Metodi Matematici per la Fisica

Terzo appello estivo - 24 luglio 2023

Si risolvano cortesemente i seguenti problemi, sapendo che il punteggio assegnato a ciascuna procedura di risoluzione può variare tra lo zero e il massimo indicato ed è stabilito valutando:

1. la correttezza del risultato ottenuto e della procedura utilizzata;
2. la completezza dei passaggi riportati;
3. il livello di esemplificazione con cui sono espressi i risultati (ad esempio un risultato numerico reale non deve contenere l'unità immaginaria);
4. la correttezza del formalismo utilizzato;
5. la chiarezza dell'esposizione e la leggibilità del testo.

Primo problema (punteggio massimo: 6/30)

Si calcoli l'integrale

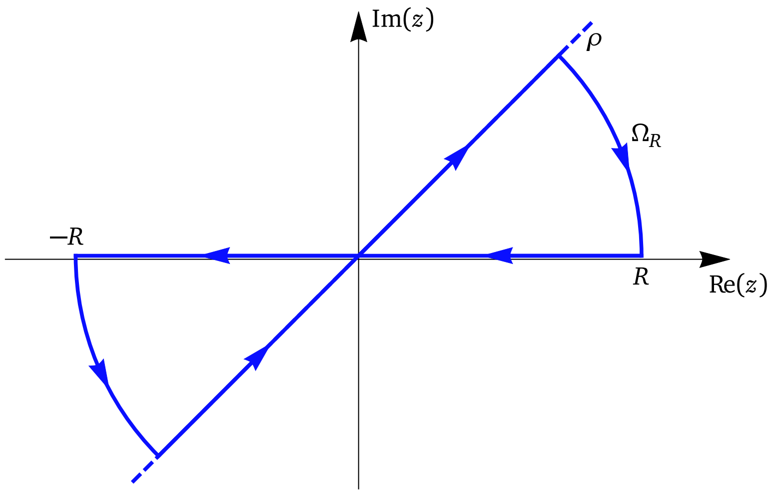
🐝 $$= \int_\rho \frac{dz}{\cosh^3(z)}\,,$$

dove ρ è la prima bisettrice del piano complesso, ovvero: $\rho = \left\{z : z = re^{i\pi/4}, r \in \mathbb{R}\right\}$.

Soluzione del primo problema

Consideriamo il percorso chiuso Ω_R mostrato in figura e dato dall'unione di due segmenti di retta, uno reale $(-[-R,R])$ e uno appartenente alla prima bisettrice ρ e due archi centrati nell'origine di raggio R, che sottendono rispettivamente gli angoli da 0 a $\pi/4$ e da π a $5\pi/4$, ovvero

$$\Omega_R = \left\{z : z = re^{i\pi/4}, r \in [-R,R]\right\} \cup \left(-\left\{z : z = Re^{i\theta}, \theta \in [0,\pi/4]\right\}\right) \cup (-[-R,R]) \cup \left\{z : z = Re^{i\theta}, \theta \in [\pi, 5\pi/4]\right\} .$$



La funzione integranda è meromorfa, ha un'infinità di poli tripli nei punti dell'insieme $\{z_k = (2k+1)i\pi/2\}_{k\in\mathbb{Z}}$. Ne consegue che, grazie al teorema di Cauchy, si ha

$$\oint_{\Omega_R} \frac{dz}{\cosh^3(z)} = 0\,,$$

$\forall\, R>0$, poiché il percorso chiuso Ω_R non avvolge alcuna singolarità della funzione integranda, tutte appartenenti all'asse immaginario e non nulle. Lo stesso risultato si ottiene nel limite $R \to \infty$. Considerando separatamente i contributi sui tratti rettilinei e sugli archi di Ω_R si ha

$$0 = \lim_{R\to\infty} \oint_{\Omega_R} \frac{dz}{\cosh^3(z)} = \text{🐝} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\cosh^3(x)} + \lim_{R\to\infty}\left(-\int_{\gamma_R^I} \frac{dz}{\cosh^3(z)} + \int_{\gamma_R^{III}} \frac{dz}{\cosh^3(z)} + \right),$$

dove $\gamma_R^{I(III)}$ indica l'arco appartenente al primo (terzo) quadrante. Dimostriamo che i due integrali sugli archi sono infinitesimi nel limite di raggio divergente. A tal fine, è sufficiente verificare i limiti uniformi

$$\lim_{R\to\infty} \frac{z}{\cosh^3(z)} \overset{\text{U.}}{=} 0\,,$$

su entrambi gli archi γ_R^I e γ_R^{III} . Il modulo dalla funzione limite, ovvero la funzione integranda moltiplicata per la stessa z, sugli archi γ_R^I e γ_R^{III}, con $z = Re^{i\theta}$ e rispettivamente $\theta \in [0, \pi/4]$ o $\theta \in [\pi, 5\pi/4]$, il che implica per il coseno le limitazioni: $\cos(\theta) \in [1/\sqrt{2}, 1]$ e $\cos(\theta) \in [-1, -1/\sqrt{2}]$, verifica la disuguaglianza

