Metodi Matematici per la Fisica

Prova scritta - 24 settembre 2014

Si svolgano cortesemente i seguenti esercizi.

Esercizio 1 (6 punti)

Si calcoli l'integrale

$$S = \oint_{\Gamma} \frac{\mathrm{Re}(z)}{z^4+1}\, dz\,,$$

con $\Gamma = \{z : z = Re^{i\theta}, \theta \in [0,\pi]\} \cup [-R,R]$ percorso in senso antiorario. Si considerino i due casi: $R<1$ e $R>1$.

Soluzione 1

La funzione a numeratore dell'integranda **non è** analitica, non si può applicare "direttamente" il teorema di Cauchy. Sulla semicirconferenza si ha $z = Re^{i\theta}$, quindi z^* è proporzionale all'inverso di z, cioè: $z^* = Re^{-i\theta} = R^2/z$ e la parte reale è

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{z+z^*}{2} = \frac{z+R^2/z}{2} = \frac{z^2+R^2}{2z}\,.$$

Ne consegue che l'integrale può essere scritto come

$$S \;=\; \oint_{\Gamma} \frac{\mathrm{Re}(z)}{z^4+1}\, dz = \frac{1}{2}\int_{C_R/2} \frac{z^2+R^2}{z(z^4+1)}\, dz + \int_{-R}^{R} \frac{x}{x^4+1} dx = \frac{1}{2}\int_{C_R/2} \frac{z^2+R^2}{z(z^4+1)}\, dz\,,$$

dove $C_R/2$ indica la semicirconferenza di raggio R centrata nell'origine e appartenente al semipiano delle parti immaginarie positive. L'integrale sul segmento reale $(-R,R)$ è nullo in quanto l'integranda è dispari e l'intervallo di integrazione è simmetrico. Con le sostituzione $w = z^2$, si ha

$$S \;=\; \frac{1}{4}\oint_{C_{R^2}} \frac{w+R^2}{w(w^2+1)}\, dw\,,$$

dove C_{R^2} è la circonferenza centrata nell'origine di raggio R^2. La funzione a numeratore dell'integranda è ora analitica si può applicare il teorema dei residui e, con $R>1$, si ha

$$\begin{aligned}
S_{R>1} = \frac{1}{4}\oint_{C_{R^2}} \frac{w+R^2}{w(w^2+1)}\, dw \;&=\; 2i\pi\left(\mathrm{Res}[z=0] + \mathrm{Res}[z=i] + \mathrm{Res}[z=-i]\right) \\
&=\; \frac{i\pi}{2}\left(R^2 + \frac{i+R^2}{2i^2} + \frac{-i+R^2}{2i^2}\right) \\
&=\; \frac{i\pi}{2}\left(R^2 - \frac{i+R^2}{2} - \frac{-i+R^2}{2}\right) \\
S_{R>1} \;&=\; 0\,.
\end{aligned}$$

Mentre, per $R<1$,

$$S_{R<1} = \frac{1}{4}\oint_{C_{R^2}} \frac{w+R^2}{w(w^2+1)}\, dw \;=\; 2i\pi\,\mathrm{Res}[z=0] = \frac{i\pi}{2}R^2\,.$$

Esercizio 2 (6 punti)

Si calcoli l'integrale in valore principale

$$T = \mathrm{PV}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+1)^2}{\mathrm{senh}(x)}\, dx\,.$$

Soluzione 2

Il valore principale si riferisce al polo semplice dell'integranda in $x=0$. Chiamiamo Γ_R il percorso di integrazione nel piano complesso, rappresentato in fig. 1. Si tratta di un rettangolo, con base sull'asse reale da $x=-R$ ad $x=R$ ed altezza pari a π. Sia sulla base inferiore che su quella superiore ci sono due archi infinitesimi, γ_0 e γ_π, che aggirano da sopra, in senso orario ed antiorario, i punti $z=0$ e $z=i\pi$, poli semplici dell'integranda.

