[\frac{1}{\pi}\frac{z+1}{z^4+1}, z_0\right] &= \frac{1}{\pi} \lim_{z\to z_0} \frac{z+1}{z^4+1}(z-z_0) = \frac{1}{\pi}\frac{z_0+1}{4z_0^3} = \frac{1}{\pi}\frac{e^{i\pi/4}+1}{4e^{3i\pi/4}} \, , \\ \text{Res}\left[\frac{1}{\pi}\frac{z+1}{z^4+1}, z_1\right] &= \frac{1}{\pi} \lim_{z\to z_1} \frac{z+1}{z^4+1}(z-z_1) = \frac{1}{\pi}\frac{z_1+1}{4z_0^3} = \frac{1}{\pi}\frac{e^{3i\pi/4}+1}{4e^{i\pi/4}} \, , \\ -\text{Res}\left[\frac{1}{\pi}\frac{z+1}{z^4+1}, \infty\right] &= -\text{Res}\left[\frac{1}{\pi}\frac{t(t+1)}{t^4+1}, 0\right] = 0 \, . \end{aligned}$$

Infine

$$
\begin{aligned}
D &= 2i\left[\frac{e^{i\pi/4}+1}{4e^{3i\pi/4}}+\frac{e^{3i\pi/4}+1}{4e^{i\pi/4}}\right] \\
&= 2i\left[\frac{e^{i\pi/4}+1}{4e^{3i\pi/4}}+\frac{e^{3i\pi/4}+1}{4e^{i\pi/4}}\right] \\
&= \frac{i}{2}\left[e^{-i\pi/2}+e^{-3i\pi/4}+e^{i\pi/2}+e^{-i\pi/4}\right] \\
&= \frac{i}{2\sqrt{2}}\left[-1-i+1-i\right]=\frac{1}{\sqrt{2}}\,.
\end{aligned}
$$

Esercizio 2 (6 punti)
Determinare l'integrale in valore principale

$$
P=\mathrm{Pr}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2\cos(x)}{x^3+a^3}dx\,,
$$

dove il parametro a è reale e positivo.

. . . .

Soluzione
Innanzitutto scriviamo il coseno in forma di somma di esponenziali e il polinomio a denominatore scomposto nel prodotto di monomi

$$
P=\frac{1}{2}\,\mathrm{Pr}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)}{(x+a)(x-ae^{i\pi/3})(x-ae^{5i\pi/3})}dx\,,
$$

l'unico polo semplice che appartiene al cammino d;integrazione è $x=-a$. Consideriamo il cammino $\Gamma_{\epsilon,R}=\{z:z=-a+\epsilon e^{i\theta},\theta\in(\pi,2\pi)\}\cup[-R,-a-\epsilon]\cup[-a+\epsilon,+R]$, per cui si ha

$$
\lim_{\epsilon\to0,R\to\infty}\Gamma_{\epsilon,R}=(-\infty,+\infty)\,.
$$

Inoltre, posto $\gamma_\epsilon=\{z:z=-a+\epsilon e^{i\theta},\theta\in(\pi,2\pi)\}$

$$
\lim_{\epsilon\to0,R\to\infty}\int_{\Gamma_{\epsilon,R}}=\mathrm{Pr}\int_{-\infty}^{+\infty}+\lim_{\epsilon\to0}\int_{\gamma_\epsilon}\,.
$$

Consideriamo prima l'integrale sull'arco infinitesimo γ_ϵ,

$$
\begin{aligned}
I_0=\lim_{\epsilon\to0}\frac{1}{2}\int_{\gamma_\epsilon}\frac{z^2\left(e^{iz}+e^{-iz}\right)}{(z+a)(z-ae^{i\pi/3})(z-ae^{5i\pi/3})}dz &= \lim_{\epsilon\to0}\int_{\gamma_\epsilon}f(z)dz \\
&= i\,\pi\lim_{z\to-a}f(z)(z+a) \\
&= i\,\pi\frac{\cos(a)}{(1+e^{i\pi/3})(1+e^{5i\pi/3})} \\
&= i\,\pi\frac{\cos(a)}{(1+e^{i\pi/3})(1+e^{-i\pi/3})} \\
&= i\,\pi\frac{\cos(a)}{3}\,.
\end{aligned}
$$