$$0 \le \left| \frac{z}{\cosh^3(z)} \right| \le 8 \frac{R}{\left| e^{R\cos(\theta)} - e^{-R\cos(\theta)} \right|^3}\,,$$

nei due casi, al divergere del raggio si hanno

$$\left| \frac{z}{\cosh^3(z)} \right| \le 8 \frac{R}{\left| e^{R\cos(\theta)} - e^{-R\cos(\theta)} \right|^3} \xrightarrow[R\to\infty]{} \begin{cases} \sim 8R\,e^{-3R\cos(\theta)} = 8R\,e^{-3R|\cos(\theta)|} \to 0 & \theta \in [0, \pi/4] \\ \sim 8R\,e^{3R\cos(\theta)} = 8R\,e^{-3R|\cos(\theta)|} \to 0 & \theta \in [\pi, 5\pi/4] \end{cases}.$$

Alla luce di questo risultato si ha il valore limite

$$0 = \lim_{R\to\infty} \oint_{\Omega_R} \frac{dz}{\cosh^3(z)} = \text{🐝} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\cosh^3(x)}\,,$$

da cui, per l'integrale cercato,

$$\text{🐝} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\cosh^3(x)}\,,$$

ovvero, esso coincide con l'integrale della stessa funzione integranda sull'asse reale.
Consideriamo ora il percorso chiuso rettangolare

$$\Gamma_r = [-r, r] \cup [r, r+i\pi] \cup [r+i\pi, -r+i\pi] \cup [r+i\pi, -r]\,,$$

dove con il simbolo $[z_a, z_b]$ indichiamo il segmento della retta del piano complesso passante per i punti z_a e z_b, avente questi come estremi e orientato dal primo al secondo. Il percorso Γ_r avvolge una volta il polo triplo $z_0 = i\pi/2$ della funzione integranda, quindi, $\forall\, r>0$,

$$\oint_{\Gamma_r} \frac{dz}{\cosh^3(z)} = 2i\pi\,\mathrm{Res}\left[\frac{1}{\cosh^3(z)}, \frac{i\pi}{2} \right].$$

Lo stesso risultato si ottiene anche nel limite $r \to \infty$. Inoltre, considerando separatamente i quattro contributi rettilinei, si ha

$$\begin{aligned} 2i\pi\,\mathrm{Res}\left[\frac{1}{\cosh^3(z)}, \frac{i\pi}{2} \right] = \lim_{r\to\infty} \oint_{\Gamma_r} \frac{dz}{\cosh^3(z)} &= \text{🐝} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\cosh^3(x+i\pi)} \\ &+ \lim_{r\to\infty}\left(i\int_0^{\pi} \frac{dy}{\cosh^3(r+iy)} - i\int_0^{\pi} \frac{dy}{\cosh^3(-r+iy)} \right). \end{aligned}$$

Gli ultimi due integrali sono infinitesimi nel limite $r \to \infty$, infatti, usando la disuguaglianza di Darboux,

$$0 \le \left| \pm i \int_0^{\pi} \frac{dy}{\cosh^3(\pm r + iy)} \right| \le 8 \int_0^{\pi} \frac{dy}{\left| e^{\pm r + iy} + e^{\mp r - iy} \right|^3} \le 8 \int_0^{\pi} \frac{dy}{\left| e^{\pm r} - e^{\mp r} \right|^3} = \frac{8\pi}{\left| e^{\pm r} - e^{\mp r} \right|^3} \underset{r\to\infty}{\sim} 8\pi e^{-3r} \xrightarrow[r\to\infty]{} 0\,.$$

Con questo risultato e usando $\cosh(x+i\pi) = -\cosh(x)$, si arriva all'espressione

$$2i\pi \,\mathrm{Res}\left[\frac{1}{\cosh^3(z)}, \frac{i\pi}{2}\right] = \lim_{r\to\infty} \oint_{\Gamma_r} \frac{dz}{\cosh^3(z)} =$$  $$- \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\cosh^3(x+i\pi)} = 2$$  ,

ovvero

 $$= i\pi \,\mathrm{Res}\left[\frac{1}{\cosh^3(z)}, \frac{i\pi}{2}\right] = i\pi C_{-1}\,.$$

Otteniamo il residuo come il coefficiente C_{-1} della serie di Laurent centrata in $z_0 = i\pi/2$ e convergente nella prima corona, cioè $C_{0,\pi}(i\pi/2) = \{z : 0 < |z - i\pi/2| < \pi\}$. Per calcolarne il valore, usiamo la derivata seconda dell somma della serie geometrica di ragione α. Infatti, con $|\alpha| < 1$, si ha

$$\frac{1}{1-\alpha} = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j \;\rightarrow\; \frac{1}{2}\frac{d^2}{d\alpha^2}\frac{1}{1-\alpha} = \frac{1}{(1-\alpha)^3} = \frac{1}{2}\sum_{j=2}^{\infty} j(j-1)\alpha^{j-2} = \frac{2!}{2} + \frac{3!}{2}\alpha + \frac{4!}{2}\alpha^2 + \mathcal{O}\left(\alpha^3\right)$$
$$\frac{1}{(1-\alpha)^3} = 1 + 3\alpha + 12\alpha^2 + \mathcal{O}\left(\alpha^3\right).$$