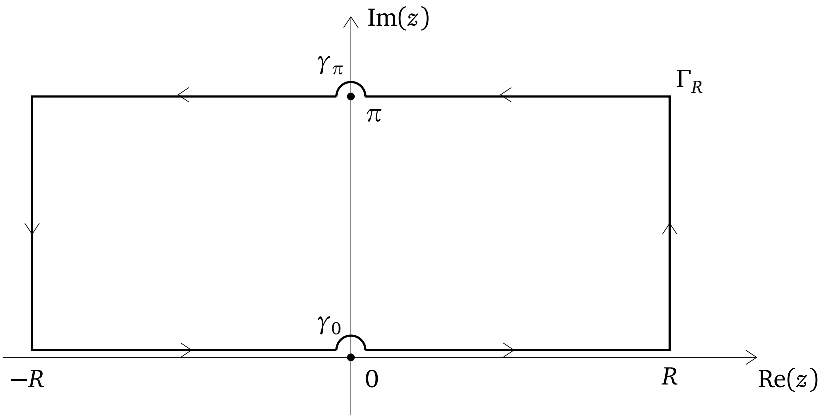

Figure 1: Percorso di integrazione dell'esercizio numero 2.

L'integrale su tale percorso non dipende da R ed è

$$\oint_{\Gamma_R} \frac{(z+1)^2}{\mathrm{senh}(z)}\, dz = 2i\pi \mathrm{Res}[z=i\pi] = -2i\pi(1+i\pi)^2\,.$$

Nel limite $R\to\infty$ si ha inoltre

$$\begin{aligned}
\lim_{R\to\infty}\oint_{\Gamma_R} \frac{(z+1)^2}{\mathrm{senh}(z)}\, dz &= \mathrm{PV}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x+1)^2}{\mathrm{senh}(x)}\,dx + \mathrm{PV}\int_{\infty}^{-\infty}\frac{(x+i\pi+1)^2}{-\mathrm{senh}(x)}\,dx + \int_{\gamma_0}\frac{(z+1)^2}{\mathrm{senh}(z)}\,dz + \int_{\gamma_\pi}\frac{(z+1)^2}{\mathrm{senh}(z)}\,dz \\
&= (2+i\pi)\,\mathrm{PV}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x+1)^2}{\mathrm{senh}(x)}\,dx + \int_{\gamma_0}\frac{(z+1)^2}{\mathrm{senh}(z)}\,dz + \int_{\gamma_\pi}\frac{(z+1)^2}{\mathrm{senh}(z)}\,dz \\
&= (2+i\pi)\,\mathrm{PV}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x+1)^2}{\mathrm{senh}(x)}\,dx - i\pi\lim_{z\to 0}\frac{(z+1)^2}{\mathrm{senh}(z)}z + i\pi\lim_{z\to i\pi}\frac{(z+1)^2}{\mathrm{senh}(z)}(z-i\pi) \\
&= (2+i\pi)\,\mathrm{PV}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x+1)^2}{\mathrm{senh}(x)}\,dx - i\pi - i\pi(1+i\pi)^2\,.
\end{aligned}$$

Abbiamo usato il fatto che i contributi sui tratti verticali si annullano e che, per la parità dell'integranda, si hanno

$$
\begin{aligned}
T &= \mathrm{PV}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x+1)^2}{\mathrm{senh}(x)}\,dx = \mathrm{PV}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2x}{\mathrm{senh}(x)}\,dx \\
\mathrm{PV}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x+i\pi+1)^2}{\mathrm{senh}(x)}\,dx &= \mathrm{PV}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x+i\pi+1)^2}{\mathrm{senh}(x)}\,dx = (1+i\pi)\,\mathrm{PV}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2x}{\mathrm{senh}(x)}\,dx = (1+i\pi)\,T\,.
\end{aligned}
$$

In definitiva

$$
(2+i\pi)\,\mathrm{PV}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x+1)^2}{\mathrm{senh}(x)}\,dx - i\pi - i\pi(1+i\pi)^2 \;=\; -2i\pi(1+i\pi)^2\,,
$$

da cui il risultato finale

$$
T = \mathrm{PV}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x+1)^2}{\mathrm{senh}(x)}\,dx \;=\; \frac{-i\pi(1+i\pi)^2+i\pi}{2+i\pi} = \pi^2\,.
$$

Esercizio 3 (5 punti)

Si determini lo sviluppo di Laurent in $z=0$ della funzione

$$
f(z) = \mathrm{sen}(z)\,\mathrm{sen}(1/z^2)\,,
$$

identificando il dominio di convergenza.