L'integrale su $\Gamma_{\epsilon,R}$ si calcola con il teorema dei residui. Si hanno

$$\begin{aligned}
I_1 \equiv \frac{1}{2}\int_{\Gamma_{\epsilon,R}} \frac{z^2\, e^{iz}}{(z+a)(z-ae^{i\pi/3})(z-ae^{5i\pi/3})}dz &= 2\,i\pi\left\{\mathrm{Res}[ae^{i\pi/3}] + \mathrm{Res}[-a]\right\} \\
&= i\pi\left\{\frac{e^{2i\pi/3}\, e^{iae^{i\pi/3}}}{(e^{i\pi/3}+1)(e^{i\pi/3}-e^{-i\pi/3})} + \right. \\
&\qquad \left. \frac{e^{-ia}}{(1+e^{i\pi/3})(1+e^{-i\pi/3})}\right\} \\
&= \pi\left[\frac{e^{2i\pi/3}\, e^{iae^{i\pi/3}}}{(e^{i\pi/3}+1)\sqrt{3}} + \frac{i\, e^{-ia}}{3}\right], \\
I_2 \equiv \frac{1}{2}\int_{\Gamma_{\epsilon,R}} \frac{z^2\, e^{-iz}}{(z+a)(z-ae^{i\pi/3})(z-ae^{5i\pi/3})}dz &= -2\,i\pi\,\mathrm{Res}[ae^{-i\pi/3}] \\
&= -i\pi\,\frac{e^{-2i\pi/3}\, e^{-iae^{-i\pi/3}}}{(e^{-i\pi/3}+1)(e^{-i\pi/3}-e^{i\pi/3})} \\
&= \pi\,\frac{e^{-i\pi/3}\, e^{-iae^{-i\pi/3}}}{(e^{i\pi/3}+1)\sqrt{3}}\,.
\end{aligned}$$

Consideriamo il primo termine di I_1

$$\begin{aligned}
\pi\frac{e^{2i\pi/3}\, e^{iae^{i\pi/3}}}{(e^{i\pi/3}+1)\sqrt{3}} &= \frac{e^{2i\pi/3}\, e^{iae^{i\pi/3}}}{e^{i\pi/6}(e^{i\pi/6}+e^{-i\pi/6})\sqrt{3}} \\
&= \pi\frac{e^{2i\pi/3}\, e^{iae^{i\pi/3}}}{e^{i\pi/6}2\cos(\pi/6)\sqrt{3}} \\
&= \pi\frac{e^{2i\pi/3}\, e^{iae^{i\pi/3}}}{3\, e^{i\pi/6}} \\
&= \pi\frac{e^{i\pi/2}\, e^{iae^{i\pi/3}}}{3} \\
&= i\pi\frac{e^{iae^{i\pi/3}}}{3} \\
&= i\pi\frac{e^{ia/2-a\sqrt{3}/2}}{3}\,,
\end{aligned}$$

mentre I_2

$$\begin{aligned}
I_2 = \pi\frac{e^{-i\pi/3}\, e^{-iae^{-i\pi/3}}}{(e^{i\pi/3}+1)\sqrt{3}} &= \pi\frac{e^{-i\pi/3}\, e^{-iae^{-i\pi/3}}}{e^{i\pi/6}2\cos(\pi/6)\sqrt{3}} \\
&= \pi\frac{e^{-i\pi/2}\, e^{-iae^{-i\pi/3}}}{3} \\
&= -i\pi\frac{e^{-ia/2-a\sqrt{3}/2}}{3}\,.
\end{aligned}$$

L''integrale in valore principale può essere quindi ottenuto come

$$
\begin{aligned}
P &= I_1 + I_2 - I_0 \\
&= i\pi \left(\frac{e^{ia/2 - a\sqrt{3}/2}}{3} + \frac{e^{-ia}}{3} - \frac{e^{-ia/2 - a\sqrt{3}/2}}{3} - \frac{e^{ia} + e^{-ia}}{6} \right) \\
&= \frac{i\pi}{3} \left(e^{ia/2 - a\sqrt{3}/2} - e^{-ia/2 - a\sqrt{3}/2} - \frac{e^{ia} - e^{-ia}}{2} \right) \\
&= \frac{i\pi}{3} \left[2ie^{-a\sqrt{3}/2} \sin(a/2) - i\sin(a) \right] \\
&= \frac{\pi}{3} \left[-2e^{-a\sqrt{3}/2} \sin(a/2) + 2\sin(a/2)\cos(a/2) \right] \\
&= \frac{2\pi}{3} \sin\left(\frac{a}{2}\right) \left[\cos\left(\frac{a}{2}\right) - e^{-a\sqrt{3}/2} \right] .
\end{aligned}
$$

Esercizio 3 (6 punti)
Si ottenga la serie di Laurent della funzione

$$
f(z) = \frac{1}{z^2 - z + 1} ,
$$

in $|z| > 2$.