La serie di Laurent centrata in $z_0 = i\pi/2$ della funzione integranda è

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\cosh^3(z)} &= \frac{1}{\cosh^3(z - i\pi/2 + i\pi/2)} = \frac{1}{(\cosh(z-i\pi/2)\cosh(i\pi/2) + \mathrm{senh}(z-i\pi/2)\,\mathrm{senh}(i\pi/2))^3} \\
&= \frac{1}{(i\,\mathrm{senh}(z-i\pi/2))^3} = \frac{i}{\mathrm{senh}^3(z-i\pi/2)} = i\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-i\pi/2)^{2k+1}}{(2k+1)!}\right)^{-3} \\
&= \frac{i}{(z-i\pi/2)^3}\,\frac{1}{[1 + (z-i\pi/2)^2/3! + (z-i\pi/2)^4/5! + \mathcal{O}((z-i\pi/2)^6)]^3} \\
&= \frac{i}{(z-i\pi/2)^3}\left\{1 - 3\left[\frac{1}{3!}\left(z-\frac{i\pi}{2}\right)^2 + \frac{1}{5!}\left(z-\frac{i\pi}{2}\right)^4 + \cdots\right]\right. \\
&\qquad \left. + 12\left[\frac{1}{3!}\left(z-\frac{i\pi}{2}\right)^2 + \frac{1}{5!}\left(z-\frac{i\pi}{2}\right)^4 + \cdots\right]^2 + \cdots\right\}.
\end{aligned}$$

Al coefficiente C_{-1} contribuisce solo il primo termine della prima parentesi quadra. In particolare, $\forall\, z \in C_{0,\pi}(i\pi/2)$,

$$\frac{1}{\cosh^3(z)} = \frac{i}{(z-i\pi/2)^3} + \frac{-3i/3!}{z-i\pi/2} + \cdots = \frac{i}{(z-i\pi/2)^3} + \frac{-i/2}{z-i\pi/2} + \cdots.$$

Ne consegue che i coefficienti della parte principale della serie di Laurent sono

$$C_{-3} = i\,, \qquad C_{-2} = 0\,, \qquad C_{-1} = -\frac{i}{2}\,.$$

L'ultimo risultato dà il valore dell'integrale cercato

 $$= i\pi C_{-1} = \frac{\pi}{2}\,.$$

Secondo problema (punteggio massimo: 6/30)

Dopo aver definito il dominio di convergenza nel piano complesso z della rappresentazione integrale

 $$(z) = \int_0^1 \frac{dt}{(\ln(t))^z}$$

della funzione  (z), se ne ottenga l'espressione contente esplicitamente la funzione gamma di Eulero $\Gamma(z)$, in questa forma, ovvero valutata in z.
Qual è il dominio di analiticità della funzione  (z)?

Soluzione del secondo problema

Procediamo con un cambiamento di variabile, potremmo scegliere $w = \ln(z)$, in questo caso, però, l'intervallo d'integrazione sarebbe la semiretta reale negativa $(-\infty, 0)$, per far sì, invece, che tale intervallo coincida con la più consueta semiretta reale positiva, usiamo $w = -\ln(z)$. L'integrale, posto: $\ln(z) = -w$, $z = e^{-w}$ e $dz = -e^{-w}dw$, diventa

$$\clubsuit(z) = \int_{\infty}^{0} \frac{-e^{-W}}{(-w)^z} dw = (-1)^{-z} \int_{0}^{\infty} e^{-w} w^{-z} dw \,.$$

La condizione di convergenza si ottiene richiedendo che la funzione integranda sia integrabile sulla semiretta reale positiva. Non ci sono singolarità per ogni $w \in (0, \infty)$. Inoltre, nel limite $w \to \infty$ si ha, $\forall\, z \in \mathbb{C}$,

$$e^{-w} w^{-z} = o\left(w^{-1}\right), \qquad w \to \infty \,,$$

si ha integrabilità in questo estremo. Nell'estremo inferiore, invece,

$$\left|e^{-w} w^{-z}\right| = \mathcal{O}\left(w^{-\operatorname{Re}(z)}\right), \qquad w \to 0^+ \,.$$

Si ha integrabilità per $w \to 0^+$ se, nello stesso limite, il modulo della funzione verifica la condizione: $\left|e^{-w} w^{-z}\right| = \mathcal{O}\left(w^{-\alpha}\right)$ con $\alpha > -1$, l'integranda può divergere ma non più rapidamente di w^{-1} per $w \to 0$. In definitiva, il dominio di convergenza della rappresentazione integrale data è $D = \{z : \operatorname{Re}(z) < 1\}$, il semipiano della parti reali minori dell'unità.