Soluzione 3

Le singolarità sono in $z=0$ e $z=\infty$ e si tratta di singolarità essenziali. I coefficienti si calcolano con la formula integrale di Cauchy, sfruttando lo sviluppo in serie del seno, come

$$
\begin{aligned}
C_k &= \frac{1}{2i\pi}\oint\frac{f(z)}{z^{k+1}}\,dz = \frac{1}{2i\pi}\oint\frac{\left(z - z^3/3! + z^5/5! + \ldots\right)\left(z^{-2} - z^{-6}/3! + z^{-10}/5! + \ldots\right)}{z^{k+1}}\,dz \\
&= \frac{1}{2i\pi}\oint\frac{1}{z^{k+1}}\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m+n}z^{2m-4n-1}}{(2m+1)!(2n+1)!}\,dz = \frac{1}{2i\pi}\oint\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m+n}z^{2m-4n-k-2}}{(2m+1)!(2n+1)!}\,dz \\
&= \sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m+n}}{(2m+1)!(2n+1)!}\delta_{k,2m-4n-1}\,.
\end{aligned}
$$

Gli unici coefficienti non nulli sono quelli con $|k|$ dispari. Posto $k=2l-1$, con $l\in\mathbb{Z}$, avremo

$$
C_{2l-1} \;=\; \sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m+n}}{(2m+1)!(2n+1)!}\delta_{l,m-2n} = (-1)^l\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2l+4n+1)!(2n+1)!}\,.
$$

La serie di Laurent è

$$
f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k\, z^k\,, \qquad C_k = \begin{cases} (-1)^l\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2l+4n+1)!(2n+1)!} & k=2l-1\,,\ l\in\mathbb{Z} \\ 0 & k=2l\,,\ l\in\mathbb{Z}\end{cases}\,.
$$

Esercizio 4 (6 punti)

Si determini, usando il metodo della serie di Neumann, la soluzione dell'equazione matriciale

$$x = \lambda A x + y$$

dove: $\lambda \in \mathbb{C}$, l'incognita x e il termine noto y sono vettori colonna 2×1 ad elementi complessi ed A è la matrice

$$A = \begin{pmatrix} e^{i\pi/4}/\sqrt{2} & e^{-i\pi/4}/\sqrt{2} \\ e^{-i\pi/4}/\sqrt{2} & e^{i\pi/4}/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Si consideri la norma euclidea.

Soluzione 4

La matrice è limitata, infatti

$$||A|| = \sup_{||a||=1} \{||Aa||\} = \sup_{||a||=1} \left\{ \sqrt{a^\dagger A^\dagger A a} \right\} = \sqrt{\sup_{||a||=1} \{a^\dagger A^\dagger A a\}},$$

e, scegliendo

$$a = \frac{1}{\sqrt{|a_1|^2 + |a_2|^2}} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix},$$

si ha

$$||A|| = \sqrt{\sup_{||a||=1} \{a^\dagger A^\dagger A a\}} = 1.$$

La soluzione dell'equazione si ottiene come serie di Neumann, ovvero

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k A^k y.$$

Per calcolare le potenze della matrice A la diagonalizziamo. Gli autovalori si ottengono dall'equazione caratteristica, ovvero

$$\det(A - I\alpha) = \det \begin{pmatrix} e^{i\pi/4}/\sqrt{2} - \alpha & e^{-i\pi/4}/\sqrt{2} \\ e^{-i\pi/4}/\sqrt{2} & e^{i\pi/4}/\sqrt{2} - \alpha \end{pmatrix} = \left[e^{i\pi/4}/\sqrt{2} - \alpha \right]^2 - e^{-i\pi/2}/2 = 0,$$

e sono

$$\alpha_1 = 1 \qquad \alpha_2 = i.$$

Gli autovettori corrispondenti sono

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \qquad a_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

