Metodi Matematici per la Fisica

Primo esonero - 25 febbraio 2015

Si svolgano cortesemente i seguenti esercizi.

Esercizio 1 (punteggio: 2,5/30)

Usando il teorema di Rouché si dimostri che gli zeri del polinomio

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a^k z^k \,, \qquad a > 0$$

sono contenuti nel cerchio $C_R = \{z : |z| < R = 2/a\}$.

Soluzione 1

Il teorema di Rouché afferma che, se $f(z)$ e $g(z)$ sono funzioni analitiche, definite nello stesso dominio semplicemente connesso $\overline{D}$, tali da verificare:

$$|f(z)| > |g(z)| \,, \qquad \forall z \in \partial D \,,$$

allora le funzioni $f(z)$ e $f(z) + g(z)$ hanno in D lo stesso numero di zeri.
Siano

$$f(z) = a^n z^n \,, \qquad g(z) = \sum_{k=0}^{n-1} a^k z^k \,.$$

Verifichiamo che $|f(z)|$ è maggiore di $|g(z)|$ sulla frontiera di C_R, in cui $|z| = R = 2/a$. Si hanno, $\forall z \in \partial D$,

$$|g(z)| \le \sum_{k=0}^{n-1} a^k \left(\frac{2}{a}\right)^k = 2^n - 1 \,, \qquad |f(z)| = a^n \left(\frac{2}{a}\right)^n = 2^n \,,$$

da cui

$$|f(z)| > |g(z)| \,, \qquad \forall z \in \partial C_R \,.$$

Ne consegue che la funzione somma, cioè il polinomio, $f(z) + g(z) = P_n(z)$, ha in C_R lo stesso numero di zeri di $f(z)$. Ma $f(z)$ ne ha n essendo semplicemente proporzionale alla potenza n-esima della variabile. Anche la somma è un polinomio dello stesso ordine che ha n zeri, quindi tutti gli zeri del polinomio appartengono a C_R, la dimostrazione è conclusa.

Esercizio 2 (punteggio 3/30)

Si calcoli l'integrale

$$J = \int_0^1 \frac{dx}{\left(x^3 - x^4\right)^{1/4}} \,.$$

Soluzione 2

L'integranda è una funzione polidroma con punti di diramazione in $z = 0$ e $z = 1$. Possiamo definire un taglio sul segmento di integrazione $[0, 1]$, e consideriamo il percorso chiusa Γ, mostrato in figura 1, che avvolge tale segmento. La funzione a denominatore dell'integranda può essere posta nella forma

$$\left(z^3 - z^4\right)^{1/4} = \left(f_1^3(z) f_2(z)\right)^{1/4} \,,$$

le funzioni $f_{1,2}(z)$ generano ciascuna un taglio la cui composizione dà il taglio finale $[0,1]$. Scegliendo le fasi in modo che i due tagli siano nella stessa direzione, lungo l'asse reale, si ottiene quanto desiderato, ovvero che la funzione finale abbia discontinuità nell'intervallo di integrazione. Potremmo scegliere entrambe i tagli orientati nel verso negativo dell'asse reale, ovvero

$$\begin{array}{ll} f_1(z) = z = |z| e^{i\theta_1} \,, & \theta_1 \in (-\pi, \pi) \\ f_2(z) = 1 - z = |1 - z| e^{i\theta_2} \,, & \theta_2 \in (0, 2\pi) \end{array} \,.$$

In questo caso, sopra il taglio avremo: $\theta_1 \to 0^+$, $\theta_2 \to 2\pi^-$, quindi

$$\left(z^3 - z^4\right)^{1/4} = \left(x^3 - x^4\right)^{1/4} e^{i(3\theta_1 + \theta_2)/4} = \left(x^3 - x^4\right)^{1/4} e^{i\pi/2} \,.$$

Sotto: $\theta_1 \to 0^-$, $\theta_2 \to 0^+$, allora

$$\left(z^3 - z^4\right)^{1/4} = \left(x^3 - x^4\right)^{1/4} e^{i(3\theta_1 + \theta_2)/4} = \left(x^3 - x^4\right)^{1/4} \,.$$

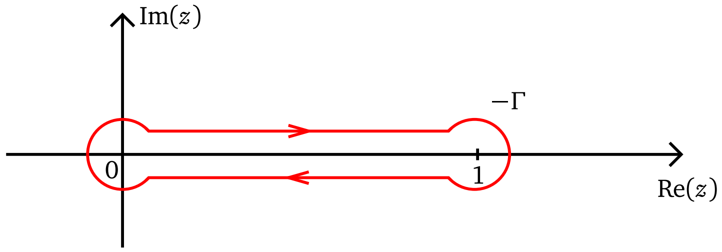


Figure 1: Percorso di integrazione del primo esercizio.

Si vede, inoltre, che per valori reali di z maggiori di 1 o minori di 0 non si ha discontinuità. Consideriamo $z = x + i\epsilon$ con $x > 1$, avremo che sui bordi superiore ed inferiore dell'asse reale, i seguenti valori delle fasi θ_1 e θ_2

$$\epsilon \to 0^\pm \qquad \Rightarrow \qquad \left\{ \begin{array}{l} \theta_1 \to \theta_1^\pm = 0^\pm \\ \theta_2 \to \theta_2^\pm = \pi^\pm \end{array} \right. \,.$$

Ne consegue che la funzione radice quarta è continua attraverso la semiretta reale $(1, \infty)$, ovvero i due limiti coincidono

$$\lim_{\epsilon \to 0^\pm} \left(z^3 - z^4\right)^{1/4} = \lim_{\epsilon \to 0^\pm} \left|z^3 - z^4\right|^{1/4} e^{i(3\theta_1 + \theta_2)/4} = \left(x^4 - x^3\right)^{1/4} e^{i\pi/4} \,.$$