Seguendo il suggerimento, consideriamo la rappresentazione in forma di integrale di Eulero di secondo tipo della funzione gamma, cioè

$$\Gamma(u) = \int_{0}^{\infty} e^{-t} t^{u-1} dt \,,$$

convergente in $Q = \{u : \operatorname{Re}(u) > 0\}$. Confrontando questo integrale con la rappresentazione oggetto del problema, sommando e sottraendo l'unità a esponete della variabile d'integrazione w, per facilitare l'identificazione, abbiamo

$$\clubsuit(z) = (-1)^{-z} \int_{0}^{\infty} e^{-w} w^{-z+1-1} dw \,.$$

Nell'espressione ottenuta compare la funzione gamma ma non è valuta in z, bensì in $(1-z)$, al fine di arrivare, come richiesto all'espressione dipendente da $\Gamma(z)$, usiamo la formula di riflessione

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi z)} \,,$$

per ricavare il valore della funzione gamma in $(1-z)$ in funzione di $\Gamma(z)$, cioè

$$\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi z)\Gamma(z)} \,.$$

Usando questo risultato nel precedente si ha

$$\clubsuit(z) = (-1)^{-z}\Gamma(1-z) = (-1)^{-z} \frac{\pi}{\Gamma(z)\operatorname{sen}(\pi z)} \,,$$

che è l'espressione richiesta. Il dominio di analiticità della funzione $\clubsuit(z)$ si può dedurre da quello della funzione $\Gamma(z)$, che è $G = \mathbb{C} \setminus \{1-k\}_{k \in \mathbb{N}}$. Essendo $\clubsuit(z)$ proporzionale a $\Gamma(1-z)$ essa eredita tutti i poli semplici z_k, tali che: $1 - z_k = 1 - k$, da cui $z_k = k$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$. La funzione $\clubsuit(z)$ ha poli semplici nei naturali.

Terzo problema (punteggio massimo: 6/30)

Si definisca il dominio di convergenza nel piano complesso w della rappresentazione integrale

$$\Lock(w) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} u^w du \,.$$

Si calcoli l'espressione della funzione $\Lock(w)$ e si verifichi che la stessa funzione è intera, ovvero, che il dominio di analiticità coincide con il piano complesso $\mathbb{C}$.

Suggerimento. Anche in queso caso è utile la funzione gamma di Eulero.

Soluzione del terzo problema

La funzione gamma di Eulero, o meglio la sua rappresentazione in forma di integrale di Eulero del secondo tipo può essere sfruttata anche per ottenere il dominio di convergenza della rappresentazione data. A tal fine, scriviamo l'integrale come somma dei contributi relativi alle semiretta reale negativa e a quella positiva e facciamo il cambiamento di variabile $u' = -u$ nel primo integrale, avremo

$$\text{🔒}(w) = \int_{-\infty}^{0} e^{-u^2} u^w du + \int_0^{\infty} e^{-u^2} u^w du = (-1)^w \int_0^{\infty} e^{-u'^2} u'^w du' + \int_0^{\infty} e^{-u^2} u^w du\,.$$

Con gli ulteriori cambiamenti di variabile: $s = u'^2$ e $t = u^2$, rispettivamente nel primo e secondo integrale, si arriva a

$$\text{🔒}(w) = \frac{(-1)^w}{2} \int_0^{\infty} e^{-s} s^{(w-1)/2} ds + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{(w-1)/2} dt\,.$$

I due integrali così ottenuti hanno la forma dell'integrale di Eulero del secondo tipo, cioè della rappresentazione integrale della funzione gamma

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-r} r^{z-1} dr\,,$$

che ha $D = \{z : \mathrm{Re}(z) > 0\}$ come dominio di convergenza. Ne consegue che il dominio di convergenza della rappresentazione data è

$$G = \{w : \mathrm{Re}(w) > -1\}\,,$$

infatti la condizione di convergenze è $\mathrm{Re}(w-1)/2 > -1$, da cui $\mathrm{Re}(w) > -1$, per entrambi gli integrali.
Da quanto ottenuto, la funzione $\text{🔒}(w)$ può essere espressa in termini della funzione gamma di Eulero come

$$\boxed{\text{🔒}}(w) = \frac{(-1)^w + 1}{2} \Gamma\left(\frac{w+1}{2}\right).$$

La funzione $\Gamma(z)$ ha come uniche singolarità i poli semplici nei punti della successione $\{z_k = -k\}_{k=0}^{\infty}$ e i residui corrispondenti sono gli elementi della successione $\left\{(-1)^k/k!\right\}_{k=0}^{\infty}$. Quindi si hanno i limiti

$$\lim_{z \to z_k} \Gamma(z)(z - z_k) = \lim_{z \to -k} \Gamma(z)(z+k) = \frac{(-1)^k}{k!}\,, \qquad \forall\, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\,.$$