La rappresentazione diagonale di A è

$$A_d = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}.$$

Ne consegue che la forma diagonale della somma della serie di Neumann è

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k A_d^k &= \sum_{k=0}^{\infty}\lambda^{4k}A_d^{4k} + \lambda A_d \sum_{k=0}^{\infty}\lambda^{4k}A_d^{4k} + \lambda^2 A_d^2 \sum_{k=0}^{\infty}\lambda^{4k}A_d^{4k} + \lambda^3 A_d^3 \sum_{k=0}^{\infty}\lambda^{4k}A_d^{4k} \\ &= \frac{1}{1-\lambda^4}\left[I + \lambda A_d + \lambda^2 A_d^2 + \lambda^3 A_d^3\right].\end{aligned}$$

Per ricavare la rappresentazione canonica si usa la matrice unitaria diagonalizzante

$$U = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

in particolare si ha

$$\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k A^k = U\left(\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k A_d^k\right)U^\dagger = U\frac{1}{1-\lambda^4}\left[I + \lambda A_d + \lambda^2 A_d^2 + \lambda^3 A_d^3\right]U^\dagger = \frac{1}{1-\lambda^4}\left[I + \lambda A + \lambda^2 A^2 + \lambda^3 A^3\right],$$

quindi la soluzione è

$$x = \sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k A^k\, y = \frac{1}{1-\lambda^4}\left[I + \lambda A + \lambda^2 A^2 + \lambda^3 A^3\right] y\,.$$

Infatti, si verifica che

$$\lambda A \frac{1}{1-\lambda^4}\left[I + \lambda A + \lambda^2 A^2 + \lambda^3 A^3\right] y + y = \frac{1}{1-\lambda^4}\left[\lambda A + \lambda^2 A^2 + \lambda^3 A^3 + \lambda^4 + I - \lambda^4\right] y = x\,.$$

Nelle espressioni precedenti si è sfruttato il fatto che

$$A_d^4 = A^4 = I\,.$$

Esercizio 5 (6 punti)

Sia $\hat{h}$ un operatore integrale definito sulle funzioni della classe $L^2(\mathbb{R})$ come

$$\hat{h} f(x) = \frac{1}{\pi}\mathrm{PV}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(y)}{x-y}\,dy\,.$$

Si dimostri che $\hat{h}^2 = -\hat{I}$, ovvero che

$$\hat{h}^2 f(x) = -f(x)\,.$$

Soluzione 5

Applichiamo direttamente l'operatore al quadrato

$$\hat{h}^2 f(x) = \frac{1}{\pi^2}\mathrm{PV}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{PV}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(y)}{(w-y)(x-w)}\,dy\,dw\,,$$

facendo la trasformata di Fourier si ha

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi^2}\mathscr{F}_k\left[\mathrm{PV}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{PV}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(y)}{(w-y)(x-w)}\,dy\,dw\right] &= \frac{1}{\pi^2}\mathscr{F}_k\left[\mathrm{PV}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F(w)}{(x-w)}\,dw\right] \\ &= \frac{1}{\pi^2}\mathscr{F}_k\left[F(w) * \frac{1}{w}\right] \\ &= \frac{-i\sqrt{2\pi}}{\pi^2}\mathscr{F}_k\left[F(w)\right]\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\mathrm{segn}(k)\,.\end{aligned}$$

La trasformata di Fourier della funzione $F(w)$ è

$$\mathscr{F}_k\left[F(w)\right] = \mathscr{F}_k\left[\mathrm{PV}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(y)}{w-y}\,dy\right] = -i\sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\mathrm{segn}(k)\tilde{f}(k)\,,$$

ne consegue che

$$\frac{1}{\pi^2}\mathscr{F}_k\left[\mathrm{PV}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{PV}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(y)}{(w-y)(x-w)}\,dy\,dw\right] \;=\; -\frac{2\pi}{\pi^2}\tilde{f}(k)\,\frac{\pi}{2}\,\mathrm{segn}^2(k) = -\tilde{f}(k)\,.$$

Infine, per l'unicità della trasformata di Fourier, otteniamo che

$$-f(x) = -\mathscr{F}_{-x}\left[\tilde{f}(k)\right] = \frac{1}{\pi^2}\mathrm{PV}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{PV}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(y)}{(w-y)(x-w)}\,dy\,dw = \hat{h}^2 f(x)\,,$$

da cui l'identità desiderata: $\hat{h}^2 = -\hat{I}$.

