Metodi Matematici per la Fisica

Terzo appello estivo - 24 luglio 2024

Si risolvano cortesemente i seguenti problemi, sapendo che il punteggio assegnato a ciascuna procedura di risoluzione può variare tra lo zero e il massimo indicato ed è stabilito valutando:

1. la correttezza del risultato ottenuto e della procedura utilizzata;
2. la completezza dei passaggi riportati;
3. il livello di esemplificazione con cui sono espressi i risultati (ad esempio un risultato numerico reale non deve contenere l'unità immaginaria);
4. la correttezza del formalismo utilizzato;
5. la chiarezza dell'esposizione e la leggibilità del testo;
6. la bellezza e l'armonia del tutto.

Primo problema (punteggio massimo: 6/30)

Si calcoli l'integrale

$$= \oint_{|z|=1} e^{e^{1/z}} \, dz \,,$$

dove il percorso d'integrazione è orientato in verso positivo.

Curiosità. Il simbolo  rappresenta uno dei cosiddetti vertici dell'interazione forte nell'ambito della teoria di campo denominata *cromodinamica quantistica*. Esso descrive l'accoppiamento di tre campi dei portatori dell'interazione forte, i *gluoni*. La rappresentazione grafica delle ampiezze è dovuta al fisico statunitense Richard Phillips Feynman.

Soluzione del primo problema

La funzione integranda ha una singolarità essenziale isolata nell'origine, ne consegue che, usando il teorema dei residui,

$$= 2i\pi \, \mathrm{Res}\left[e^{e^{1/z}}, z=0\right].$$

Il residuo nell'origine può essere calcolato come il coefficiente C_{-1} della serie di Laurent della funzione, che otteniamo sfruttando due volte la serie di Taylor dell'esponenziale. Avremo

$$\begin{aligned} e^{e^{1/z}} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(e^{1/z}\right)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^{-j}}{j!} \right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{z^{-2}}{2!} + \frac{z^{-3}}{3!} + \cdots \right)^k \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{z^{-2}}{2!} + \frac{z^{-3}}{3!} + \cdots \right)^k . \end{aligned}$$

Di ogni potenza k-esima, con $k \in \mathbb{N}$, consideriamo solo il termine proporzionale a z^{-1}, ovvero

$$\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{z^{-2}}{2!} + \frac{z^{-3}}{3!} + \cdots \right)^k = 1 + \frac{1}{z} k + \cdots \,, \qquad \forall \, k \in \mathbb{N} .$$

Usando questo risultato si ha

$$e^{e^{1/z}} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{z^{-2}}{2!} + \frac{z^{-3}}{3!} + \cdots \right)^k = \cdots + \frac{1}{z} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k!} + \cdots \,,$$

da cui il coefficiente -1 che coincide con il residuo cercato

$$C_{-1} = \mathrm{Res}\left(e^{e^{1/z}}, z = 0\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} = \{k' = k-1\} = \sum_{k'=0}^{\infty} \frac{1}{k'!} = e\,.$$

Il valore dell'integrale è

 $= 2i\pi e\,.$

Secondo problema (punteggio massimo: 6/30)

Si ottenga lo sviluppo di Mittag-Leffler della funzione

$$g(z) = \frac{1}{z\,(e^z + 1)}\,.$$

Soluzione del secondo problema

La funzione $g(z)$ è meromorfa ha un polo semplice nell'origine dovuto al polinomio di primo grado z a denominatore unitamente all'insieme di poli semplici $\{z_k = (2k+1)i\pi\}_{k\in\mathbb{Z}}$, che sono le soluzioni dell'equazione

$$e^{z_k} + 1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad e^{z_k} = -1 = e^{(2k+1)i\pi}\,, \qquad\qquad \forall\, k \in \mathbb{Z}\,.$$

I residui, ovvero i coefficienti -1 delle serie di Laurent centrate nell'origine, D_{-1}, e, $\left\{C_{-1}^{(k)}\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$, nei poli dell'insieme $\{z_k = (2k+1)i\pi\}_{k\in\mathbb{Z}}$ sono

$$\begin{aligned} D_{-1} &= \mathrm{Res}\left[\frac{1}{z\,(e^z+1)}, z = 0\right] = \lim_{z\to 0} \frac{z}{z\,(e^z+1)} = \frac{1}{2}\,, \\ C_{-1}^{(k)} &= \mathrm{Res}\left[\frac{1}{z\,(e^z+1)}, z = z_k\right] = \lim_{z\to z_k} \frac{z - z_k}{z\,(e^z+1)} = -\frac{1}{z_k} = \frac{i}{(2k+1)\pi}\,, \qquad\qquad \forall\, k \in \mathbb{Z}\,. \end{aligned}$$