. . . .

Soluzione
La funzione è meromorfa ed ha due poli semplici

$$
z_{1,2} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2} = e^{\pm i\pi/3} ,
$$

entrambi di modulo unitario. Fattorizzando il denominatore, possiamo riscrivere come

$$
\begin{aligned}
f(z) = \frac{1}{z^2 - z + 1} &= \frac{1}{z_1 - z_2} \left(\frac{1}{z - z_1} - \frac{1}{z - z_2} \right) \\
&= \frac{1}{i\sqrt{3}} \left(\frac{1}{z - z_1} - \frac{1}{z - z_2} \right)
\end{aligned}
$$

La condizione richiesta è $|z| > 2$, ma, come detto, $|z_{1,2}| = 1$, quindi

$$
|z| > 2 \quad \Rightarrow \quad |z| > 2|z_{1,2}| \quad \Rightarrow \quad \frac{|z_{1,2}|}{|z|} < \frac{1}{2} .
$$

Vale lo sviluppo

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{i\,z\sqrt{3}}\left(\frac{1}{1-z_1/z}-\frac{1}{1-z_2/z}\right)\\
&= \frac{1}{i\,z\sqrt{3}}\sum_{k=0}^{\infty}\left[(z_1)^k-(z_2)^k\right]z^{-k}\\
&= \frac{1}{i\,z\sqrt{3}}\sum_{k=0}^{\infty}\left[e^{i\pi k/3}-e^{-i\pi k/3}\right]z^{-k}\\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}\sum_{k=0}^{\infty}\sin(\pi k/3)z^{-k-1} = \frac{2}{\sqrt{3}}\sum_{k=1}^{\infty}\sin(\pi k/3)z^{-k-1}\\
&= -\frac{2}{\sqrt{3}}\sum_{n=-\infty}^{-2}\sin[\pi(n+1)/3]z^n\,.
\end{aligned}
$$

Esercizio 4 (5 punti)
Indicando con $\hat{\mathcal{F}}_k$ l'operatore trasformata di Fourier in $L^2(-\infty,\infty)$, ovvero: $\forall f(x)\in L^2(-\infty,\infty)$

$$
\left(\hat{\mathcal{F}}_k\, f\right)(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}dx\,,
$$

si dimostri l'identità operatoriale

$$
\hat{\mathcal{F}}_x^\dagger\, k\, \hat{\mathcal{F}}_k = -i\frac{d}{dx}\,.
$$

Si calcoli, infine, la derivata, anche nei punti di dicontinuità, della funzione

$$
g(x) = \begin{cases} 1 & |x|\le 1 \\ \\ 0 & |x|>1 \end{cases}\,.
$$

. . . .

Soluzione
La dimostrazione si ottiene direttamente calcolando

$$
\begin{aligned}
\left(\hat{\mathcal{F}}_x^\dagger\, k\, \hat{\mathcal{F}}_k\, f\right)(x) &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk}{\sqrt{2\pi}}\,ke^{ikx}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx'}{\sqrt{2\pi}}e^{-ikx'}f(x')\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}k\,dk\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ik(x'-x)}f(x')\,dx'\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dk\left[\left.\frac{e^{-ik(x'-x)}f(x')}{-i}\right|_{-\infty}^{\infty}-i\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ik(x'-x)}f'(x')\,dx'\right]\\
&= -\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dk\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ik(x'-x)}f'(x')\,dx'\\
&= -i\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x'-x)f'(x')\,dx'\\
&= -i\,f'(x) = -i\frac{df}{dx}(x)\,.
\end{aligned}
$$