Lungo il semiasse reale negativo, per $z = x + i\epsilon$ e $x < 0$, abbiamo

$$\epsilon \to 0^\pm \qquad \Rightarrow \qquad \left\{ \begin{array}{l} \theta_1 \to \theta_1^\pm = \pm\pi^\mp \\ \theta_2 \to \theta_2^+, \theta_1^- = 2\pi^-, 0^+ \end{array} \right. \,,$$

i corrsipondenti valori della funzione radice quarta sono ancora coincidenti

$$\lim_{\epsilon \to 0^\pm} \left(z^3 - z^4\right)^{1/4} = \lim_{\epsilon \to 0^\pm} \left|z^3 - z^4\right|^{1/4} e^{i(3\theta_1 + \theta_2)/4} = \left\{ \begin{array}{l} \left(x^4 - x^3\right)^{1/4} e^{i(3\pi + 2\pi)/4} = \left(x^4 - x^3\right)^{1/4} e^{5i\pi/4} \\ \\ \left(x^4 - x^3\right)^{1/4} e^{-3i\pi/4} = \left(x^4 - x^3\right)^{1/4} e^{5i\pi/4} \end{array} \right. \,,$$

Il taglio riguarda solo il segmento $[0,1]$.
L'integrale su $-\Gamma$, si usa il segno "$-$" per indicare il verso di percorrenza orario, essendo nulli quelli sugli archetti intorno ai punti di diramazione (nel limite di raggio infinitesimo), diventa

$$\oint_{-\Gamma} \frac{dz}{\left(z^3-z^4\right)^{1/4}} = e^{-i\pi/2}\int_0^1 \frac{dx}{\left(x^3-x^4\right)^{1/4}} + \int_1^0 \frac{dx}{\left(x^3-x^4\right)^{1/4}} = J\left(e^{-i\pi/2}-1\right).$$

Tale integrale può essere calcolato con il teorema dei residui, considerando tutti quelli relativi alle singolarità che giacciono all'esterno di Γ, ovvero

$$\oint_{-\Gamma} \frac{dz}{\left(z^3-z^4\right)^{1/4}} = 2i\pi \sum_{\text{esterni a }\Gamma} \operatorname{Res}\left[\frac{1}{\left(z^3-z^4\right)^{1/4}}\right].$$

L'integranda non ha poli al finito l'unico è quello all'infinito, per cui

$$\oint_{-\Gamma} \frac{dz}{\left(z^3-z^4\right)^{1/4}} = 2i\pi \operatorname{Res}\left[\frac{1}{\left(z^3-z^4\right)^{1/4}}, z=\infty\right] = -2i\pi \operatorname{Res}\left[\frac{1/w^2}{\left(w^{-3}-w^{-4}\right)^{1/4}}, w=0\right]$$

$$= -\oint_{\gamma_0} \frac{dw}{w\,(w-1)^{1/4}} = -2i\pi(-1)^{-1/4} = -2i\pi\, e^{-i\pi/4},$$

dove γ_0 è una circonferenza centrata nell'origine di raggio minore di uno.
Considerando i due risultati si ha

$$J\left(e^{-i\pi/2}-1\right) = -2i\pi\, e^{-i\pi/4} \quad\Rightarrow\quad J\left(e^{-i\pi/4}-e^{i\pi/4}\right) = -2i\pi \quad\Rightarrow\quad -J\,2i\sin(\pi/4) = -2i\pi,$$

da cui il risultato finale

$$J = \pi\sqrt{2}.$$

Esercizio 3 (punteggio 3.5/30)

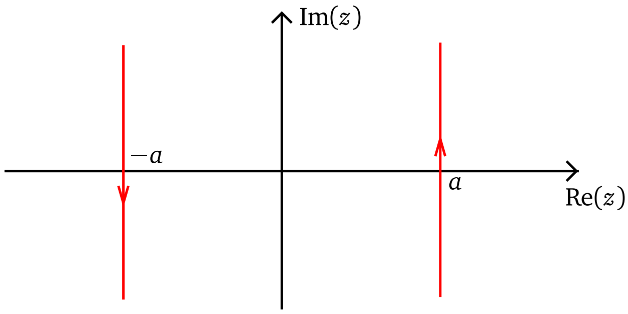
Si studi, per valori reali e positivi di a, la funzione

$$c(a) = \Pr\int_{R_a} \frac{z^2}{\operatorname{sen}(z)}dz,$$

dove l'integrale è in valore principale e il percorso di integrazione, $R_a = R_{-a}\cup R_{+a}$, è l'unione di due rette parallele all'asse immaginario e simmetriche rispetto ad esso, orientate in versi opposti, in particolare

$$R_{\pm a} = \pm\{z : \operatorname{Re}(z) = \pm a\},$$

i segni, posti prima della parentesi graffa, definiscono il verso di percorrenza, con il "+" si intende il verso concorde a quello dell'asse immaginario, con il "$-$" quello opposto.
Le due rette sono mostrate in rosso nella figura accanto.