Ne consegue che la funzione $\Gamma((w+1)/2)$ ha poli semplici nei punti della successione $\{w_k = -(2k+1)\}_{k=0}^{\infty}$, gli opposti dei numeri dispari. I residui sono

$$\lim_{w \to w_k} \Gamma\left(\frac{w+1}{2}\right)(w - w_k) = \lim_{w \to -(2k+1)} \Gamma\left(\frac{w+1}{2}\right)(w + 2k + 1)\,,$$

con la sostituzione $a = (w+1)/2$ e $w = 2a - 1$,

$$\lim_{w \to w_k} \Gamma\left(\frac{w+1}{2}\right)(w - w_k) = 2 \lim_{a \to -k} \Gamma(a)(a+1) = 2\frac{(-1)^k}{k!}\,, \qquad \forall\, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\,.$$

La funzione $((-1)^w + 1)/2$, che moltiplicata per $\Gamma((w+1)/2)$ dà la funzione $\text{🔒}(w)$ ha zeri semplici nei punti della stessa successione $\{w_k = -(2k+1)\}_{k=0}^{\infty}$. Infatti, usando $-1 = e^{i\pi}$ e mettendo in evidenza $e^{i\pi w/2}$, si ha

$$\frac{(-1)^w + 1}{2} = \frac{e^{i\pi w} + 1}{2} = e^{i\pi w/2} \frac{e^{i\pi w/2} + e^{-i\pi w/2}}{2} = e^{i\pi w/2} \cos(\pi w/2) \underset{w \to w_k = -(2k+1)}{\longrightarrow} 0\,, \qquad \forall\, k \in \mathbb{Z}\,.$$

I residui della funzione $\text{🔒}(w)$ nei punti della successione $\{w_k = -(2k+1)\}_{k=0}^{\infty}$ sono

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}\left[\text{🔒}(w), w_k\right] &= \lim_{w \to w_k} \text{🔒}(w)(w - w_k) = \lim_{w \to w_k} e^{i\pi w/2} \cos(\pi w/2) \underbrace{\Gamma\left(\frac{w+1}{2}\right)(w - w_k)}_{\to 2(-1)^k/k!} \\ &= 2e^{-i\pi(k+1/2)} \frac{(-1)^k}{k!} \lim_{w \to w_k} \cos(\pi w/2) = \frac{2}{i(-1)^k} \frac{(-1)^k}{k!} \lim_{w \to w_k} \cos(\pi w/2)\,,\end{aligned}$$

come appena visto, il limite della funzione coseno è nullo, quindi

$$\operatorname{Res}\left[\text{🔒}(w), w_k\right] = \frac{-2i}{k!} \lim_{w \to w_k} \cos(\pi w/2) = 0\,, \qquad \forall\, k \in \mathbb{Z}\,.$$

Poiché i residui sono nulli, non essendoci altre singolarità al finito, la funzione 🔒(w) è intera.

Quarto problema (punteggio massimo: 6/30)

Si verifichi che non esiste una coppia di matrici 2×2 a elementi complessi avente commutatore non nullo e proporzionale all'identità. Ovvero, indicando con $M_{2\times 2}(\mathbb{C})$ lo spazio vettoriale a 4 dimensioni delle matrici 2×2 a elementi complessi, $\nexists A, B \in M_{2\times 2}(\mathbb{C})$, tale che: $[A, B] = \lambda I$, con $\lambda \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$ e $I = \operatorname{diag}(1, 1)$.
Suggerimento. L'uso della base costituita dalle matrici di Pauli e l'identità è di sicura utilità.

Soluzione del quarto problema

Seguendo il prezioso suggerimento, per la coppia generica di matrici $A, B \in M_{2\times 2}(\mathbb{C})$ si hanno le scomposizioni

$$A = a_0 I + \sum_{k=1}^{3} a_k \sigma_k\,, \qquad B = b_0 I + \sum_{k=1}^{3} b_k \sigma_k\,,$$

dove I è la matrice identità 2×2 e $\{\sigma_k\}_{k=1}^{3}$ è l'insieme delle matrici di Pauli. Le due quaterne di coefficienti, elementi degli insiemi $\{a_k\}_{k=0}^{3}, \{b_k\}_{k=0}^{3} \subset \mathbb{C}$, si ottengono dai prodotti scalari

$$a_0 = (I, A) = \frac{1}{2} \operatorname{Tr}(A)\,, \qquad a_j = (\sigma_j, A) = \frac{1}{2} \operatorname{Tr}\left(\sigma_j A\right),$$
$$b_0 = (I, B) = \frac{1}{2} \operatorname{Tr}(B)\,, \qquad b_j = (\sigma_j, B) = \frac{1}{2} \operatorname{Tr}\left(\sigma_j B\right).$$