Per calcolare la derivata della $g(x)$ si applica direttamente l'operatore composto

$$\begin{aligned}
\frac{dg}{dx}(x) &= i\left(\hat{\mathcal{F}}_x^\dagger\, k\, \hat{\mathcal{F}}_k\, g\right)(x) \\
&= \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} k\, dk \int_{-1}^{1} e^{-ik(x'-x)}\, dx' \\
&= \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} k\, dk \left[\left.\frac{e^{-ik(x'-x)}}{-ik}\right|_{-1}^{1}\right] \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk \left[e^{-ik(1-x)} - e^{ik(1+x)}\right] \\
&= \delta(x+1) - \delta(x-1)\,.
\end{aligned}$$

Esercizio 5 (6 punti)
Si risolva l'equazione integrale

$$f(x) = x + \lambda\int_0^1 \left(e^{x+y} - e^{x-y}\right) f(y)\, dy\,.$$

. . . .

Soluzione
Con il metodo della serie di Neumann su ha

$$f(x) = x + \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\,,$$

dove le funzioni $f_k(x)$ si ottengono applicando k l'operatore integrale $\hat{O}$ sulla funzione termine noto x. Si ha quindi

$$\begin{aligned}
f_1(x) = \lambda\hat{O}x &= \lambda\int_0^1 \left(e^{x+y} - e^{x-y}\right) y\, dy \\
&= \lambda e^x \left(\int_0^1 e^y y\, dy - \int_0^1 e^{-y} y\, dy\right) \\
&= \lambda e^x \left(\left. e^y y\right|_0^1 - \int_0^1 e^y\, dy + \left. e^{-y} y\right|_0^1 - \int_0^1 e^{-y}\, dy\right) \\
&= 2\lambda e^{x-1} = \frac{2\lambda}{e} e^x\,,
\end{aligned}$$

proseguendo

$$\begin{aligned}
f_2(x) = \left(\lambda\hat{O}\right)^2 x = \lambda\hat{O} f_1(x) &= \frac{2\lambda^2}{e}\int_0^1 \left(e^{x+y} - e^{x-y}\right) e^y\, dy \\
&= 2\lambda^2 e^{x-1}\left(\int_0^1 e^{2y}\, dy - \int_0^1 dy\right) \\
&= 2\lambda^2 e^{x-1}\left[\frac{1}{2}\left(e^2 - 1\right) - 1\right] \\
&= \lambda^2 e^{x-1}\left(e^2 - 3\right)\,,
\end{aligned}$$

per f_3 si ha

$$f_3(x) = \lambda^3 e^{x-1} \frac{1}{2} \left(e^2 - 3\right)^2 ,$$

al passo k-esimo

$$f_k(x) = \lambda^k e^{x-1} \frac{1}{2^{k-2}} \left(e^2 - 3\right)^{k-1} .$$

Quindi la soluzione è

$$f(x) = x + 2\lambda\, e^{x-1} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{e^2-3}{2} \lambda \right)^{k-1} = x + 2\lambda\, e^{x-1} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{e^2-3}{2} \lambda \right)^{k} ,$$

con la condizione $|\lambda| < 2(e^2-3)^{-1}$, si ottiene

$$f(x) = x + \frac{2\lambda\, e^{x-1}}{1 - \lambda \frac{e^2-3}{2}} .$$

Con il metodo del kernel separabile si ha

$$\begin{array}{ll} M_1(x) = e^x & N_1(y) = e^y \\ M_2(x) = e^x & N_2(y) = -e^{-y} \end{array} ,$$

il vettore B ha le componenti

$$\begin{aligned} B_1 &= \int_0^1 N_1(x) x \, dx = 1 \\ B_2 &= \int_0^1 N_2(x) x \, dx = 2e^{-1} - 1 . \end{aligned}$$

Quelle della matrice A

$$\begin{aligned} A_{11} &= \int_0^1 N_1(x) M_1(x) dx = \frac{e^2-1}{2} \\ A_{12} &= \int_0^1 N_1(x) M_2(x) dx = \frac{e^2-1}{2} \\ A_{21} &= \int_0^1 N_2(x) M_1(x) dx = -1 \\ A_{22} &= \int_0^1 N_2(x) M_2(x) dx = -1 . \end{aligned}$$