Lo sviluppo di Mittag-Leffler è

$$g(z) = \phi(z) + \frac{D_{-1}}{z} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{C_{-1}^{(k)}}{z - z_k} = \phi(z) + \frac{1}{2z} + \frac{i}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)(z - (2k+1)i\pi)}\,,$$

dove la funzione $\phi(z)$ è la parte intera della funzione $g(z)$ e ha lo stesso comportamento asintomatico, cioè

$$\lim_{k\to\infty} g(w_k) = \lim_{k\to\infty} \phi(w_k)\,,$$

dove $\{w_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}\setminus\left(\{z_k = (2k+1)i\pi\}_{k\in\mathbb{Z}} \cup \{0\}\right)$ è una successione avente intersezione vuota con l'insieme dei poli e che si accumula all'infinito, ovvero tele che

$$\lim_{k\to\infty} w_k = \infty\,.$$

Il comportamento asintomatico è regolare. Consideriamo i due casi: $\{w_k\}_{k=1}^{\infty} \cap \{z = iy\,, y \in \mathbb{R}\} = \varnothing$ e $\{w_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \{z = iy\,, y \in \mathbb{R}\}$, ovvero, nel primo caso la successione non interseca l'asse immaginario, mentre nel secondo ne è sottoinsieme. Quindi, nel primo caso, cioè se $\{w_k\}_{k=1}^{\infty} \cap \{z = iy\,, y \in \mathbb{R}\} = \varnothing$, al divergere di $k \to \infty$ il modulo di w_k diverge ad infinito e la sua parte reale, che non può essere nulla, tende a $+\infty$ o a $-\infty$, allora, $\forall\, k \in \mathbb{N}$,

$$|g(w_k)| = \frac{1}{|w_k|\,|e^{w_k} + 1|} \le \frac{1}{|w_k|\,\left|e^{\mathrm{Re}(w_k)} - 1\right|} \underset{k\to\infty}{\sim} \begin{cases} |w_k|^{-1} e^{-\mathrm{Re}(w_k)} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 & \mathrm{Re}(w_k) > 0 \\ |w_k|^{-1} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 & \mathrm{Re}(w_k) < 0 \end{cases}.$$

Nel secondo caso si ha $\mathrm{Re}(w_k) = 0$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$, ne consegue che, al divergere di $k \to \infty$, il modulo $|w_k|$ diverge e la parte immaginaria tende a $+\infty$ o a $-\infty$ non passando per i poli dell'insieme $\{z_k = (2k+1)i\pi\}_{k\in\mathbb{Z}}$, questo implica che $|e^{w_k} + 1| > 0$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$. Indicando con

$$\mu = \min_{k\in\mathbb{N}} \{|e^{w_k} + 1|\} \in (0, \infty)$$

il minimo $|e^{w_k}+1|$, $\forall\, k\in\mathbb{N}$, si ha

$$|g(w_k)| = \frac{1}{|w_k|\,|e^{w_k}+1|} \le \frac{1}{|w_k|\mu} \underset{k\to\infty}{\sim} \mu^{-1}|w_k|^{-1} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

Ne consegue che la parte intera $\phi(z)$ della funzione $g(z)$ è costante, ne indichiamo il valore con ϕ_0, avremo

$$g(z) = \phi_0 + \frac{1}{2z} + \frac{i}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)\,(z-(2k+1)i\pi)}\,.$$

Per ottenere il valore di ϕ_0, sfruttiamo il valore nell'origine non della funzione, che ha in quel punto un polo semplice, bensì della funzione privata del suddetto polo, cioè della differenza $g(z)-1/(2z)$. Infatti si ha

$$\lim_{z\to 0}\left(g(z)-\frac{1}{2z}\right) = \lim_{z\to 0}\left(\frac{1}{z\,(e^z+1)}-\frac{1}{2z}\right) = \lim_{z\to 0}\frac{1-e^z}{2z\,(e^z+1)} = -\frac{1}{4}\,,$$

che usato nell'espansione di Mittag-Leffler dà

$$-\frac{1}{4} = \lim_{z\to 0}\left(g(z)-\frac{1}{2z}\right) = \phi_0 + \frac{i}{\pi}\lim_{z\to 0}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)\,(z-(2k+1)i\pi)} = \phi_0 - \frac{1}{\pi^2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\,,$$

risolvendo per ϕ_0

$$\phi_0 = \frac{1}{\pi^2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} - \frac{1}{4}\,.$$