SOLUZIONE 3

Il percorso può essere chiuso ai due estremi infiniti, per parti immaginarie divergenti a $+\infty$ e $-\infty$, con due archi. Il contributo di questi archi infiniti è nullo. Infatti, detto γ_{R+}, l'arco superiore, si ha

$$\gamma_{R+} = \left\{ z : z = Re^{i\theta}, \theta \in (\pi/2 - \epsilon, \pi/2 + \epsilon) \right\}, \qquad \epsilon = \arctan\left(\frac{a}{R}\right).$$

Dobbiamo dimostrare che

$$\lim_{R\to\infty} z f(z) = 0, \qquad f(z) = \frac{z^2}{\operatorname{sen}(z)},$$

dove il limite è uniforme. A tal fine, troviamo una funzione μ_R, reale, positiva e infinitesima al divergere di R, che limita il modulo di $zf(z)$. Studiamo, per economia di simboli, il suo modulo quadro, sull'arco γ_{R+} si ha

$$\begin{aligned}\left|\frac{z^3}{\operatorname{sen}(z)}\right|^2 &= \frac{R^6}{|\operatorname{sen}(R\cos(\theta) + iR\operatorname{sen}(\theta))|^2} = \frac{R^6}{\operatorname{senh}^2(R\sin(\theta)) + \operatorname{sen}^2(R\operatorname{sen}(\theta))} \\ &\leq \frac{R^6}{\operatorname{senh}^2(R\sin(\theta))} \leq \frac{R^6}{\min_\theta\left\{\operatorname{senh}^2(R\operatorname{sen}(\theta))\right\}} = \frac{R^6}{\operatorname{senh}^2(R\operatorname{sen}(\pi/2-\epsilon))} \\ &< \frac{R^6}{\operatorname{senh}^2(R\operatorname{sen}(\pi/4))} = \frac{4R^6}{\left(e^{R/\sqrt{2}} - e^{-R/\sqrt{2}}\right)^2} \equiv \mu_R^2 .\end{aligned}$$

È banale osservare che la funzione μ_R, così ottenuta, verifica la condizione richiesta essendo infinitesima per $R\to\infty$, cioè

$$\mu_R \underset{R\to\infty}{\sim} 2R^3 e^{-R/\sqrt{2}} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0 .$$

Nel caso dell'arco inferiore, γ_{R-} si ottiene lo stesso risultato.
Nel percorso chiuso, dato dall'unione $R_a \cup \gamma_{R+} \cup \gamma_{R-}$, qualora non vi siano singolarità lungo lo stesso percorso, l'integrale può essere calcolato con il teorema dei residui. Le singolarità dell'integranda sono i poli semplici dovuti agli zeri del seno, ovvero $\{z_k = \pm k\pi, k \in \mathbb{N}\}$. Consideriamo il caso in cui le due rette non passano per tali poli, possiamo definire questa eventualità richiedendo che il rapporto a/π non sia un numero naturale, cioè $(a/\pi) \notin \mathbb{N}$. In questo caso, nel percorso $R_a \cup \gamma_{R+} \cup \gamma_{R-}$, cadono i poli z_k con $|k| < a/\pi$, ovvero per i valori

$$k = \pm 1, \pm 2 \ldots, \pm \operatorname{Int}(a/\pi),$$

dove con $\operatorname{Int}(a/\pi)$ si intende la parte intera del rapporto a/π. Lo zero è escluso in quanto è una (ben nota) singolarità eliminabile.
In definitiva, in questo caso, l'integrale in valore principale diventa un integrale normale, ovvero si ha

$$c(a) = \Pr\int_{R_a} \frac{z^2}{\operatorname{sen}(z)} dz = \int_{R_a} \frac{z^2}{\operatorname{sen}(z)} dz = \int_{R_a\cup\gamma_{R+}\cup\gamma_{R-}} \frac{z^2}{\operatorname{sen}(z)} dz = 2i\pi \sum_{\substack{k=-\operatorname{Int}(a/\pi) \\ k\neq 0}}^{\operatorname{Int}(a/\pi)} \operatorname{Res}\left[\frac{z^2}{\operatorname{sen}(z)}, z = k\pi\right].$$

I residui sono

$$\operatorname{Res}\left[\frac{z^2}{\operatorname{sen}(z)}, z = k\pi\right] = (-1)^k (k\pi)^2 .$$

Sfruttandone la simmetria rispetto al cambiamento di segno $k \to -k$, possiamo scrivere la precedente somma e quindi il risultato, come

$$c(a) = 4i\pi \sum_{k=1}^{\mathrm{Int}(a/\pi)} (-1)^k \, (k\pi)^2 \, .$$

Nel caso in cui ci siano poli lungo il percorso, ovvero quando $(a/\pi) = n \in \mathbb{N}$, è necessario considerare il valore principale, che, per simmetria, coinvolge le due sigolarità in $z = \pm a = \pm n\pi$. Lungo le rette $R_{\pm a}$, avremo

$$\Pr\int_{R_{\pm a}} \frac{z^2}{\mathrm{sen}(z)} dz = \int_{R_{\pm a \mp \epsilon}} \frac{z^2}{\mathrm{sen}(z)} dz - \int_{-\gamma_{\pm a}} \frac{z^2}{\mathrm{sen}(z)} dz \, ,$$

dove le rette vengono spostate, sottraendo e aggiungendo una parte reale infinitesima ϵ, verso l'asse immaginario, cosicché i poli in $z = \pm n\pi$ cadono all'esterno.
Gli integrali sugli archi infinitesimi, $\gamma_{\pm a} = \left\{ z : z = \pm a + \epsilon e^{i\alpha} \, , \alpha \in [\pm\pi/2, \mp\pi/2] \right\}$, sono

$$\int_{-\gamma_{\pm a}} \frac{z^2}{\mathrm{sen}(z)} dz = -i\pi(-1)^n (n\pi)^2 \, .$$

Possiamo quindi definire $c(a)$ con la seguente legge doppia

$$c(a) = \begin{cases} 4i\pi \displaystyle\sum_{k=1}^{\mathrm{Int}(a/\pi)} (-1)^k \, (k\pi)^2 & \dfrac{a}{\pi} \notin \mathbb{N} \\[2ex] 4i\pi \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \, (k\pi)^2 + 2i\pi(-1)^n (n\pi)^2 & \dfrac{a}{\pi} = n \in \mathbb{N} \end{cases} \, .$$

La funzione $c(a)$ è costante a tratti, l'andamento è mostrato nella figura 2.