Il determinante della matrice dei coefficienti è

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda \frac{e^2-1}{2} & -\lambda \frac{e^2-1}{2} \\ \lambda & 1+\lambda \end{pmatrix} &= \left(1 - \lambda \frac{e^2-1}{2}\right)(1+\lambda) + \lambda^2 \frac{e^2-1}{2} \\ &= 1 + \lambda - \lambda \frac{e^2-1}{2} \\ &= 1 - \lambda \frac{e^2-3}{2} , \end{aligned}$$

è non nullo per
$$\lambda \neq \frac{2}{e^2-3}\,.$$
Il vettore delle soluzioni C ha le seguenti componenti

$$C_1 = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & -\lambda\frac{e^2-1}{2} \\ 2e^{-1}-1 & 1+\lambda \end{pmatrix}}{1-\lambda\frac{e^2-3}{2}} = \frac{1+\lambda+\lambda\frac{e^2-1}{2}(2e^{-1}-1)}{1-\lambda\frac{e^2-3}{2}}$$
$$C_2 = \frac{\det\begin{pmatrix} 1-\lambda\frac{e^2-1}{2} & 1 \\ \lambda & 2e^{-1}-1 \end{pmatrix}}{1-\lambda\frac{e^2-3}{2}} = \frac{\left(1-\lambda\frac{e^2-1}{2}\right)(2e^{-1}-1)-\lambda}{1-\lambda\frac{e^2-3}{2}}\,.$$

La soluzione $f(x)$ si ottiene come

$$\begin{aligned}
f(x) &= x + \lambda\sum_{k=1}^{2} C_k M_k(x) \\
&= x + \lambda e^x \frac{1+\lambda+\lambda\frac{e^2-1}{2}(2e^{-1}-1)+\left(1-\lambda\frac{e^2-1}{2}\right)(2e^{-1}-1)-\lambda}{1-\lambda\frac{e^2-3}{2}} \\
&= x + 2\lambda e^x \frac{e^{-1}}{1-\lambda\frac{e^2-3}{2}} \\
&= x + \frac{2\lambda e^{x-1}}{1-\lambda\frac{e^2-3}{2}}\,.
\end{aligned}$$

Esercizio 6 (6 punti)
Si calcoli il logaritmo della matrice

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & i\sin\alpha \\ i\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\,,$$

con α reale non nullo.

. . . .

Soluzione
Si trovano gli autovalori risolvendo l'equazione secolare

$$\begin{aligned}
\det[A - I\lambda] &= 0 \\
\det\begin{pmatrix} \cos\alpha-\lambda & i\sin\alpha \\ i\sin\alpha & \cos\alpha-\lambda \end{pmatrix} &= 0 \\
(\cos\alpha-\lambda)^2+\sin^2\alpha &= 0 \\
\lambda^2 - 2\lambda\cos\alpha + 1 &= 0 \\
\lambda_{1,2} &= \cos\alpha \pm \sqrt{\cos^2\alpha - 1} \\
\lambda_{1,2} &= \cos\alpha \pm i\sin\alpha = e^{\pm i\alpha}\,.
\end{aligned}$$

Gli autovettori $u^{1,2}$ si ottengono come:

$$
\begin{aligned}
Au^{1,2} &= \lambda_{1,2} u^{1,2} \\
\begin{pmatrix} \cos\alpha & i\sin\alpha \\ i\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^{1,2} \\ u_2^{1,2} \end{pmatrix} &= \lambda_{1,2} \begin{pmatrix} u_1^{1,2} \\ u_2^{1,2} \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} \cos\alpha & i\sin\alpha \\ i\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ \pm 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} &= \lambda_{1,2} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ \pm 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} .
\end{aligned}
$$

La matrice unitaria U che diagonalizza A è:

$$
U = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} ,
$$

ovvero si ha

$$
U^\dagger A U = A' = \begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha} \end{pmatrix} .
$$

In questa rappresentazione anche la matrice $\ln(A)$ è diagonale

$$
[\ln(A)]' = \begin{pmatrix} i\alpha & 0 \\ 0 & -i\alpha \end{pmatrix}
$$

ed ha gli stessi autovettori di A, quindi

$$
\begin{aligned}
\ln(A) &= U[\ln(A)]' U^\dagger] \\
&= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i\alpha & 0 \\ 0 & -i\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & i\alpha \\ i\alpha & 0 \end{pmatrix} .
\end{aligned}
$$