La somma della serie degli inversi dei quadrati dei numeri dispari si ottiene usando il metodo dei residui, cioè, definiamo la funzione $f(z)$, tale che

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)\,,$$

quindi $f(z)=1/(2z+1)^2$ e studiamo gli integrali

$$J_n = \frac{1}{2i\pi}\oint_{|z|=n+1/2}\frac{\pi\cos(z\pi)}{\operatorname{sen}(z\pi)}f(z)dz\,, \qquad \forall\, n\in\mathbb{Z}\,.$$

La funzione integranda ha poli semplici in $z=k$, $\forall\, k\in\mathbb{Z}$, dovuti alla funzione seno a denominatore e un polo doppio in $z=-1/2$ dato dalla funzione $f(z)$, quindi, l'n-esimo integrale, sulla circonferenza centrata nell'origine di raggio $(n+1/2)$,

$$J_n = \sum_{k=-n}^{n}\operatorname{Res}\left[\frac{\pi\cos(z\pi)}{\operatorname{sen}(z\pi)}f(z), z=k\right] + \operatorname{Res}\left[\frac{\pi\cos(z\pi)}{\operatorname{sen}(z\pi)}f(z), z=-\frac{1}{2}\right], \qquad \forall\, n\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}\,.$$

I residui sono

$$\operatorname{Res}\left[\frac{\pi\cos(z\pi)}{\operatorname{sen}(z\pi)}f(z), z=k\right] = f(k) = \frac{1}{(2k+1)^2}\,, \qquad \forall\, k\in\mathbb{Z}\,,$$
$$\operatorname{Res}\left[\frac{\pi\cos(z\pi)}{\operatorname{sen}(z\pi)}f(z), z=-\frac{1}{2}\right] = \operatorname{Res}\left[\frac{\pi\cos(z\pi)}{\operatorname{sen}(z\pi)}\frac{1}{4(z+1/2)^2}, z=-\frac{1}{2}\right] = \frac{\pi}{4}\frac{d}{dz}\frac{\cos(\pi z)}{\operatorname{sen}(\pi z)}\bigg|_{z=-1/2} = -\frac{\pi^2}{4}\,.$$

Nel limite $n\to\infty$

$$|J_n| = \frac{1}{2\pi}\left|\oint_{|z|=n+1/2}\frac{\pi\cos(z\pi)}{\operatorname{sen}(z\pi)}f(z)dz\right| \le \frac{1}{2}\oint_{|z|=n+1/2}\left|\frac{\cos(z\pi)}{\operatorname{sen}(z\pi)}\right|\frac{|dz|}{|2z+1|^2} \le \frac{1}{2}M\frac{2\pi(n+1/2)}{(2(n+1/2)-1)^2}\,,$$

dove

$$M = \max_{|z|=n+1/2}\left\{\left|\frac{\cos(z\pi)}{\operatorname{sen}(z\pi)}\right|\right\} \in (0,\infty)\,,$$

è strettamente minore di infinto, poiché il denominatore si annulla e quindi il modulo diverge solo per valori reali e relativi di z, cioè tali che $z \in \mathbb{Z}$, ma sulla circonferenza d'integrazione gli unici valori reali che z può assumere sono $z = \pm(n + 1/2) \in \mathbb{Z}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. La limitazione del modulo dell'integrale J_n è

$$|J_n| \le \pi M \frac{(n+1/2)}{4n^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