Esercizio 4 (punteggio 3/30)

Si determinino tutti gli sviluppi in serie di Laurent centrati in $z = 0$ della funzione

$$h(z) = \frac{z}{z^2 + 4} + \frac{1}{(z+3)^3} + \exp\left(\frac{z+2}{z} \right) \, .$$

Soluzione 4

La funzione $h(z)$ ha le seguenti singolarità: due poli semplici in $z_{1,2} = \pm 2i$, un polo triplo (di ordine tre) in $z_3 = -3$, una singolarità essenziale in $z_0 = 0$. Ne consegue che ci sono tre possibili corone circolari e tre possibili serie di Laurent di centro $z = 0$. Le corone sono:

$$C_1 = \left\{ z : |z_0| = 0 < |z| < |z_{1,2}| = 2 \right\} \, , \qquad C_2 = \left\{ z : 2 < |z| < |z_3| = 3 \right\} \, , \qquad C_3 = \{ z : |z| > 3 \} \, .$$

Consideriamo separatamente i tre termini della funzione $h(z)$ nelle tre corone. Il primo è la funzione razionale

$$h_1(z) = \frac{z}{z^2 + 4} \, .$$

Nella prima corona, per $0 < |z| < 2$, ovvero $|z^2|/4 < 1$, usiamo la serie geometrica, come segue

$$h_1^{(1)}(z) = \frac{z}{z^2 + 4} = \frac{z}{4\left(z^2/4 + 1\right)} = \frac{z}{4} \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{z^2}{4} \right)^k = -\sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{4} \right)^{k+1} z^{2k+1} \, ,$$

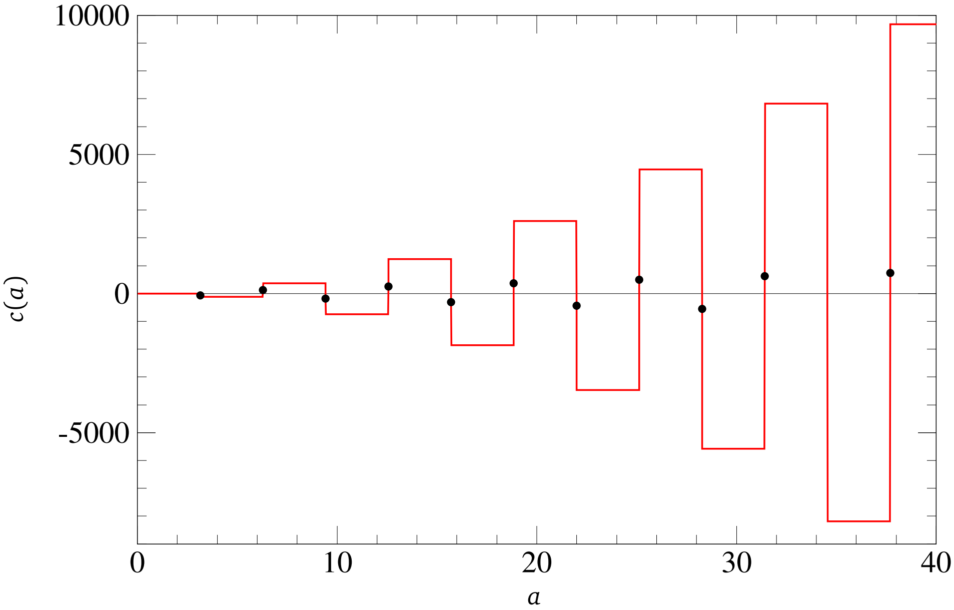


Figure 2: Andamento della funzione $c(a)$ dell'esercizio numero 3. I punti rappresentano in valori nel caso in cui a è multiplo intero di π.

il numero ad esponente tra parentesi indica la corona cui lo sviluppo in serie si riferisce.
Nella seconda corona, $2 < |z| < 3$, si ha $4/|z^2| < 1$, quindi

$$h_1^{(2)}(z) = \frac{z}{z^2+4} = \frac{1}{z\left(1+4/z^2\right)} = \frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{4}{z^2}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty}(-4)^k z^{-2k-1}\,.$$

Nella terza corona, $|z| > 3$, si ha $1 > 9/|z^2| > 4/|z^2|$, vale anche qui la serie precedente, $h_1^{(3)}(z) = h_1^{(2)}(z)$.
Il secondo termine della funzione è

$$h_2(z) = \frac{1}{(z+3)^3}\,,$$

per poterlo ricondurre alla serie geometrica, osserviamo che

$$h_2(z) = \frac{1}{2}\frac{d^2}{dz^2}\frac{1}{z+3}\,.$$

Nella prima corona, $0 < |z| < 2$, in particolare $|z|/3 < 1$, allora

$$h_2^{(1)} = \frac{1}{2}\frac{d^2}{dz^2}\frac{1}{3(z/3+1)} = \frac{1}{6}\frac{d^2}{dz^2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^k z^k = -\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)\left(-\frac{1}{3}\right)^{k+1} z^{k-2}\,.$$

Nella seconda corona, $2 < |z| < 3$, si ha ancora $|z|/3 < 1$, quindi $h_2^{(2)}(z) = h_2^{(1)}(z)$. Nella terza, invece, $|z| > 3$, cioè: $3/|z| < 1$,

$$h_2^{(3)}(z) = \frac{1}{2}\frac{d^2}{dz^2}\frac{1}{z(1+3/z)} = \frac{1}{2}\frac{d^2}{dz^2}\sum_{k=0}^{\infty}(-3)^k z^{-k-1} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)(k+2)(-3)^k z^{-k-3}\,.$$