Esercizio 6 (6 punti)

Si consideri l'operatore integrale $\hat{K}$, che agisce sulle funzioni $f(x)$ dello spazio vettoriale $L^2(0,2)$, come

$$\hat{K}f(x) = \int_0^2 K(x,y)f(y)\,dy\,,$$

con

$$K(x,y) = \theta(x-1)\,\theta(1-y) + \theta(1-x)\,\theta(y-1)\,,$$

dove $\theta(x)$ è la funzione a gradino di Heaviside

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ 1 & x>0 \end{cases}.$$

Si classifichi l'operatore $\hat{K}$ e se ne determinino gli autovalori e le autofunzioni.

Soluzione 6

L'equazione agli autovalori di $\hat{K}$ è un'equazione integrale di Fredholm omogenea e con nucleo separabile, infatti

$$\begin{aligned} \hat{K}f(x) &= \lambda f(x) \\ \int_0^2 K(x,y)f(y)\,dy &= \lambda f(x) \\ \lambda^{-1}\int_0^2 K(x,y)f(y)\,dy &= f(x)\,. \end{aligned}$$

Il nucleo può essere scritto come

$$K(x,y) = \sum_{j=1}^{2} M_j(x)N_j(y)\,,$$

con

$$\begin{aligned} M_1(x) &= \theta(x-1) \\ M_2(x) &= \theta(1-x) \end{aligned}\,, \qquad \begin{aligned} N_1(x) &= \theta(1-x) \\ N_2(x) &= \theta(x-1) \end{aligned}\,.$$

Moltiplicando ambo i membri dell'equazione agli autovalori per $N_m(x)$ e integrando in dx sull'intervallo $(0,2)$ si ha

$$\sum_{j=1}^{2} \underbrace{\int_0^2 dx\, N_m(x) M_j(x)}_{A_{mj}} \underbrace{\int_0^2 dy\, N_j(y) f(y)}_{a_j} = \lambda \underbrace{\int_0^2 dx\, N_m(x) f(x)}_{a_m} .$$

Si ottiene l'equazione matriciale

$$A a = \lambda\, a ,$$

dove A è una matrice (nota) 2×2 ed a un vettore colonna (incognito) 1×2. In particolare, gli elementi di A sono

$$\begin{array}{rclcrcl} A_{11} &=& \displaystyle\int_0^2 N_1(x) M_1(x)\, dx = 0 & \qquad & A_{12} &=& \displaystyle\int_0^2 N_1(x) M_2(x)\, dx = 1 \\ A_{21} &=& \displaystyle\int_0^2 N_2(x) M_1(x)\, dx = 1 & \qquad & A_{22} &=& \displaystyle\int_0^2 N_2(x) M_2(x)\, dx = 0 \end{array} .$$

Gli autovalori si determinano risolvendo l'equazione caratteristica

$$\begin{aligned} \det(A - I\lambda) &= 0 \\ \lambda^2 - 1 &= 0 , \end{aligned}$$

da cui: $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -1$. Gli autovettori corrispondenti sono

$$a_{(1)} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} , \qquad a_{(2)} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

e le autofunzioni hanno al forma

$$f_j(x) = \lambda_j^{-1} \sum_{m=1}^{2} M_m(x) a_{(j)m} , \qquad j = 1, 2 ,$$

in particolare

$$f_1(x) = \frac{\theta(x-1) + \theta(1-x)}{\sqrt{2}} , \qquad f_2(x) = \frac{\theta(1-x) - \theta(x-1)}{\sqrt{2}} .$$

Verifichiamo la normalizzazione, ovvero

$$(f_1, f_1) = \int_0^2 |f_1(x)|^2\, dx = \frac{1}{2} \int_0^2 dx = 1 , \qquad (f_2, f_2) = \int_0^2 |f_2(x)|^2\, dx = \frac{1}{2} \int_0^2 dx = 1 .$$