L'identità tra i limiti della successione degli integrali $\{J_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, convergente a zero, e quella delle loro espressioni in termini del teorema dei residui

$$0 = \lim_{n\to\infty} J_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} \operatorname{Res}\left[\frac{\pi\cos(\pi z)}{\operatorname{sen}(\pi z)}, z = k\right] + \operatorname{Res}\left[\frac{\pi\cos(\pi z)}{\operatorname{sen}(\pi z)}, z = -\frac{1}{2}\right],$$

dà la somma della serie

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \operatorname{Res}\left[\frac{\pi\cos(\pi z)}{\operatorname{sen}(\pi z)}, z = k\right] = -\operatorname{Res}\left[\frac{\pi\cos(\pi z)}{\operatorname{sen}(\pi z)}, z = -\frac{1}{2}\right]$$
$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{4}\,.$$

Alla luce di questo risultato si ha che il valore cotante della parte intera ϕ_0 è nullo, infatti

$$\phi_0 = \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{\pi^2}\frac{\pi^2}{4} - \frac{1}{4} = 0,$$

quindi l'espansione di Mittag-Leffler completa è

$$g(z) = \frac{1}{2z} + \frac{i}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)(z-(2k+1)i\pi)}\,.$$

Separando la serie negli intervalli per $k < 0$ e $k > 0$, facendo il cambiamento di indice $k' = -k-1$, nella prima serie, si ha

$$\begin{aligned} g(z) &= \frac{1}{2z} + \frac{i}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{1}{(2k+1)(z-(2k+1)i\pi)} + \frac{i}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)(z-(2k+1)i\pi)}\,. \\ &= \frac{1}{2z} - \frac{i}{\pi} \sum_{k'=0}^{\infty} \frac{1}{(2k'+1)(z+(2k'+1)i\pi)} + \frac{i}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)(z-(2k+1)i\pi)}\,, \end{aligned}$$

che può essere posta nella forma finale

$$g(z) = \frac{1}{2z} - 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z^2 + (2k+1)^2\pi^2}\,.$$

Terzo problema (punteggio massimo: 6/30)

Si calcoli l'integrale

$$= \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(\beta) e^{\operatorname{sen}(\beta)} d\beta\,.$$

Utilità. Il risultato è una serie numerica.

Curiosità. Il simbolo  descrive l'accoppiamento di quattro campi *gluonici* della cromodinamica quantistica. Per maggiori dettagli si veda quanto scritto nella voce **Curiosità** del primo problema.

Soluzione del terzo problema

Con la sostituzione $z = e^{i\beta}$, l'integrale è calcolato nel piano complesso, il percorso di integrazione è la circonferenza unitaria, si ha

$$= -\frac{1}{2}\oint_{|z|=1}\left(z-\frac{1}{z}\right)e^{\frac{z}{2i}}\,e^{-\frac{1}{2iz}}\,\frac{dz}{z} = -\frac{1}{2}\oint_{|z|=1}\left(1-\frac{1}{z^2}\right)e^{\frac{z}{2i}}\,e^{-\frac{1}{2iz}}\,dz\,.$$

La funzione integranda ha, al finito, solo una singolarità essenziale nell'origine, quindi

$$= 2i\pi\,\mathrm{Res}\left[-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{z^2}\right)e^{\frac{z}{2i}}\,e^{-\frac{1}{2iz}}, z=0\right] = -i\pi\,\mathrm{Res}\left[\left(1-\frac{1}{z^2}\right)e^{\frac{z}{2i}}\,e^{-\frac{1}{2iz}}, z=0\right].$$

Calcoliamo il residuo come il coefficiente "-1" della serie Laurent centrata nell'origine e convergente in un intorno di essa. Usiamo la serie di Taylor della funzione esponenziale, si ha

$$\begin{aligned}
\left(1-\frac{1}{z^2}\right)e^{\frac{z}{2i}}\,e^{-\frac{1}{2iz}} &= \left(1-\frac{1}{z^2}\right)\sum_{j,k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2i}\right)^{j+k}(-1)^k\frac{z^{j-k}}{j!k!}\\
&= \sum_{j,k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2i}\right)^{j+k}(-1)^k\frac{z^{j-k}}{j!k!} - \sum_{j,k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2i}\right)^{j+k}(-1)^k\frac{z^{j-k-2}}{j!k!}\,,\\
&= \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m z^m
\end{aligned}$$