Infine, il terzo termine

$$h_3(z) = \exp\left(\frac{z+2}{z}\right),$$

ha uno sviluppo in serie che converge ovunque ad eccezione dell'origine. In particolare si ha

$$h_3^{(1)}(z) = h_3^{(2)}(z) = h_3^{(3)}(z) = e^{1+2/z} = e\, e^{2/z} = e\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k}{k!}z^{-k}.$$

Riassemblando, a partire dalla prima corona si ha

$$\begin{aligned} h^{(1)}(z) = \sum_{j=1}^{3} h_j^{(1)}(z) &= -\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^{k+1} z^{2k+1} - \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)\left(-\frac{1}{3}\right)^{k+1} z^{k-2} + e\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k}{k!}z^{-k} \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} a_m^{(1)} z^m + \sum_{m=0}^{\infty} b_m^{(1)} z^m + \sum_{m=-\infty}^{0} c_m^{(1)} z^m \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} t_m^{(1)} z^m, \end{aligned}$$

con

$$a_m^{(1)} = \begin{cases} -\left(-\dfrac{1}{4}\right)^{(m+1)/2} & m \text{ dispari} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}, \qquad b_m^{(1)} = -\frac{(m+1)(m+2)}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^{m+3}, \qquad c_m^{(1)} = e\frac{2^{-m}}{(-m)!},$$

mentre il coefficiente unico è

$$t_m^{(1)} = \begin{cases} c_m^{(1)} & m \le -1 \\ c_m^{(1)} + b_m^{(1)} & m = 0 \\ b_m^{(1)} + a_m^{(1)} & m \ge 1 \end{cases}.$$

Nella seconda corona

$$\begin{aligned} h^{(2)}(z) = \sum_{j=1}^{3} h_j^{(2)}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty}(-4)^k z^{-2k-1} - \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)\left(-\frac{1}{3}\right)^{k+1} z^{k-2} + e\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k}{k!}z^{-k} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{-1} a_m^{(2)} z^m + \sum_{m=0}^{\infty} b_m^{(2)} z^m + \sum_{m=-\infty}^{0} c_m^{(2)} z^m \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} t_m^{(2)} z^m, \end{aligned}$$

con

$$a_m^{(2)} = \begin{cases} -(-4)^{-(m+1)/2} & -m \text{ dispari} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}, \qquad b_m^{(2)} = b_m^{(1)}, \qquad c_m^{(2)} = c_m^{(1)},$$

il secondo coefficiente unico è

$$t_m^{(2)} = \begin{cases} a_m^{(2)} + c_m^{(2)} & m \le -1 \\ c_m^{(2)} + b_m^{(2)} & m = 0 \\ b_m^{(2)} & m \ge 1 \end{cases} .$$

Infine, nella terza corona si ha

$$\begin{aligned} h^{(3)}(z) = \sum_{j=1}^{3} h_j^{(3)}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty}(-4)^k z^{-2k-1} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)(k+2)(-3)^k z^{-k-3} + e\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k}{k!}z^{-k} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{-1} a_m^{(3)} z^m + \sum_{m=-\infty}^{-3} b_m^{(3)} z^m + \sum_{m=-\infty}^{0} c_m^{(3)} z^m \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} t_m^{(3)} z^m , \end{aligned}$$

con

$$a_m^{(3)} = a_m^{(2)} , \qquad b_m^{(3)} = \frac{(m+1)(m+2)}{2}(-3)^{-m-3} , \qquad c_m^{(3)} = c_m^{(1)} ,$$

l'ultimo coefficiente unico è

$$t_m^{(3)} = \begin{cases} a_m^{(3)} + b_m^{(3)} + c_m^{(3)} & m \le -3 \\ a_m^{(3)} + b_m^{(3)} & -2 \le m \le -1 \\ c_m^{(3)} & m = 0 \end{cases} .$$

Esercizio 5 (punteggio 3.5/30)

Siano $f(z)$ e $g(z)$ funzioni intere che non si annullano negli stessi punti, ovvero gli insiemi $\{t_k\}$ e $\{s_j\}$ degli zeri di $f(z)$ e $g(z)$ rispettivamente, verificano la condizione $\{t_k\} \cap \{s_j\} = \emptyset$. Usando il teorema di Mittag-Leffler, si dimostri che esistono due funzioni intere $h(z)$ e $e(z)$ tali da verificare l'identità

$$f(z)h(z) + g(z)e(z) = 1 .$$

Soluzione 5

Consideriamo il caso più generale in cui si abbia

$$f(z)h(z) + g(z)e(z) = A .$$

con $A \neq 0$.
Dall'identità si ottiene per $h(z)$

$$h(z) = \frac{A - g(z)e(z)}{f(z)} = \frac{A}{f(z)} - \frac{g(z)e(z)}{f(z)} = g(z)\left(\frac{A}{f(z)g(z)} - \frac{e(z)}{f(z)}\right) ,$$

la funzione tra parentesi è meromorfa in quanto somma di funzioni meromorfe, rapporti di funzioni intere. Affinché $h(z)$ sia intera è necessario che la funzione tra parentesi sia essa stessa intera essendo tale $g(z)$. La prima delle due funzioni tra parentesi è data ed ha, per ipotesi, due insiemi distinti di poli corrispondenti agli zeri distinti della $f(z)$ e della $g(z)$, quindi possiamo scrivere l'espansione di Mittag-Leffler