Il commutatore delle matrici A e B, essendo lineare rispetto a entrambe le matrici, si riduce a una combinazione dei commutatori delle matrici di Pauli. Infatti

$$[A, B] = \left[a_0 I + \sum_{k=1}^{3} a_k \sigma_k, b_0 I + \sum_{j=1}^{3} b_j \sigma_j\right] = a_0 b_0 \underbrace{[I, I]}_{=0} + \sum_{k=1}^{3} a_0 b_k \underbrace{[I, \sigma_k]}_{=0} + \sum_{k=1}^{3} a_k b_0 \underbrace{[\sigma_k, I]}_{=0} + \sum_{k,j=1}^{3} a_k b_j \left[\sigma_k, \sigma_j\right],$$

il primo commutatore e le prime due somme di commutatori si annullano in quanto la matrice identità commuta con sé stessa e con ogni altra matrice, quindi si ha

$$[A, B] = \sum_{k,j=1}^{3} a_k b_j \left[\sigma_k, \sigma_j\right].$$

Le regole di commutazione, ovvero l'algebra della matrici di Pauli, sone note come

$$[\sigma_k, \sigma_j] = 2i \sum_{m=1}^{3} \epsilon_{kjm} \sigma_m\,, \qquad \forall\, k, j \in \{1, 2, 3\}\,.$$

Ne consegue che il commutatore delle matrici A e B può essere scritto come una combinazione delle matrici Pauli, ovvero come un prodotto misto scalare e vettoriale tra i tre vettori: $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \vec{b} = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{C}^3$ e $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_2) \in (M_{2\times 2}(\mathbb{C}))^3$, cioè

$$[A, B] = \sum_{k,j=1}^{3} a_k b_j \left[\sigma_k, \sigma_j\right] = 2i \sum_{k,j,m=1}^{3} \epsilon_{kjm} a_k b_j \sigma_m = \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{\sigma} = \sum_{k=1}^{3} \left(\vec{a} \times \vec{b}\right)_k \sigma_k\,,$$

dove $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)_k$, con $k \in \{1, 2, 3\}$, è la k-esima componente del vettore $(\vec{a} \times \vec{b}) \in \mathbb{C}^3$. Qualora assumessimo la proporzionalità non banale alla matrice identità del commutatore, avremmo che: $\exists \lambda \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$, tale che

$$[A, B] = \sum_{k=1}^{3} \left(\vec{a} \times \vec{b}\right)_k \sigma_k = \lambda I\,,$$

dall'ultima identità segue

$$\sum_{k=1}^{3}\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)_k \sigma_k - \lambda I = 0_2\,,$$

dove 0_2 è la matrice nulla 2×2. Abbiamo ottenuto una combinazione lineare non banale, poiché il coefficiente λ non è nullo per ipotesi, delle quattro matrici della base e questa combinazione coincide con la matrice nulla. Ciò è assurdo, essendo le matrici della base linearmente indipendenti. Ne consegue che non esiste un $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ che verifichi la condizione

$$[A, B] = \lambda I$$

e cioè, come volevasi provare, non esiste una coppia di matrici 2×2 a elementi complessi che abbia commutatore non nullo e proporzionale alla matrice identità.

Quinto problema (punteggio massimo: 6/30)

L'operatore $\hat{G}$ è definito in uno spazio di Hilbert tridimensionale E_3 ed ha le seguenti proprietà:

- è hermitiano e non è proporzionale all'operatore identità;
- ha determinate unitario, cioè: $\det\left(\hat{G}\right) = 1$;
- l'operatore seno di π volte $\hat{G}$ è nullo, in formula: $\operatorname{sen}\left(\pi\hat{G}\right)|v\rangle = |0\rangle$, $\forall\,|v\rangle \in E_3$;
- i due vettori $|v_1\rangle, |v_2\rangle \in E_3$, che, rispetto alla base canonica, hanno rappresentazioni

$$|v_1\rangle\,,|v_2\rangle \hookleftarrow v_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},$$

  verificano l'equazione

$$\hat{G}\left(\eta_1|v_1\rangle + \eta_2|v_2\rangle\right) = -\left(\eta_1|v_1\rangle + \eta_2|v_2\rangle\right),$$

  $\forall\,(\eta_1, \eta_2) \in \mathbb{C}^2$.

Si determini lo spettro discreto dell'operatore $\hat{G}$ e le matrici che rappresentano, rispetto alla base canonica, gli autovettori e lo stesso operatore.