In coefficiente C_{-1} è

$$C_{-1} = \sum_{j,k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2i}\right)^{j+k}(-1)^k\frac{\delta_{j-k,-1}}{j!k!} - \sum_{j,k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2i}\right)^{j+k}(-1)^k\frac{\delta_{j-k-2,-1}}{j!k!}\,,$$

sfruttando le delta di Kronecker, nella prima serie poniamo $k = j+1$ e consideriamo la sola serie in j, nella seconda, invece, poniamo $j = k+1$ e consideriamo la sola serie in k, si ha

$$\begin{aligned}
C_{-1} &= \sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2i}\right)^{2j+1}(-1)^{j+1}\frac{1}{j!(j+1)!} - \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2i}\right)^{2k+1}(-1)^k\frac{1}{(k+1)!k!}\,,\\
&= -2\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2i}\right)^{2j+1}(-1)^j\frac{1}{j!(j+1)!} = i\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2i}\right)^{2j}(-1)^j\frac{1}{j!(j+1)!}\\
&= i\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{4^j}\frac{1}{j!(j+1)!}\,,
\end{aligned}$$

Questo è il residuo cercato, cioè

$$\mathrm{Res}\left[\left(1-\frac{1}{z^2}\right)e^{\frac{z}{2i}}\,e^{-\frac{1}{2iz}}, z=0\right] = i\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{4^j}\frac{1}{j!(j+1)!}\,,$$

quindi il valore dell'integrale è

$$= \pi\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{4^j}\frac{1}{j!(j+1)!}\,.$$

Quarto problema (punteggio massimo: 5/30)

L'operatore

$$\hat{A} = \sum_{j=1}^{3} \rho_j \hat{\sigma}_j \,, \qquad \vec{\rho} = (\rho_1, \rho_2, \rho_3) \in \mathbb{R}^3 \,,$$

definito nello spazio vettoriale bidimensionale E_2 come combinazione lineare reale degli operatori di Pauli, elementi dell'insieme $\left\{\hat{\sigma}_j\right\}_{j=1}^{3}$, verifica le equazioni agli autovalori

$$\hat{A}|a_k\rangle = \alpha_k |a_k\rangle \,, \qquad k \in \{1,2\} \,,$$

dove $\{|a_k\rangle\}_{k=1}^{2}$ e $\{\alpha_k\}_{k=1}^{2}$ sono gli insiemi degli autovettori e degli autovalori. Si determini l'operatore $\hat{B}$ avente come insiemi di autovettori e autovalori: $\{|b_k\rangle = |a_k\rangle\}_{k=1}^{2}$ e $\{\beta_k = \cos(\alpha_k)\}_{k=1}^{2}$, per cui le equazioni agli autovalori sono

$$\hat{B}|b_k\rangle = \hat{B}|a_k\rangle = \beta_k |b_k\rangle = \cos(\alpha_k)\,|a_k\rangle \,, \qquad k \in \{1,2\} \,.$$

Soluzione del quarto problema

Poiché gli operatori di Pauli sono hermitiani e il vettore $\vec{\rho}$ è reale, cioè $\vec{\rho} \in \mathbb{R}^3$, l'operatore $\hat{A}$ è hermitiano, quindi è normale e verifica il teorema spettrale. Gli autovettori costituiscono un insieme ortonormale, con essi si definiscono i proiettori ortogonali che, combinati con gli autovalori corrispondenti, danno la rappresentazione spettrale dell'opertatore

$$\hat{A} = \alpha_1 |a_1\rangle\langle a_1| + \alpha_2 |a_2\rangle\langle a_2| \,,$$

dove gli operatori $|a_1\rangle\langle a_1|$ e $|a_2\rangle\langle a_2|$ sono i suddetti proiettori ortogonali tali, inoltre, da coprire tutto lo spazio E_2, ovvero verificano la relazione di completezza

$$|a_1\rangle\langle a_1| + |a_2\rangle\langle a_2| = \hat{I} \,.$$

L'operatore $\hat{B}$, avendo gli stessi autovettori dell'operatore $\hat{A}$ e l'insieme di autovalori $\{\beta_k = \cos(\alpha_k)\}_{k=1}^{2}$, ha la rappresentazione spettrale

$$\hat{B} = \cos(\alpha_1)\,|a_1\rangle\langle a_1| + \cos(\alpha_2)\,|a_2\rangle\langle a_2| \,,$$

possiamo definirlo come $\hat{B} = \widehat{\cos}\big(\hat{A}\big)$, cioè come l'operatore che si ottiene valutando la funzione seno sull'operatore $\hat{A}$. I due operatori hanno per ipotesi gli stessi autovettori sono quindi diagonalizzabili simultaneamente.
Per ottenere l'espressione dell'operatore $\hat{B}$, usiamo la serie di Taylor della funzione coseno

$$\hat{B} = \widehat{\cos}\big(\hat{A}\big) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} \hat{A}^{2m} \,.$$