$$\frac{A}{f(z)g(z)} = G(z) + \sum_k T_k(z) + \sum_j S_j(z) ,$$

dove $G(z)$ è la parte intera, mentre $T_k(z)$ e $S_j(z)$ rappresentano le parti principali degli sviluppi in serie di Laurent centrati nei poli $\{t_k\}$ e $\{s_j\}$, rispettivamente.
Definiamo una funzione meromorfa, $\phi(z)$, che abbia le parti principali $\{T_k(z)\}$, ovvero

$$\phi(z) = F(z) + \sum_k T_k(z)\,,$$

ne consegue che, definendo la funzione intera $e(z)$ cercata, come

$$e(z) = \phi(z) f(z)\,,$$

si ha anche

$$h(z) = g(z)\left(\frac{A}{f(z)g(z)} - \phi(z)\right)\,.$$

Verifichiamo che le funzioni così ottenute sono intere.
Poiché $\phi(z)$, per costruzione, ha, in corrispondenza degli zeri di $f(z)$, poli dello stesso ordine, il prodotto $\phi(z)f(z)$ è una funzione intera. Più in dettaglio possiamo usare per la $f(z)$ l'espansione di Weierstrass

$$f(z) = f(0)e^{zf'(0)/f(0)}\prod_k \left(1-\frac{z}{t_k}\right)^{\beta_k} e^{\beta_k z/t_k} = \prod_k \gamma_k(z)\left(z-t_k\right)^{\beta_k}\,,$$

dove $\{\beta_k\} \subset \mathbb{N}$, è l'insieme delle molteplicità degli zeri di $f(z)$ e dei poli di $\phi(z)$, le funzioni $\gamma_k(z)$ sono proporzionali ad esponenziali, quindi intere e prive di zeri, utilizziamo la seconda definizione per economia di simboli.
L'espansione di Mittag-Leffler della $\phi(z)$, esplicitando la somma delle parti principali, è

$$\phi(z) = F(z) + \sum_k \sum_{j=-\beta_k}^{-1} C_j^{(k)}\left(z-t_k\right)^j\,,$$

$C_j^{(k)}$ rappresenta il j-esimo coefficiente di Laurent centrata nel k-esimo polo, t_k, di ordine β_k. Per il prodotto si ha

$$\begin{aligned}
f(z)\phi(z) &= F(z)\prod_k \gamma_k(z)\left(z-t_k\right)^{\beta_k} + \sum_k \sum_{j=-\beta_k}^{-1} C_j^{(k)}\left(z-t_k\right)^j \prod_{k'}\gamma_{k'}(z)\left(z-t_{k'}\right)^{\beta_{k'}}\\
&= F(z)\prod_k \gamma_k(z)\left(z-t_k\right)^{\beta_k} + \sum_k \sum_{j=-\beta_k}^{-1} C_j^{(k)}\left(z-t_k\right)^{j+\beta_k}\gamma_k(z) \prod_{k'\neq k}\gamma_{k'}(z)\left(z-t_{k'}\right)^{\beta_{k'}}\\
&= F(z)\prod_k \gamma_k(z)\left(z-t_k\right)^{\beta_k} + \sum_k \sum_{l=0}^{\beta_k-1} C_{l-\beta_k}^{(k)}\left(z-t_k\right)^{l}\gamma_k(z) \prod_{k'\neq k}\gamma_{k'}(z)\left(z-t_{k'}\right)^{\beta_{k'}}\,, \qquad (l = j+\beta_k)\,,
\end{aligned}$$

dove abbiamo estratto dal prodotto su k' il fattore k-esimo che compensa le potenze negative nella somma delle parti principali. Non ci sono più potenze negative, quindi $e(z) = f(z)\phi(z)$ **è intera**.
Lo stesso argomento vale anche per $h(z)$ che, infatti, è definita come il prodotto di una funzione intera, $g(z)$, ed una meromorfa

$$\frac{1}{f(z)g(z)} - \phi(z) = G(z) - F(z) + \sum_j S_j(z)\,,$$

che, per costruzione della $\phi(z)$, ha solo i poli corrispondenti agli zeri $\{s_j\}$ di $g(z)$. La moltiplicazione cancella esattamente i poli come è accaduto per $f(z)\phi(z)$.

Esercizio 6 (punteggio 3/30)

Si verifichi lo sviluppo di Mittag-Leffler

$$f(z) = \frac{1}{\cos^2(z) - \cos^2(t)} = \frac{1}{1 - \cos^2(t)} - \frac{2}{\operatorname{sen}(2t)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z^2}{\left[z^2 - (t+n\pi)^2\right](t+n\pi)},$$

con t reale, $0 < |t| < \pi$ e $|t| \neq \pi/2$.

Soluzione 6

La funzione è meromorfa e, essendo $|t| \neq \pi/2$, può essere riscritta come

$$f(z) = \left(\frac{1}{\cos(z) - \cos(t)} - \frac{1}{\cos(z) + \cos(t)}\right) \frac{1}{2\cos(t)} = \frac{f_a(z) - f_b(z)}{2\cos(t)},$$

con

$$f_{a,b}(z) = \frac{1}{\cos(z) \mp \cos(t)}.$$

Entrambe le funzioni hanno solo poli semplici, in particolare, indicando con $\{a_k^\pm\}$ e $\{b_k^\pm\}$, quelli di $f_a(z)$ e $f_b(z)$ rispettivamente, si hanno

$$a_k^\pm = \pm t + 2k\pi, \qquad b_k^\pm = \pm t + (2k+1)\pi, \qquad \forall\, k \in \mathbb{Z},$$

inoltre, i poli non sono coincidenti: $\{a_k^\pm\} \cap \{b_k^\pm\} = \emptyset$. Il segno ad esponente indica il segno del termine t, ovvero, a parità di indice k si hanno due poli distinti, sia per $f_a(z)$ che per $f_b(z)$. I residui, $A_k^\pm$ e $B_k^\pm$, sono opposti, infatti

$$A_k^\pm = \lim_{z \to a_k^\pm} f_a(z)(z - a_k^\pm) = \frac{1}{-\operatorname{sen}(a_k^\pm)} = \mp \frac{1}{\operatorname{sen}(t)},$$
$$B_k^\pm = \lim_{z \to b_k^\pm} f_b(z)(z - b_k^\pm) = \frac{1}{-\operatorname{sen}(b_k^\pm)} = \pm \frac{1}{\operatorname{sen}(t)}.$$