Soluzione del quinto problema

L'operatore è diagonalizzabile, in quanto hermitiano, ha rappresentazione diagonale è

$$\hat{G} \overset{g}{\hookleftarrow} \operatorname{diag}(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)\,,$$

dove abbiamo indicato con $\{\gamma_k\}_{k=1}^3$ e $\{|g_k\rangle\}_{k=1}^3$ l'insieme degli autovalori e quello ortonormale degli autovettori corrispondenti. Si hanno, cioè, le equazioni agli autovalori

$$\hat{G}|g_k\rangle = \gamma_k|g_k\rangle\,, \qquad k \in \{1, 2, 3\}\,.$$

Usando il teorema spettarle, la rappresentazione dell'operatore $\operatorname{sen}(\pi\hat{G})$ rispetto alla base degli autovettori $\{|g_k\rangle\}_{k=1}^3$, è anch'essa diagonale e si ha

$$\operatorname{sen}(\pi\hat{G}) \overset{g}{\hookleftarrow} \operatorname{diag}\left(\operatorname{sen}(\pi\gamma_1), \operatorname{sen}(\pi\gamma_2), \operatorname{sen}(\pi\gamma_3)\right).$$

Per ipotesi questa matrice deve essere nulla, quindi

$$\operatorname{sen}(\pi\gamma_1) = \operatorname{sen}(\pi\gamma_2) = \operatorname{sen}(\pi\gamma_3) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \in \mathbb{Z}^3\,.$$

Poiché il determinante dell'operatore $\hat{G}$, ovvero il prodotto degli autovalori è pari uno, cioè

$$\det\left(\hat{G}\right) = \gamma_1\gamma_2\gamma_3 = 1\,,$$

si ha che la terna $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ può essere una permutazione di $(1, 1, 1)$ o di $(-1, -1, 1)$. Il fatto che l'operatore non sia proporzionale all'identità esclude la prima delle due eventualità, ci sono, quindi, due autovalori uguali a -1 ed uno uguale a 1.
I due vettori $|v_1\rangle$ e $|v_2\rangle$ sono autovettori dell'operatore $\hat{G}$ con l'autovalore degenere $\gamma_1 = \gamma_2 = -1$, le cui equazioni agli autovalori si ottengono dall'equazione data ponendo rispettivamente: $(\eta_1, \eta_2) = (1, 0)$ e $(\eta_1, \eta_2) = (0, 1)$. Non solo, grazie alla degenerazione, ogni loro combinazione è autovettore con lo stesso autovalore. Con il metodo di Gram-Schmidt, a partire da $|v_1\rangle$ e $|v_2\rangle$ possiamo definire un coppia di vettori ortogonali $|g_1\rangle$ e $|g_2\rangle$, che sono ancora autovettori dell'operatore $\hat{G}$ con autovalore -1. Avremo

$$|g_1'\rangle = |v_1\rangle\,, \qquad |g_2'\rangle = |v_2\rangle - \frac{\langle g_1'|v_2\rangle}{\langle g_1'|g_1'\rangle}|g_1'\rangle\,,$$

le rappresentazioni rispetto alla base canonica sono

$$\begin{aligned}
|g_1\rangle &= \frac{|g_1'\rangle}{\sqrt{\langle g_1'|g_1'\rangle}} \hookleftarrow g_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\
|g_2\rangle &= \frac{|g_2'\rangle}{\sqrt{\langle g_2'|g_2'\rangle}} \hookleftarrow g_2 = \frac{1}{\sqrt{\langle g_2'|g_2'\rangle}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

L'operatore $\hat{G}$ è normale, quindi, il terzo autovettore, relativo all'autovalore $\gamma_3 = 1$ è ortogonale ai primi due. Indicando con g_3^k la k-esima componente contro-variante, con $k \in \{1, 2, 3\}$, dalle condizioni di ortogonalità con il primo e secondo autovettore si hanno le condizioni

$$g_3^1 + g_3^3 = 0\,, \qquad g_3^1 + 2g_3^2 - g_3^3 = 0\,,$$

per cui $g_3^3 = -g_3^1$ e $g_3^2 = -g_3^1$, quindi, posto $g_3^1 = 1/\sqrt{3}$,

$$|g_3\rangle \hookleftarrow g_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

La matrice unitaria diagonalizzante dell'operatore $\hat{G}$ è

$$U = \begin{pmatrix} v_1^1 & v_2^1 & v_3^1 \\ v_1^2 & v_2^2 & v_3^2 \\ v_1^3 & v_2^3 & v_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \end{pmatrix},$$

ovvero si ha

$$G_d = \operatorname{diag}(-1, -1, 1) = U^\dagger G U\,,$$

dove G è la matrice richiesta, quella che rappresenta l'operatore $\hat{G}$ rispetto alla base canonica. Per ottenerla inveriamo la relazione precedente

$$\begin{aligned}
G &= U G_d U^\dagger \\
&= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & -2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1/3 & -2/3 & -2/3 \\ -2/3 & -1/3 & 2/3 \\ -2/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

in definitiva si ha

$$G = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Sesto problema (punteggio massimo: 6/30)

Si calcoli la trasformata di Fourier della funzione

$$\bigcirc(x) = \int_{-\infty}^{x} \theta(x')\,\text{sen}(x')dx'\,.$$

Ausilio. Per calcolare la trasformata di Fourier della funzione gradino di Heaviside potrebbe dare manforte la rappresentazione

$$\theta(x) = \frac{1}{2i\pi}\,\text{Pr}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ikx}}{k}dk + \frac{1}{2}\,.$$