Sfruttando la definizione dell'operatore $\hat{A}$ in termini degli operatori di Pauli, cerchiamo un'espressione semplificata delle sue potenze pari. Calcoliamo il quadrato, usando l'algebra degli operatori di Pauli, si ha

$$\hat{A}^2 = \sum_{j,l=1}^{3} \rho_j \rho_l \hat{\sigma}_j \hat{\sigma}_l = \sum_{j,l=1}^{3} \rho_j \rho_l \left(\delta_{jl} \hat{I} + i \epsilon_{jln} \hat{\sigma}_n\right) = \vec{\rho}^{\,2} \hat{I} \,.$$

Ne consegue che tutte le potenze pari sono proporzionali all'operatore identità, infatti, $\forall\, n \in N$,

$$\hat{A}^{2n} = \left(\vec{\rho}^{\,2} \hat{I}\right)^n = \left(\vec{\rho}^{\,2}\right)^n \hat{I} \,.$$

Sostituendo questo risultato nella serie che definisce l'operatore $\hat{B}$, si ottiene l'espressione cercata

$$\hat{B} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} \hat{A}^{2m} = \hat{I} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} \vec{\rho}^{\,2m} = \cos\left(\sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2}\right) \hat{I} \,.$$

L'operatore $\hat{B}$ è proporzionale all'operatore identità, quindi verifica la condizione di diagonalizzabilità simultanea con ogni altro operatore, poiché ogni vettore dello spazio vettoriale E_2 è suo autovettore rispetto allo stesso autovalore $\cos\left(\sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2}\right)$, cioè, $\forall\, |v\rangle \in E_2$,

$$\hat{B}|v\rangle = \cos\left(\sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2}\right) \hat{I} |v\rangle = \cos\left(\sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2}\right) |v\rangle \,.$$

QUINTO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

L'operatore $\hat{S}$ è definito nello spazio di Hilbert E_{2N} a $2N$ dimensioni, con $N \in \mathbb{N}$. Sono note le azioni dell'operatore

$$\langle e_j|\hat{S} = \langle e_j| + \langle e_{2N+1-j}|\,, \qquad \forall\, j \in \{1,2,\ldots,2N\}\,,$$

dove $\{|e_j\rangle\}_{j=1}^{2N} \subset E_{2N}$ è una base ortonormale dello spazio vettoriale E_{2N}.
Si determinino lo spettro discreto e l'insieme di autovettori dell'operatore $\hat{S}$.

SOLUZIONE DEL QUINTO PROBLEMA

Gli elementi della matrice S $2N \times 2N$ che rappresenta l'operatore rispetto alla base ortonormale data, cioè $\hat{S} \overset{e}{\longleftrightarrow} S$, sono

$$S^j_{\ k} = \langle e_j|\hat{S}|e_k\rangle = \big(\langle e_j| + \langle e_{2N+1-j}|\big)|e_k\rangle = \langle e_j|e_k\rangle + \langle e_{2N+1-j}|e_k\rangle = \delta^j_k + \delta^j_{2N+1-j}\,, \qquad \forall\, j,k \in \{1,2,\ldots,2N\}\,.$$

La matrice S è la somma della matrice identità $2N \times 2N$ e la matrice $2N \times 2N$ che elementi non nulli e uguali all'unità solo lungo la seconda diagonale, si ha

$$\hat{S} \ \overset{e}{\longleftrightarrow}\ S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & \iddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \iddots & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le $2N$ equazioni agli autovalori sono

$$\hat{S}|v_j\rangle = \sigma_j|v_j\rangle\,, \qquad j \in \{1,2,\ldots,2N\}\,,$$

in forma matriciale

$$\hat{S}|v_j\rangle \ \overset{e}{\longleftrightarrow}\ Sv_j = \sigma_j v_j \ \overset{e}{\hookrightarrow}\ \sigma_j|v_j\rangle\,,$$

la k-esima riga dell'identità matriciale

$$S^k_{\ m} v^m_{(j)} = \sigma_j v^k_{(j)}\,, \qquad \forall\, k,j \in \{1,2,\ldots,2N\}\,,$$