Gli sviluppi saranno

$$f_a(z) = G_a(z) - \frac{1}{\operatorname{sen}(t)} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{z - a_k^+} - \frac{1}{z - a_k^-}\right] = G_a(z) - \frac{1}{\operatorname{sen}(t)} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{z - t - 2k\pi} - \frac{1}{z + t - 2k\pi}\right]$$
$$= G_a(z) - \frac{1}{\operatorname{sen}(t)} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{z - t - 2k\pi} - \frac{1}{z + t + 2k\pi}\right] = G_a(z) - \frac{2}{\operatorname{sen}(t)} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{t + 2k\pi}{z^2 - (t+2k\pi)^2};$$
$$f_b(z) = G_b(z) + \frac{1}{\operatorname{sen}(t)} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{z - b_k^+} - \frac{1}{z - b_k^-}\right] = G_b(z)] + \frac{1}{\operatorname{sen}(t)} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{z - t - (2k+1)\pi} - \frac{1}{z + t - (2k+1)\pi}\right]$$
$$= G_b(z) + \frac{1}{\operatorname{sen}(t)} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{z - t - (2k+1)\pi} - \frac{1}{z + t + (2k+1)\pi}\right] = G_b(z) + \frac{2}{\operatorname{sen}(t)} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{t + (2k+1)\pi}{z^2 - [t + (2k+1)\pi]^2},$$

dove la funzione $G_{a,b}(z)$ rappresenta la parte intera di $f_{a,b}(z)$. La limitatezza asintotica su circonferenze, centrate nell'origine e non passanti per i poli, implica che $G_{a,b}(z)$ sia costante. La determiniamo valutando la funzione nell'origine, ovvero, nei due casi si hanno

$$G_a(0) = f_a(0) - \frac{2}{\operatorname{sen}(t)} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{t + 2k\pi} = \frac{1}{1 - \cos(t)} - \frac{2}{\operatorname{sen}(t)} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{t + 2k\pi};$$
$$G_b(0) = f_b(0) + \frac{2}{\operatorname{sen}(t)} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{t + (2k+1)\pi} = \frac{1}{1 + \cos(t)} + \frac{2}{\operatorname{sen}(t)} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{t + (2k+1)\pi}.$$

Mettiamo insieme i risultati

$$f_a(z) = \frac{1}{1-\cos(t)} - \frac{2}{\mathrm{sen}(t)} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{t+2k\pi} + \frac{t+2k\pi}{z^2-(t+2k\pi)^2} \right]$$
$$= \frac{1}{1-\cos(t)} - \frac{2}{\mathrm{sen}(t)} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{z^2}{(t+2k\pi)\left[z^2-(t+2k\pi)^2\right]}\,;$$

$$f_b(z) = \frac{1}{1+\cos(t)} + \frac{2}{\mathrm{sen}(t)} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{t+(2k+1)\pi} + \frac{t+(2k+1)\pi}{z^2-(t+(2k+1)\pi)^2} \right]$$
$$= \frac{1}{1+\cos(t)} + \frac{2}{\mathrm{sen}(t)} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{z^2}{(t+(2k+1)\pi)\left[z^2-(t+(2k+1)\pi)^2\right]}\,.$$

Infine, la funzione completa

$$f(z) = \frac{f_a(z)-f_b(z)}{2\cos(t)}$$
$$= \frac{1}{1-\cos^2(t)} - \frac{1}{\cos(t)\,\mathrm{sen}(t)} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{z^2}{(t+2k\pi)\left[z^2-(t+2k\pi)^2\right]} + \frac{z^2}{(t+(2k+1)\pi)\left[z^2-(t+(2k+1)\pi)^2\right]} \right\}.$$

I due termini nella parentesi graffa contengono multipli pari, positivi e negativi, e dispari, anch'essi positivi e negativi, di π, possiamo, quindi, scriverli in un'unica forma, come

$$f(z) = \frac{1}{1-\cos^2(t)} - \frac{2}{\mathrm{sen}(2t)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z^2}{\left[z^2-(t+n\pi)^2\right](t+n\pi)}\,,$$

questo è il risultato cercato.
Consideriamo anche il caso escluso $t = 1/2$, caso in cui la funzione diventa

$$f_{1/2}(z) = \frac{1}{\cos^2(z)}$$

ed ha poli doppi nei punti $z_n = (2n+1)\pi/2$, $\forall\, n \in \mathbb{Z}$. L'espansione di Mittag-Leffler è quindi

$$f_{1/2}(z) = G + \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n(z)\,,$$

dove G è la parte intera costante e le funzioni $P_n(z)$ sono le parti principali degli sviluppi di Laurent in ogni z_n, cioè

$$P_n(z) = \frac{C_{-2}^{(n)}}{(z-z_n)^2} + \frac{C_{-1}^{(n)}}{z-z_n}\,.$$

Per ottenere i valori dei coefficienti usiamo lo sviluppo in serie di Taylor del coseno intorno ad un suo zero semplice z_n, si ha

$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-z_n)^{2n+1}}{(2n+1)!}\,.$$