Soluzione del sesto Problema

Si può riscrivere la funzione come

$$\bigcirc(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \theta(x-x')\theta(x')\,\text{sen}(x')dx'\,.$$

Usando due volte il teorema della convoluzione si ha

$$\widetilde{\bigcirc}(k) = \sqrt{2\pi}\,\tilde{\theta}(k)\mathscr{F}_k\left[\theta(x)\,\text{sen}(x)\right] = \tilde{\theta}(k)\left(\tilde{\theta}(k) * \mathscr{F}_k\left[\,\text{sen}(x)\right]\right)(k) = \tilde{\theta}(k)\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{\theta}(k-k')\mathscr{F}_{k'}\left[\,\text{sen}(x)\right]dk'\,,$$

dove si è usato il simbolo $\tilde{g}(k)$ per indicare la trasformata di Fourier della funzione $g(x)$, cioè, in generale,

$$\tilde{g}(k) = \mathscr{F}_k\left[g\right].$$

Per ottenere la trasformata di Fourier della funzione gradino di Heaviside usiamo la rappresentazione

$$\theta(x) = \frac{1}{2i\pi}\,\text{Pr}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ikx}}{k}dk + \frac{1}{2}\,.$$

Applicando la definizione, si ha

$$\begin{aligned}
\tilde{\theta}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\theta(x)e^{-ikx}dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{2i\pi}\,\text{Pr}\int_{-\infty}^{\infty}dk'\int_{-\infty}^{\infty}dx\,\frac{e^{ik'x}}{k'}e^{-ikx} + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ikx}dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{2i\pi}\,\text{Pr}\int_{-\infty}^{\infty}dk'\int_{-\infty}^{\infty}dx\,\frac{e^{ix(k'-k)}}{k'} + \sqrt{\frac{\pi}{2}}\delta(k) \\
&= \frac{1}{i\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(k'-k)\frac{dk'}{k'} + \sqrt{\frac{\pi}{2}}\delta(k)
\end{aligned}$$

da cui, facendo agire la prima delta di Dirac,

$$\tilde{\theta}(k) = -\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{k} + \sqrt{\frac{\pi}{2}}\delta(k)\,.$$

La trasformata di Fourier della funzione seno è

$$\mathscr{F}_k\left[\,\text{sen}(x)\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\text{sen}(x)e^{-ikx}dx = \frac{1}{2i\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{-ix(k-1)} - e^{-ix(k+1)}\right)dx\,,$$

i due integrali sono rappresentazioni della distribuzione delta di Dirac, quindi

$$\mathscr{F}_k\,[\,\mathrm{sen}(x)] = i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,(\delta(k+1)-\delta(k-1))\;.$$

Usando questi risultati, la trasformata di Fourier richiesta è

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathrm{O}}(k) &= \left(-\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{k}+\sqrt{\frac{\pi}{2}}\delta(k)\right) i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(-\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{k-k'}+\sqrt{\frac{\pi}{2}}\delta(k-k')\right)\big(\delta(k'+1)-\delta(k'-1)\big)\,dk' \\
&= \left(-\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{k}+\sqrt{\frac{\pi}{2}}\delta(k)\right) i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(-\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{k+1}+\sqrt{\frac{\pi}{2}}\delta(k+1)+\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{k-1}-\sqrt{\frac{\pi}{2}}\delta(k-1)\right) \\
&= \left(-\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{k}+\sqrt{\frac{\pi}{2}}\delta(k)\right)\left(-\frac{1}{k^2-1}+i\frac{\pi}{2}\,(\delta(k+1)-\delta(k-1))\right),
\end{aligned}$$

i singoli prodotti danno

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathrm{O}}(k) = {}&\left(-\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{k}\right)\left(-\frac{1}{k^2-1}\right)+\left(-\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\right)i\frac{\pi}{2}\Bigg(\underbrace{\frac{\delta(k+1)}{k}}_{=-\delta(k+1)}-\underbrace{\frac{\delta(k-1)}{k}}_{\delta(k-1)}\Bigg)+\sqrt{\frac{\pi}{2}}\underbrace{\delta(k)\left(-\frac{1}{k^2-1}\right)}_{=\delta(k)} \\
&+\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(i\frac{\pi}{2}\Big(\underbrace{\delta(k)\delta(k+1)}_{=0}-\underbrace{\delta(k)\delta(k-1)}_{=0}\Big)\right),
\end{aligned}$$

dove si è usata la proprietà della distribuzione delta di Dirac per cui

$$g(x)\delta(x-x') = g(x')\delta(x-x')\,,$$

valida per una funzione $g(x)$ continua in $x = x'$.
In considerazione di tutto ciò, la trasformata di Fourier cercata è

$$\widetilde{\mathrm{O}}(k) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{k\,(k^2-1)}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\big(\delta(k+1)+\delta(k-1)\big)+\sqrt{\frac{\pi}{2}}\delta(k)\,.$$