dove $v^m_{(j)}$ è la m-esima componente contro-variante del j-esimo autovettore rispetto alla base ortonormale data. Usando la definizione della matrice S le equazioni precedenti diventano

$$S^k_{\ m} v^m_{(j)} = \big(\delta^k_m + \delta^k_{2N+1-m}\big) v^m_{(j)} = v^k_{(j)} + v^{2N+1-k}_{(j)} = \sigma_j v^k_{(j)}\,, \qquad \forall\, k,j \in \{1,2,\ldots,2N\}\,,$$

si hanno N coppie di equazioni indipendenti, cioè

$$\begin{cases} v^k_{(j)} + v^{2N+1-k}_{(j)} = \sigma_j v^k_{(j)} \\[2ex] v^k_{(j)} + v^{2N+1-k}_{(j)} = \sigma_j v^{2N+1-k}_{(j)} \end{cases}, \qquad \forall\, k \in \{1,2,\ldots,N\}\,, \quad j = k, 2N+1-k\,,$$

questo sistema 2×2 definisce i due autovalori e i due autovettori con indici k e $2N+1-k$, con $k \in \{1,2,\ldots,N\}$. I vettori che rappresentano gli autovettori hanno solo due componenti non nulle quelle determinate dal sistema sopra indicato. La versione matriciale del k-esimo sistema è

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v^k_{(j)} \\ v^{2N+1-k}_{(j)} \end{pmatrix} = \sigma_j \begin{pmatrix} v^k_{(j)} \\ v^{2N+1-k}_{(j)} \end{pmatrix}, \qquad \forall\, k \in \{1,2,\ldots,N\}\,, \quad j = k, 2N+1-k\,,$$

gli autovalori sono le soluzioni dell'equazione secolare

$$\det\begin{pmatrix} 1-\sigma_j & 1 \\ 1 & 1-\sigma_j \end{pmatrix} = 0$$
$$(1-\sigma_j)^2 - 1 = 0\,,$$

da cui si hanno gli autovalori $\sigma_k = 0$, $\sigma_{2N+1-k} = 2$. Le componenti degli autovettori sono le soluzioni dei sistemi

$$\begin{pmatrix} 1-\sigma_k & 1 \\ 1 & 1-\sigma_k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v^k_{(k)} \\ v^{2N+1-k}_{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v^k_{(k)} \\ v^{2N+1-k}_{(k)} \end{pmatrix} = 0\,,$$
$$\begin{pmatrix} 1-\sigma_{2N+1-k} & 1 \\ 1 & 1-\sigma_{2N+1-k} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v^k_{(2N+1-k)} \\ v^{2N+1-k}_{(2N+1-k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v^k_{(2N+1-k)} \\ v^{2N+1-k}_{(2N+1-k)} \end{pmatrix} = 0\,, \qquad \forall\,, k \in \{1,2,\dots,N\}\,,$$

da cui le componenti contro-varianti

$$v^k_{(k)} = -v^{2N+1-k}_{(k)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,, \qquad v^k_{(2N+1-k)} = v^{2N+1-k}_{(2N+1-k)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,, \qquad \forall\,, k \in \{1,2,\dots,N\}\,.$$

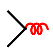
In definitiva, le N coppie di vettori $2N \times 1$ sono

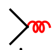
$$v_k = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow k\text{-esima riga} \\ \\ \\ \\ \leftarrow (2N+1-k)\text{-esima riga} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\,, \quad v_{2N+1-k} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow k\text{-esima riga} \\ \\ \\ \\ \leftarrow (2N+1-k)\text{-esima riga} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\,,$$

che corrispondono rispettivamente agli autovalori $\sigma_k = 0$ e $\sigma_{2N+1-k} = 2$, con $k \in \{1,2,\dots,0\}$.

Sesto problema (punteggio massimo: 6/30)

Avvalendosi del teorema di Plancherel, che si assume valido anche per le funzioni trigonometriche seppur non a quadrato sommabili in $\mathbb{R}$, si calcoli l'integrale

 $$= \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sen}^4(u) e^{-u^2} du\,.$$

Curiosità. Nell'ambito della della cromodinamica quantistica, il simbolo  descrive l'accoppiamento di due campi dei *quark*, rappresentati dai segmenti rettilinei neri e un campo *gluonico*, rappresentato dal ricciolo rosso. Per maggiori dettagli si veda quanto scritto nella voce **Curiosità** del primo problema.