Ne consegue che, nell'intorno di z_n, avremo

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\cos^2(z)} &= \left[\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{(z-z_n)^{2k+1}}{(2k+1)!}\right]^{-2} \\
&= \frac{1}{(z-z_n)^2}\left[1+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{(z-z_n)^{2k}}{(2k+1)!}\right]^{-2} \\
&= \frac{1}{(z-z_n)^2}\left\{1-2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{(z-z_n)^{2k}}{(2k+1)!}+O\left[\left(\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{(z-z_n)^{2k}}{(2k+1)!}\right)^2\right]\right\} \\
&= \frac{1}{(z-z_n)^2}+\frac{1}{3}+O\left[(z-z_n)^2\right],
\end{aligned}
$$

da cui, $\forall\, n \in \mathbb{Z}$, $C_{-2}^{(n)} = 1$ e $C_{-1}^{(n)} = 0$ e le funzioni $P_n(z)$ hanno la forma "dipolare"

$$P_n(z) = \frac{1}{(z-z_n)^2}\,.$$

Infine, determiniamo G sapendo che $f_0(0) = 1$,

$$G = f_0(0) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n(0) = 1 - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{z_n^2}\,.$$

L'espansione completa è

$$f_0(z) = 1 + \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[-\frac{1}{z_n^2}+\frac{1}{(z-z_n)^2}\right] = 1 + z\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{2z_n - z}{z_n^2(z-z_n)^2}\,.$$

Dimostriamo che nel limite $t \to \pm\pi/2$ l'espressione

$$f(z) = \frac{1}{1-\cos^2(t)} - \frac{2}{\mathrm{sen}(2t)}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{z^2}{\left[z^2-(t+n\pi)^2\right](t+n\pi)}$$

tende alla precedente per $f_0(z)$, ovvero che anche il caso escluso può essere considerato da questa espansione. Se $t \to \pm\pi/2$ il primo termine tende all'unità, quindi rimane da verificare il limite della somma, ovvero l'identità cercata è

$$\lim_{t\to\pm\pi/2}\frac{-2}{\mathrm{sen}(2t)}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{z^2}{\left[z^2-(t+n\pi)^2\right](t+n\pi)} = z\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{2z_n - z}{z_n^2(z-z_n)^2}\,.$$

Per prima cosa osserviamo che

$$\lim_{t\to\pm\pi/2}(t+n\pi) = \pm z_{\pm n}\,,$$

e che quindi la prima somma si annulla per simmetria. In dettaglio, avremo

$$\lim_{t\to\pm\pi/2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{z^2}{\left[z^2-(t+n\pi)^2\right](t+n\pi)} = \pm\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{z^2}{\left(z^2-z_n^2\right)z_n} = 0\,,$$

ovvero la forma

$$\lim_{t\to\pm\pi/2}\frac{-2}{\operatorname{sen}(2t)}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{z^2}{\left[z^2-(t+n\pi)^2\right](t+n\pi)}$$

è di tipo 0/0. Applichiamo il de l'Hôpital e si ha

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\pm\pi/2}\frac{-2}{\operatorname{sen}(2t)}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{z^2}{\left[z^2-(t+n\pi)^2\right](t+n\pi)} &= \lim_{t\to\pm\pi/2}\frac{-1}{\cos(2t)}\frac{d}{dt}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{z^2}{\left[z^2-(t+n\pi)^2\right](t+n\pi)}\\
&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{z^2\left(3z_n^2-z^2\right)}{\left(z^2-z_n^2\right)^2 z_n^2}\\
&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{z^2\left(3z_n^2-z^2\right)}{\left(z-z_n\right)^2\left(z+z_n\right)^2 z_n^2}\,,
\end{aligned}$$

a partire dalla seconda identità non distinguiamo più i due casi "±" perché, grazie alla simmetria dell'intervallo di somma e alla parità della funzione rispetto a $z_n \to z_{-n}$, risultano coincidenti. Vogliamo riscrivere il numeratore fattorizzando $(z+z_n)^2$, così da ottenere lo stesso denominatore che si desidera. A tal fine, usando i due coefficienti da determinare A e B, scriviamo

$$\begin{aligned}
\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{z^2\left(3z_n^2-z^2\right)}{\left(z-z_n\right)^2\left(z+z_n\right)^2 z_n^2} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\left(z+z_n\right)^2\left(A+Bz_n\right)}{\left(z-z_n\right)^2\left(z+z_n\right)^2 z_n^2}\\
&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{z_n^3B+z_n^2(A+2zB)+z_n\left(2zA+z^2B\right)+z^2A}{\left(z-z_n\right)^2\left(z+z_n\right)^2 z_n^2}\\
&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{z_n^2(A+2zB)+z^2A}{\left(z-z_n\right)^2\left(z+z_n\right)^2 z_n^2}\,.
\end{aligned}$$

È facile vedere che le uniche condizioni che dobbiamo applicare per fissare i coefficienti A e B sono quelle relative alle potenze pari di z_n, essendo il denominatore pari, i termini contenenti potenze dispari di z_n non contribuiscono alla somma, simmetrica in n, quindi sono stati eliminati. Dobbiamo dunque richiedere che

$$A=-z^2\,,\qquad A+2zB=3z^2\quad\Rightarrow\quad B=2z\,.$$

Ricapitolando

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\pm\pi/2}\frac{-2}{\operatorname{sen}(2t)}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{z^2}{\left[z^2-(t+n\pi)^2\right](t+n\pi)} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{z^2\left(3z_n^2-z^2\right)}{\left(z-z_n\right)^2\left(z+z_n\right)^2 z_n^2}\\
&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{A+Bz_n}{\left(z-z_n\right)^2 z_n^2}\\
&=z\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{2z_n-z}{\left(z-z_n\right)^2 z_n^2}\,,
\end{aligned}$$

che è l'identità richiesta.