Soluzione del sesto Problema

La tesi del teorema di Plancherel che vorremmo usare è quella dell'equazione di Parseval, che afferma l'identità tra i prodotti scalari di coppie di funzioni e delle loro trasformate di Fourier, ovvero, $\forall\, f_1(x), f_2(x) \in L^2(\mathbb{R})$,

$$(f_1, f_2) = (\mathscr{F}_k[f_1], \mathscr{F}_k[f_2])\,,$$

con le trasformate di Fourier, ottenute come limiti in media, che sottintendiamo mantenendo la scrittura classica,

$$\mathscr{F}_k[f_j] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f_j(x) e^{-ikx} dx\,, \qquad j = 1, 2\,,$$

mentre il prodotto scalare è definito come

$$(f_1, f_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1^*(x) f_2(x) dx \, .$$

Le funzioni date dal problema sono la quarta potenza della funzione seno e la funzione gaussiana,

$$f_1(u) = \operatorname{sen}^4(u) \, , \qquad f_2(u) = e^{-u^2} \, .$$

Riscriviamo la prima come combinazione di funzioni coseno valuta su multipli pari dell'argomento originale, u, usando due volte la formula di bisezione, si ha

$$f_1(u) = \operatorname{sen}^4(u) = \left(\operatorname{sen}^2(u)\right)^2 = \left(\frac{\cos(2u) - 1}{2}\right)^2 = \frac{\cos^2(2u) - 2\cos(2u) + 1}{4} = \frac{\cos(4u) - 4\cos(2u) + 3}{8} \, .$$

Alla luce di questo risultato e usando il valore noto dell'integrale della funzione gaussiana, l'integrale $\succ\!\!\varpi$ diventa

$$\begin{aligned} \succ\!\!\varpi &= \frac{1}{8}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \cos(4u) e^{-u^2} du - 4\int_{-\infty}^{\infty} \cos(2u) e^{-u^2} du + 3\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du\right) \\ &= \frac{1}{8}\left(\cos(4u), e^{-u^2}\right) - \frac{1}{2}\left(\cos(2u), e^{-u^2}\right) + \frac{3}{8}\sqrt{\pi} \, , \end{aligned}$$

che con il teorema di Plancherel, ovvero in termini dei prodotti scalari delle trasformate di Fourier, diventa

$$\succ\!\!\varpi = \frac{1}{8}\left(\mathscr{F}_k[\cos(4u)], \mathscr{F}_k\left[e^{-u^2}\right]\right) - \frac{1}{2}\left(\mathscr{F}_k[\cos(2u)], \mathscr{F}_k\left[e^{-u^2}\right]\right) + \frac{3}{8}\sqrt{\pi} \, .$$

La trasformata di Fourier della funzione coseno di variabile αu, con $\alpha \in (0, \infty)$ è

$$\mathscr{F}_k[\cos(\alpha u)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\alpha u) e^{-iuk} du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-iu(k-\alpha)} + e^{-iu(k+\alpha)}}{2} du = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\delta(k-\alpha) + \delta(k+\alpha)\right) \, .$$

La ben nota trasformata di Fourier della funzione gaussiana è

$$\mathscr{F}_k\left[e^{-u^2}\right] = \frac{e^{-k^2/4}}{\sqrt{2}} \, .$$

I due prodotti scalari delle trasformate di Fourier che compaiono nell'espressione dell'integrale cercato sono

$$\begin{aligned} \left(\mathscr{F}_k[\cos(4u)], \mathscr{F}_k\left[e^{-u^2}\right]\right) &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\delta(k-4) + \delta(k+4)\right) e^{-k^2/4} dk = \sqrt{\pi}\, e^{-4} \, , \\ \left(\mathscr{F}_k[\cos(2u)], \mathscr{F}_k\left[e^{-u^2}\right]\right) &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\delta(k-2) + \delta(k+2)\right) e^{-k^2/4} dk = \sqrt{\pi}\, e^{-1} \, . \end{aligned}$$

Infine, l'integrale cercato vale

$$\succ\!\!\varpi = \frac{\sqrt{\pi}}{8}\left(\frac{1}{e^4} - \frac{4}{e} + 3\right) .$$